ریاضیات

کاربرد آن در مدیریت و حسابداری

هادی رنجبران

اثبات

اثبات

تهران: میدان انقلاب، خیابان کارگر شمالی، خیابان مستعلی، پلاک ۲۶، واحد ۲

انتشارات اثبات، تلفن: ۶۶۹۰۸۵۷۰ esbat.pub@gmail.com

ریاضیات

کاربرد آن در مدیریت و حسابداری

ویراست یازدهم

هادی رنجبران

• نوبت چاپ: **بیست و پنجم (۱۳۹۰)** • شمارگان: **۲۵۰۰ جلد** • قیمت: **۱۵۰۰۰ تومان**

• حروفچینی و صفحه‌آرایی: **آناهیتا کاویانی** • طرح جلد: **رضا صفوی**

چاپ و صحافی: **گنج شایگان**

شابک: ۹-۹-۹۶۷۳۸-۹۶۴-۹۷۸

این اثر، مشمول قانون حمایت مولفان و مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸ است. هر کس تمام یا قسمتی از این اثر را بدون اجازه مولف (ناشر) نشر یا پخش یا عرضه کند مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

مراکز پخش:

- کتابیران: تهران، تلفن: ۱۸-۶۶۵۶۶۵۰۹
- دانشیران: تهران، تلفن: ۶۶۴۰۰۱۴۴-۶۶۴۰۰۲۲۰
- کتابخانه فرهنگ: تهران، تلفن: ۳۰-۶۶۴۹۸۹۲۹
- مهربان: تهران، تلفن: ۶۶۹۷۳۱۷۵
- ترمه: تهران، تلفن: ۶۶۹۵۷۰۲۱

با نامِ او

سرشناسه	:	رنجبران، هادی، ۱۳۴۷ -
عنوان و نام پدیدآور	:	ریاضیات: کاربرد آن در مدیریت و حسابداری / هادی رنجبران.
وضعیت ویراست	:	[ویراست ۱۱]
مشخصات نشر	:	تهران: اثبات، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری	:	۸۰۶ص.
شابک	:	۹۷۸-۹۶۴-۹۶۷۳۸-۹-۹
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپا
یادداشت	:	چاپ بیست و پنجم.
موضوع	:	ریاضیات — راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:	ریاضیات -- مسایل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	:	مدیریت -- ریاضیات — مسایل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	:	مدیریت — ریاضیات — راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:	دانشگاه‌ها و مدارس عالی -- ایران — آزمون‌ها
موضوع	:	آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی -- ایران
رده‌بندی کنگره	:	QA۳۷/۲/ر۸۱۵/۹ ۱۳۹۰
رده‌بندی دیویی	:	۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	:	۲۳۲۴۵۹۵

ای خدا ای فضلِ تو حاجت روا | با تو یاد هیچ کس نبود روا
قطره‌ای دانش که بخشیدی ز پیش | متصل گردان به دریاهای خویش
قطرهٔ علمست اندر جان من | وا رهانش از هوا وَز خاک تن

مولانا

مقدمه ویراست یازدهم

کتاب ریاضیات (کاربرد آن در مدیریت و حسابداری) تألیف اینجانب چاپ‌های متعدد شد و مورد توجه روزافزون قرارگرفت. لذا ضرورت نگارش کاملاً جدیدی از این کتاب را حس کردم. در این نگارش کتاب طوری تدوین شده است که می‌توان از آن به‌عنوان خودآموزی کامل جهت فراگیری و همچنین تدریس استفاده کرد.

تمام هدف و تمرکز این کتاب بر ارائه‌ی روشی نوین در بیان مفاهیم، تعاریف و کاربردهای واقعی ریاضی و کمک به دانشجویان رشته‌های مدیریت و حسابداری در ایجاد درک عمیقی از موضوعات مورد بحث است. برای رسیدن به این هدف، مطالب درسی در هر فصل به شرح زیر ارائه شده است:

۱. سعی بر این است که مفاهیم درسی با یک مثال شهودی و به ساده‌ترین زبان ممکن بیان شود. در مواردی که وجود شکل، درک مفاهیم را آسان می‌کند، شکل‌های مناسبی نیز ترسیم شده است.

۲. ترتیب مفاهیم به گونه‌ای است که هر یک یا چند مفهوم پیش‌نیاز مفاهیم بعدی باشد تا امکان جمع‌بندی و برقراری ارتباط بین مفاهیم آموخته شده، فراهم شود.

۳. قضایا و نتایج مهم درس، داخل کادرهایی قرار داده شده تا مورد توجه واقع شود.

۴. حل تمرین در ریاضیات بسیار اهمیت دارد. به همین جهت در هر بخش طرح مثال‌های فراوان بر حسب موضوع از آسان به سخت، زمینه‌ی افزایش یادگیری و تفهیم مطالب را فراهم آورده است. در طراحی و انتخاب مثال‌ها سعی کرده‌ام تا مسائلی انتخاب شوند که از نظر کمک به فراگیری مطالب، به‌اندازه کافی ارزشمند و قابل تأمل باشند.

۵. در فصل دوازدهم، کاربردهای ریاضیات در بازرگانی و اقتصاد، از جمله مفاهیم کشش، توابع درآمد، هزینه، تولید و خواص آن‌ها، مازاد مصرف کننده، . . .، راه‌های محاسبهٔ رشد و مسیر متغیرها در طول زمان آورده شده است.

۶. نکته‌ها و تذکرهای لازم برای حل تست و اطلاعاتی فراتر از کتاب درسی بیان شده تا دانشجویان بتوانند در حداقل زمان ممکن به این‌گونه سؤال‌ها پاسخ دهند.

۷. برای کسب مهارت بالا و تسلط کامل بر مفاهیم درسی، هر فصل از کتاب، شامل تعداد نسبتاً زیادی تست استاندارد است.

۸. تست‌های آزمون کارشناسی ارشد از سال ۱۳۷۰ تا ۱۳۸۴ به‌صورت موضوعی در انتهای هر فصل آورده شده است. برای این‌که دانشجو بتواند ارزیابی صحیح و کاملی از آموخته‌های خود داشته باشد، تست‌های آزمون کارشناسی ارشد از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۰ به‌صورت آزمون‌های جامع در فصل ۱۳ گنجانده شده است.

۹. همه‌ی مسائل و تست‌ها دارای پاسخ‌های کاملاً تشریحی بوده و در بسیاری از موارد بیش از یک راه‌حل برای آنها آورده شده است، به‌گونه‌ای که کتاب حاضر را به‌صورت راهنمای جامع برای تدریس درآورده است.

این همه گفتیم لیک اندر بسیچ | بی‌عنایات خدا هیچیم هیچ

بدیهی است این کتاب مانند هر اثر دیگری خالی از اشکال و لغزش نخواهد بود. از این‌رو، از استادان گرانقدر و دانشجویان عزیز تقاضا دارم نظرات اصلاحی خود را در میان گذارند تا در چاپ‌های بعدی مورد توجه و استفاده قرارگیرد.

هادی رنجبران، بهار ۱۳۹۰
hadiranjbaran@yahoo.com

این کتاب را

تقدیم می‌کنم به مادر عزیز و مهربانم.

فهرست مطالب

فصل ۱. مجموعه‌ها ۱

مجموعه و عضویت ۱

مجموعه‌ی تهی ۲

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۲

زیرمجموعه (جزئیت) ۳

مجموعه‌ی توانی ۴

تساوی دو مجموعه ۵

مجموعه‌ی مرجع ۵

متمم یک مجموعه ۵

اجتماع مجموعه‌ها ۶

اشتراک مجموعه‌ها ۷

دو مجموعه‌ی جدا از هم ۸

تفاضل دو مجموعه ۹

جبر مجموعه‌ها ۱۰

عدد اصلی مجموعه ۱۱

تفاضل متقارن دو مجموعه ۱۲

اجتماع و اشتراک چند مجموعه ۱۴

افراز یک مجموعه ۱۵

ضرب دکارتی دو مجموعه ۱۵

تست‌های فصل ۱ ۱۸

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۱ ۲۰

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۲۵

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۲۶

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۲۹

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۳۰

فصل ۲. بسط دوجمله‌ای ۳۳

دوجمله‌ای ۳۳

ویژگی‌های بسط دوجمله‌ای ۳۳

جمله‌ی $(r+1)$ام ۳۵

تست‌های فصل ۲ ۴۱

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۲ ۴۲

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۴۴

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۴۴

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۴۶

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۴۶

فصل ۳. تابع ۴۹

تابع ۴۹

دامنه و بُرد تابع‌های حقیقی ۵۳

نمودار تابع ۵۳

تغییرات و انتقال منحنی‌ها ۵۴

مقدار تابع در یک نقطه ۵۷

تابع ثابت و تابع همانی ۵۸

تابع قدرمطلق ۵۹

تابع جزء صحیح ۶۳

تابع علامت ۶۶

تابع صعودی و تابع نزولی ۶۸

تابع کران‌دار ۶۹

تابع نمایی ۷۰

تابع لگاریتمی ۷۱

نحوه‌ی تعیین دامنه‌ی تابع ۷۳

نحوه‌ی تعیین بُرد تابع ۸۱

تساوی دو تابع ۸۹

$f(x)$ها ۹۰

اعمال روی توابع (جبر توابع) ۹۳

ترکیب توابع ۹۵

تابع زوج و تابع فرد ۹۹

تابع یک‌به‌یک ۱۰۳

تابع معکوس ۱۰۶

تابع پوشا ۱۱۲

توابع معکوس مثلثاتی ۱۱۵

توابع هیپربولیک (هذلولی) ۱۲۰
منحنی‌ها و برخی از خواص توابع هیپربولیک ۱۲۱
تست‌های فصل ۳ ۱۲۴
پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۳ ۱۳۱
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۱۴۲
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۶
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۱۵۳
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۱۵۶

فصل ۴. حد و پیوستگی ۱۶۳
مفهوم میل کردن ۱۶۳
مفهوم حد ۱۶۳
حد راست و حد چپ تابع ۱۶۶
روش‌های محاسبه‌ی حدود ۱۶۷
حد توابع چندضابطه‌ای ۱۶۹
حد تابع علامت ۱۷۱
حدهای شامل توابع جزء صحیح ۱۷۲
حدهایی که به‌صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آیند ۱۷۵
قضیه‌ی فشردگی ۱۷۸
هم‌ارزی‌های مثلثاتی و جبری ۱۸۰
حد بی‌نهایت ۱۸۳
حد در بی‌نهایت ۱۸۹
حدهایی که به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آیند ۱۹۱
صورت‌های مبهم ۱۹۹
بررسی عدم وجود حد ۲۰۵
پیوستگی تابع در یک نقطه ۲۰۶
ناپیوستگی رفع‌شدنی ۲۰۹
ناپیوستگی رفع‌نشدنی (جهشی) ۲۱۰
پیوستگی چپ و پیوستگی راست ۲۱۱
مطالبی درباره‌ی پیوستگی ۲۱۳
پیوستگی در یک بازه ۲۱۹
خط مجانب ۲۲۱
مجانب قائم ۲۲۱
مجانب افقی ۲۲۳
مجانب مایل ۲۲۴
تست‌های فصل ۴ ۲۲۷
پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۴ ۲۳۳
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۲۴۳
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۲۴۵
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۲۴۹
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۲۵۱

فصل ۵. مشتق ۲۵۵
نمو تابع و نمو متغیر ۲۵۵
آهنگ تغییر ۲۵۶
تعریف مشتق تابع در یک نقطه ۲۵۷
تعبیر هندسی مشتق ۲۵۹
تعریف تابع مشتق ۲۶۰
دستورها و قضیه‌های مشتق‌گیری ۲۶۰
مشتق مراتب بالاتر ۲۶۷
مشتق تابع مرکب ۲۷۱
مشتق‌گیری ضمنی ۲۷۴
مشتق منحنی‌های پارامتری ۲۷۶
مشتق توابع معکوس ۲۷۷
مشتق راست و مشتق چپ ۲۷۸
نقطه‌ی زاویه‌دار ۲۸۱
نقطه‌ی بازگشت ۲۸۲
مشتق‌پذیری و پیوستگی ۲۸۲
دسته‌بندی نقاط مشتق‌ناپذیر ۲۸۴
مشتق‌پذیری تابع در یک بازه ۲۸۵
خط مماس بر منحنی ۲۸۵
خط قائم بر منحنی ۲۸۸
تابع صعودی و نزولی ۲۸۹
نقطه‌ی بحرانی ۲۹۳
ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ۲۹۶
آزمون مشتق اول برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی ۳۰۰
آزمون مشتق دوم برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی ۳۰۵
ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق ۳۰۷
آزمون مشتق اول برای تعیین نقاط اکسترمم مطلق ۳۱۱
طرز تعیین عرض‌های ماکزیمم و مینیمم تابع f بدون استفاده از مشتق ۳۱۴
تحدب و تقعر منحنی یک تابع ۳۱۴
نقطه‌ی عطف ۳۱۸
نقاط مهم روی منحنی تابع f ۳۲۲
رسم منحنی توابع چند جمله‌ای ۳۲۴
نتایج کلی برای تابع درجه‌ی دوم ۳۲۵
نتایج کلی برای تابع درجه‌ی سوم ۳۲۶
رسم منحنی توابع کسری (غیر رادیکالی) ۳۲۷

نتایج کلی برای تابع هموگرافیک ۳۲۸
رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f ۳۲۹
یافتن ماکزیمم و مینیمم در حالت‌های خاص ۳۳۱
دیفرانسیل ۳۳۲
انتشار خطا ۳۳۵
دیفرانسیل‌های متوالی ۳۳۶
تست‌های فصل ۵ ۳۳۷
پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۵ ۳۴۴
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۳۵۶
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۳۶۲
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۳۷۱
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۳۷۷

فصل ۶. انتگرال ۳۸۷
تابع اولیه یا پادمشتق ۳۸۷
انتگرال نامعین ۳۸۷
صورت‌های متعارف انتگرال‌گیری ۳۸۹
انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر ۴۰۲
انتگرال‌گیری به‌روش جزء به جزء ۴۰۸
انتگرال‌گیری از کسرهای گویا ۴۱۴
انتگرال معین ۴۱۹
ویژگی‌های انتگرال معین ۴۲۰
قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ۴۲۱
مشتق‌گیری از انتگرال ۴۳۰
سطح محصور ۴۳۲
محاسبه‌ی حجم جسم دوار ۴۳۸
انتگرال‌های ناسره ۴۴۰
نحوه‌ی محاسبه انتگرال چندگانه ۴۴۲
تست‌های فصل ۶ ۴۴۳
پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۶ ۴۴۸
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۴۵۷
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۴۶۱
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۴۶۹
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۴۷۴

فصل ۷. بردار، خط و صفحه ۴۸۳
مختصات در فضا ۴۸۳
فاصله در فضای سه‌بعدی ۴۸۵
بردارها در فضا ۴۸۶
جمع بردارها ۴۸۷
ضرب عدد در یک بردار ۴۸۷
بردارهای موازی (هم‌راستا) ۴۸۸
قرینه‌ی یک بردار و تفاضل دو بردار ۴۸۸
خواص جمع و ضرب بردارها ۴۸۹
بردارهای یکّه ۴۸۹
ضرب داخلی دو بردار (ضرب اسکالر) ۴۹۰
ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری) ۴۹۲
ضرب مختلط ۴۹۴
خط در فضا ۴۹۵
وضعیت دو خط نسبت به هم در فضا ۴۹۶
فاصله‌ی یک نقطه از یک خط ۴۹۷
فاصله‌ی دو خط موازی ۴۹۸
زاویه‌ی بین دو خط ۴۹۸
صفحه در فضا ۴۹۹
شرایط موازی بودن و عمود بودن دو صفحه ۵۰۰
زاویه‌ی بین دو صفحه ۵۰۱
فاصله‌ی یک نقطه از یک صفحه ۵۰۱
فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی ۵۰۱
وضعیت نسبی دو صفحه در فضا ۵۰۲
وضعیت نسبی خط و صفحه ۵۰۲
ترکیب خطی ۵۰۳
استقلال خطی و بستگی خطی ۵۰۴
تست‌های فصل ۷ ۵۰۵
پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۷ ۵۰۷
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۵۱۱
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۵۱۱
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۵۱۲
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۵۱۲

فصل ۸. ماتریس و دترمینان ۵۱۳
ماتریس ۵۱۳
تساوی دو ماتریس ۵۱۳
ماتریس‌های خاص ۵۱۴
جمع و تفریق ماتریس‌ها ۵۱۶
ضرب عدد در یک ماتریس ۵۱۶
ضرب ماتریس‌ها ۵۱۷
توان‌های طبیعی یک ماتریس مربع ۵۲۲
ماتریس‌ها بی‌اثر (هیچ‌نما و خود توان) ۵۲۲

ماتریس ترانهاده (ترانسپوزه) ۵۲۳
ماتریس متقارن ۵۲۵
ماتریس پادمتقارن (شبه متقارن) ۵۲۵
دترمینان ۵۲۷
دترمینان ماتریس‌های $n \times n$ ۵۲۸
ویژگی‌های دترمینان یک ماتریس ۵۳۰
دو کاربرد دترمینان ۵۳۴
ماتریس منفرد و غیر منفرد ۵۳۴
ماتریس همسازه و ماتریس الحاقی ۵۳۵
معکوس (وارون) یک ماتریس ۵۳۶
ویژگی‌های معکوس یک ماتریس ۵۳۹
ماتریس متعامد ۵۴۱
عملیات مقدماتی ۵۴۲
مرتبه (رتبه) ماتریس ۵۴۲
دستگاه معادلات خطی ۵۴۴
دستگاه دو معادله دو مجهول ۵۴۵
دستگاه سه معادله و سه مجهول ۵۴۶
دستگاه دو معادله و سه مجهول ۵۴۷
دستگاه سه معادله و دو مجهول ۵۴۸
دستگاه معادلات خطی m معادله n مجهول ۵۴۹
حل دستگاه n معادله n مجهول ۵۵۱
دستگاه معادلات همگن خطی ۵۵۲
معادله مفسر، مقادیر ویژه و امتدادهای یک ماتریس مربع ۵۵۲
صورت کلی معادله مفسر یک ماتریس ۲×۲ و ۳×۳ ۵۵۴
فرم‌های درجه‌ی دوم ۵۵۷
تست‌های فصل ۸ ۵۵۹
پاسخ تشریحی تستهای فصل ۸ ۵۶۵
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۵۷۴
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۵۷۹
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۵۸۷
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۵۹۳

فصل ۹. توابع چندمتغیره ۶۰۱
توابع چندمتغیره ۶۰۱
دامنه و برد توابع چند متغیره ۶۰۲
حد توابع چند متغیره ۶۰۴
پیوستگی ۶۰۷
مشتقات جزئی (نسبی) ۶۱۰
رابطه‌ی بین پیوستگی و مشتقات جزیی ۶۱۲
مشتقات جزیی مراتب بالاتر ۶۱۲
دیفرانسیل کامل ۶۱۳
دیفرانسیل مراتب بالاتر ۶۱۵
مشتق کامل ۶۱۷
مشتق تابع ضمنی ۶۱۹
توابع همگن و قضیه‌ی اویلر ۶۲۰
ژاکوبین ۶۲۲
ماکزیمم و مینیمم توابع چند متغیره ۶۲۳
نقطه‌ی بحرانی ۶۲۶
نقطه‌ی زینی ۶۲۷
نحوه‌ی تعیین نقاط اکسترمم نسبی و زینی ۶۲۸
محدب و مقعر بودن ۶۳۳
ماکزیمم و مینیمم توابع مقید ۶۳۴
تست‌های فصل ۹ ۶۳۹
پاسخ تشریحی تستهای فصل ۹ ۶۴۶
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۶۵۶
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۶۶۱
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۶۷۱
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۶۷۶

فصل ۱۰. معادلات دیفرانسیل ۶۸۷
تعریف معادله دیفرانسیل ۶۸۷
مرتبه و درجه یک معادله دیفرانسیل ۶۸۷
تشکیل معادلات دیفرانسیل ۶۸۸
جواب‌های یک معادله دیفرانسیل ۶۸۸
جواب عمومی معادله دیفرانسیل ۶۸۸
جواب خصوصی معادله دیفرانسیل ۶۸۹
حل معادلات دیفرانسیل ۶۸۹
معادله دیفرانسیل $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ ۶۸۹
معادله‌ی دیفرانسیل جدا ۶۹۰
معادله دیفرانسیل همگن ۶۹۰
معادله دیفرانسیل کامل ۶۹۱
معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول ۶۹۲
معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن ۶۹۳
معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم غیرهمگن ۶۹۴
تست‌های فصل ۱۰ ۶۹۶
پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۱۰ ۶۹۸

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۰۴
پاسخ تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۰۴

فصل ۱۱. دنباله و سری ۷۰۵
دنباله ۷۰۵
حد یک دنباله ۷۰۵
دنباله‌های خاص ۷۰۶
کران بالا و کران پایین دنباله و دنباله‌ی کران‌دار ۷۰۷
سری ۷۰۷
سری هارمونیک و سری هندسی ۷۱۰
آزمون جمله nام ۷۱۰
آزمون چندجمله‌ای ۷۱۱
آزمون مقایسه حد ۷۱۱
آزمون p ۷۱۱
آزمون دالامبر ۷۱۲
سری‌های متناوب ۷۱۲
آزمون سری‌های متناوب ۷۱۲
آزمون نسبت ۷۱۳
سری‌های توانی ۷۱۳
آزمون دالامبر برای سری توانی ۷۱۴
سری تیلور ۷۱۵
تست‌های فصل ۱۱ ۷۱۷
پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۱۱ ۷۱۹

فصل ۱۲. کاربرد ریاضیات ۷۲۳
تابع تقاضا ۷۲۳
تابع عرضه ۷۲۴
تعادل بازار ۷۲۵
تابع درآمد ۷۲۶
تابع هزینه‌ی کل ۷۲۸
تحلیل سر به سر ۷۳۰
کشش ۷۳۱
تابع درآمد، درآمد نهایی و کشش تقاضا ۷۳۳
تابع سود ۷۳۴
مازاد مصرف‌کننده ۷۳۵
مازاد تولیدکننده ۷۳۷
توابع تولید ۷۳۸
نسبت بازده به مقیاس ۷۳۹
درآمد ملی، مصرف ملی و پس انداز ملی ۷۳۹
مسیر متغیرها در طول زمان ۷۴۱
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (مدیریت) ۷۴۳
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۴۵
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (حسابداری) ۷۴۸
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۵۰

فصل ۱۳. آزمون‌های جامع ۷۵۳
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۵) ۷۵۳
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۵۵
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۶) ۷۶۰
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۶۲
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۷) ۷۶۸
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۷۰
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۸) ۷۷۶
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۷۸
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۹) ۷۸۴
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۸۶
تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۹۰) ۷۹۲
پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد ۷۹۴

فصل ۱

مجموعه‌ها

مجموعه و عضویت

۱ـ۱ مجموعه به دسته‌ای از اشیای دو به دو متمایز و کاملاً مشخص گفته می‌شود. در این تعبیر، منظور از شیء هر موجودی می‌تواند باشد و درواقع در هر مبحث، موجودات آن بحث، اشیای آن بحث را تشکیل می‌دهند، مثلاً وقتی بحث اعداد است، هر عدد یک شیء ریاضی محسوب می‌شود.

۱ـ۲ جمله‌ی «دو به دو متمایز»، به‌معنای تکراری نبودن اشیاء است و «کاملاً مشخص» به‌معنای آن است که دقیقاً و بدون هیچ مشخصه‌ای معین و شناخته شده باشد. معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهند و اعضای مجموعه را با دو آکولاد محصور می‌کنند.

مثال اعداد طبیعی فرد، یک مجموعه تشکیل می‌دهند، زیرا اعضای آن کاملاً مشخص و دو به دو متمایزند.

مثال سه عدد طبیعی و زوج که متوالی باشند، مجموعه‌ای تشکیل نمی‌دهند، زیرا اعضای آن مشخص نیستند.

۱ـ۳ اگر a عضو مجموعه‌ی A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم «a متعلق به A است.» اگر b عضو مجموعه‌ی A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$ و می‌خوانیم «b متعلق به A نیست.»

مثال مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی را A می‌نامیم. پس $۳ \in A$ و $۱ \notin A$.

۱ـ۴ اعضای یک مجموعه، خودشان می‌توانند مجموعه باشند، مثلاً مجموعه‌ی دانشگاه‌ها که از دانشکده‌ها تشکیل شده است و هر دانشکده خودش مجموعه‌ای است از دانشجویان.

مثال اگر فرض کنیم $A = \{۱, \{۱\}, \{۱, ۲\}, \{\{۲\}\}$، در این صورت خواهیم داشت:

$$۱ \in A \ , \ \{۱\} \in A \ , \ ۲ \notin A \ , \ \{۱, ۲\} \in A$$
$$\{\{۲\}\} \notin A \ , \ \{۲\} \in A$$

۱ـ۵ نمایش مجموعه: مجموعه به یکی از صورت‌های زیر نمایش داده می‌شود:

الف) نمایش تفصیلی:

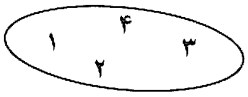
۱) اگر اعضای مجموعه از هم جدا و تعداد آن‌ها محدود باشد، تمام اعضا را داخل دو آکولاد می‌نویسیم، مانند: مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵، $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$.

۲) اگر تعداد اعضا زیاد ولی متناهی باشد، سه عضو اول را می‌نویسیم و نقطه‌چین می‌گذاریم و سپس عضو آخر را می‌نویسیم، مانند: مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰، $\{1, 2, 3, \ldots, 999\}$.

۳) اگر تعداد اعضا نامتناهی باشد، سه عضو اول را می‌نویسیم و چند نقطه می‌گذاریم، مانند: مجموعه‌ی اعداد اول $\{2, 3, 5, \ldots\}$.

ب) نمایش ریاضی: برای نشان دادن یک مجموعه با نماد ریاضی درصورت امکان یک متغیر و گزاره‌نمایی که بیان‌کننده‌ی خاصیت مشترک اعضای مجموعه است با دامنه‌ی متغیر داخل دو آکولاد قرار داده می‌شود، مثلاً: مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰، یعنی $\{1, 2, 3, \ldots, 19\}$ را با نماد ریاضی به‌صورت $\{x | x \in N,\ x < 20\}$ نشان می‌دهیم.

پ) نمایش هندسی (نمودار ون): برای نمایش دادن یک مجموعه با نمایش هندسی، اعضای مجموعه را درون منحنی بسته‌ای قرار می‌دهند، مثلاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵.



۱ـ۶ | مجموعه‌های خاص

۱) مجموعه‌ی اعداد طبیعی: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

۲) مجموعه‌ی اعداد حسابی: $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

۳) مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبی: $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

۴) مجموعه‌ی اعداد گویا: $Q = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in Z\ ,\ b \neq 0\right\}$

۵) مجموعه‌ی اعداد اَصَم (Q^c): اعداد اصم، اعدادی هستند که بسط اعشاری آن‌ها بی‌پایان است ولی متناوب نیست، مانند:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots \qquad \pi = 3{,}141592\ldots$$

۶) مجموعه‌ی اعداد حقیقی: که آن را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم شامل اعداد گویا و اعداد اَصَم است.

$$\mathbb{R} = Q \cup Q^c$$

مجموعه‌ی تهی

۱ـ۷ | مجموعه‌ای که فاقد عضو باشد، مجموعه‌ی تهی نامید می‌شود و آن را با نماد $\{\ \}$ یا ϕ نمایش می‌دهند.

۱ـ۸ | مجموعه‌های $\{0\}$ و $\{\phi\}$ تهی نیستند، زیرا هرکدام یک عضو دارند.

مثال اگر A مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد که در معادله‌ی $x^2 + 1 = 0$ صدق کنند، آنگاه $A = \phi$.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

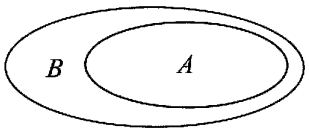
۱ـ۹ | اگر مجموعه‌ای تعداد اعضای مشخص داشته باشد و مثلاً n عضو داشته باشد یا تهی باشد، متناهی نامیده می‌شود، مانند: اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ میلیون.

۱ـ۱۰ | هر مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی است. به عبارت دیگر، به مجموعه‌هایی که برای آن‌ها پایانی نمی‌توانیم درنظر بگیریم، مجموعه‌های نامتناهی گفته می‌شود، مانند: مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت، یعنی $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

زیرمجموعه (جزئیت)

۱ـ۱۱ اگر A و B دو مجموعه باشند و هر عضو مجموعه‌ی A عضوی از مجموعه‌ی B نیز باشد، در این صورت می‌گوییم A زیرمجموعه‌ی B است و می‌نویسیم $A \subset B$[1].

۱ـ۱۲ نمایش هندسی $A \subset B$ چنین است:



مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی مضارب ۱۰ زیرمجموعه‌ی مضارب ۵ است.

مثال مجموعه‌ی $A = \{۱, \{۲\}, \{۲, ۳\}, \{\phi\}\}$ را درنظر می‌گیریم. دراین‌صورت:

$$\{۱\} \subset A\,, \qquad ۱ \in A\,, \qquad \{۲\} \not\subset A\,, \quad \{۲\} \in A$$
$$\{\{۲, ۳\}\} \subset A\,, \quad \{۲, ۳\} \in A\,, \quad \phi \notin A$$

۱ـ۱۳ ویژگی‌های زیرمجموعه:

$$۱)\ A \subset A \qquad ۲)\ \phi \subset A \qquad ۳)\ A \subset B,\ B \subset C \Longrightarrow A \subset C$$

۱ـ۱۴ چند نکته درباره‌ی زیرمجموعه:

۱) اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های A برابر ۲^n است.

۲) اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی A برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (n \geqslant r)$$

۳) اگر k عضو جدید و متمایز به عضوهای یک مجموعه‌ی n عضوی اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲^k برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی n عضوی می‌گردد.

مثال تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{x | x \in N\ ,\ x^۳ - x = ۰\}$ را بیابید.

حل

$$x^۳ - x = ۰ \Longrightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰\ ,\ x = ۱\ ,\ x = -۱ \Longrightarrow A = \{۱\}$$
$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های } A = ۲^۱ = ۲$$

مثال تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷ را پیدا کنید.

---

۱. نماد $\subseteq$ نیز برای نمایش زیرمجموعه بودن به‌کار می‌رود، یعنی $A \subseteq B$.

حل

$$r=۳\ ,\ n=۶ \Longrightarrow \binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۳\times۲}=۲۰$$

مثال اگر به مجموعه‌ی A پنج عضو متمایز اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن چند برابر می‌شود؟

حل $k=۵$. بنابراین $۲^۵$ یعنی ۳۲ برابر می‌شود.

تست تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $(n+۱)$ عضوی ۳۲ زیرمجموعه کم‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $(n+۲)$ عضوی است، n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

حل گزینه‌ی ۲.

$$۲^{n+۱}=۲^{n+۲}-۳۲ \Longrightarrow ۲^{n+۲}-۲^{n+۱}=۳۲ \Longrightarrow ۲^n(۴-۲)=۳۲$$
$$\Longrightarrow ۲^n=۱۶ \Longrightarrow n=۴$$

تست دو مجموعه‌ی A و B برروی هم ۱۴ عضو دارند. اگر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A، ۱۶ برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی B باشد، مجموعه‌ی B چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۶

حل گزینه‌ی ۲.

$$n(A)=x\ ,\ n(B)=y \Longrightarrow \begin{cases} x+y=۱۴ \\ ۲^x=۱۶\times۲^y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=۱۴ \\ ۲^x=۲^{۴+y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=۱۴ \\ x-y=۴ \end{cases}$$
$$\Longrightarrow ۲x=۱۸ \Longrightarrow x=۹\ ,\ y=۱۴-۹=۵$$

۱ـ۱۵ زیرمجموعه‌ی محض: زیرمجموعه‌های ϕ و A را زیرمجموعه‌های بدیهی A می‌نامیم و همه‌ی زیرمجموعه‌های A به‌جز خود A را زیرمجموعه‌های حقیقی یا محض A می‌نامیم. بدیهی است تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی A برابر با $۲^n-۱$ است.

تست مجموعه‌ی A دارای ۶۳ زیرمجموعه‌ی محض است. تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه‌ی A کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

حل گزینه‌ی ۱.

$$۲^n-۱=۶۳ \Longrightarrow ۲^n=۶۴ \Longrightarrow n=۶$$

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی}=\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۲!۴!}=\frac{۶\times۵\times۴!}{۲\times۴!}=۱۵$$

مجموعه‌ی توانی

۱ـ۱۶ اگر A یک مجموعه باشد، مجموعه‌ای متشکل از تمام زیرمجموعه‌های A را مجموعه‌ی توانی A می‌نامند و با نماد $P(A)$ نشان می‌دهند.

مثال اگر $A=\{۱,\{۱\}\}$ باشد، $P(A)$ را تشکیل دهید.

حل

$$P(A)=\{\phi,\{۱\},\{\{۱\}\},A\}$$

مثال $P(P(\phi))$ را تشکیل دهید.

حل
$$P(\phi) = \{\phi\} \Longrightarrow P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$$

۱ـ۱۷ تعداد عضوهای $P(A)$ با تعداد زیرمجموعه‌های A یعنی ۲^n مساوی است و تعداد زیرمجموعه‌های $P(A)$ برابر با $(۲)^{۲^n}$ است.

تست اگر $A = \{x | x \in N\ ,\ x \leqslant ۳\}$، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های $P(A)$ کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۶۴ ۳) ۲۵۶ ۴) ۵۱۲

حل گزینه‌ی ۳.
$$A = \{x | x \in N\ ,\ x \leqslant ۳\} = \{۱, ۲, ۳\} \Longrightarrow n = ۳$$
$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های } P(A) = ۲^{۲^۳} = ۲^۸ = ۲۵۶$$

تساوی دو مجموعه

۱ـ۱۸ دو مجموعه‌ی A و B را مساوی هم می‌گوییم، اگر و تنها اگر A زیرمجموعه‌ی B و B نیز زیرمجموعه‌ی A باشد، یعنی:

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B\ ,\ B \subset A$$

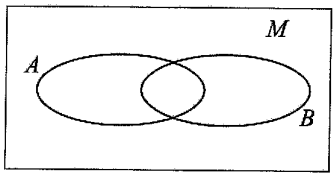
مثال دو مجموعه‌ی $A = \{۱, ۳\}$ و $B = \{۱, ۳, ۳, ۱, ۱\}$ مساوی‌اند.

مثال x و y را طوری پیدا کنید که دو مجموعه‌ی $A = \{x + ۳y, ۳\}$ و $B = \{x + y, ۷\}$ متساوی باشند.

حل
$$A = B \Longrightarrow \begin{cases} x + ۳y = ۷ \\ x + y = ۳ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + ۳y = ۷ \\ -x - y = -۳ \end{cases} \Longrightarrow y = ۲\ ,\ x = ۱$$

مجموعه‌ی مرجع

۱ـ۱۹ مجموعه‌ی مرجع به مجموعه‌ای گفته می‌شود که شامل تمام عضوهای مجموعه‌های مورد بررسی باشد. اگر اعضای یک مجموعه را درنظر بگیریم، می‌توان این مجموعه را زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی کلی‌تر دانست. این مجموعه‌ی کلی را مجموعه‌ی مرجع یا جهانی می‌نامند و با حرف M یا U نشان می‌دهند. غالباً مجموعه‌ی مرجع را به‌صورت یک مستطیل و سایر مجموعه‌ها را که زیرمجموعه‌ی آن است داخل آن رسم می‌کنیم.



متمم یک مجموعه

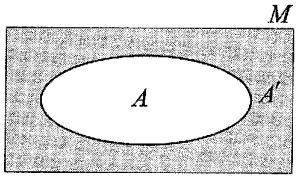
۱ـ۲۰ اگر A یک مجموعه و M مجموعه‌ی مرجع باشد، مجموعه‌ی تمام اعضایی از M که در A نباشند را متمم A نسبت به M می‌گوییم و با A' نشان می‌دهیم، یعنی:

$$A' = \{x | x \in M\ ,\ x \notin A\}$$

بنابراین همواره

$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$$

۱ـ۲۱ در نمودار زیر قسمت هاشورخورده A' است.



مثال اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجموعه‌ی مرجع و $A = \{2k | k \in N\}$، متمم مجموعه‌ی A را با عضوها و با نماد ریاضی نشان دهید.

حل

$$M = \{1, 2, 3, \dots\} \ , \ A = \{2, 4, 6, \dots\}$$
$$A' = \{1, 3, 5, \dots\} = \{2k - 1 | k \in N\}$$

۱ـ۲۲ ویژگی‌های متمم یک مجموعه:

۱) $(A')' = A$	۲) $M' = \phi$	۳) $\phi' = M$
۴) $A = B \Leftrightarrow A' = B'$	۵) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$	

اجتماع مجموعه‌ها

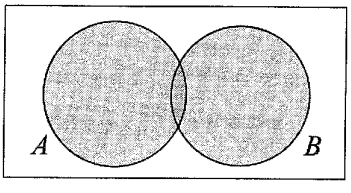
۱ـ۲۳ منظور از اجتماع دو مجموعه‌ی A و B که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود، مجموعه‌ای است که اعضای آن متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هردو باشد، یعنی:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

بنابراین همواره

$$x \in (A \cup B) \Longleftrightarrow x \in A \text{ یا } x \in B$$

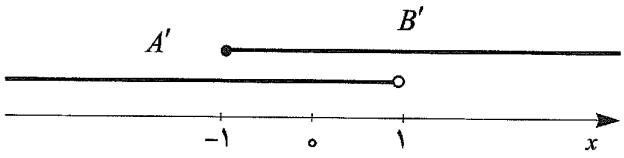
۱ـ۲۴ در نمودار زیر قسمت هاشورخورده $A \cup B$ است.



مثال اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R} \ , \ x \geqslant 1\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{R} \ , \ x < -1\}$ باشد، آنگاه $A' \cup B'$ را تعیین کنید.

حل

$$A' = \{x | x \in \mathbb{R}\ ,\ x < ۱\}\ ,\ B' = \{x | x \in \mathbb{R}\ ,\ x \geqslant -۱\}$$



$$A' \cup B' = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

تست اگر $M = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$، $A = \{۲, ۳, ۵\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، مجموعه‌ی $(A \cup B)'$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۶۴ ۴) ۳۲

حل گزینه‌ی ۴.

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \Longrightarrow (A \cup B)' = \{۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\} \Longrightarrow n = ۵$$

تعداد زیرمجموعه‌های $(A \cup B)' = ۲^۵ = ۳۲$

۱ـ۲۵ ویژگی‌های اجتماع دو مجموعه:

۱) $A \cup A = A$	۲) $A \cup \phi = A$	۳) $A \cup M = M$
۴) $A \cup A' = M$	۵) $A \subset (A \cup B)$	۶) $B \subset (A \cup B)$
۷) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$		

مثال طرف دوم تساوی $(A \cup M')' \cup (A \cup \phi')' = \ldots$ را بنویسید.

حل

$$(A \cup M')' \cup (A \cup \phi')' = (A \cup \phi)' \cup (A \cup M)' = A' \cup M' = A' \cup \phi = A'$$

مثال اگر $A \subset B$، ثابت کنید $A' \cup B = M$.

حل

$$A \subset B \Longrightarrow A \cup B = B$$

$$A' \cup B = A' \cup (A \cup B) = (A' \cup A) \cup B = M \cup B = M$$

اشتراک مجموعه‌ها

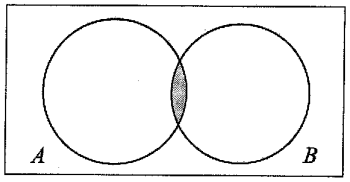
۱ـ۲۶ منظور از اشتراک دو مجموعه‌ی A و B که به‌صورت $A \cap B$ نشان داده می‌شود، مجموعه‌ای است که اعضای آن هم متعلق به A و هم متعلق به B باشد، یعنی:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ و } x \in B\}$$

بنابراین همواره

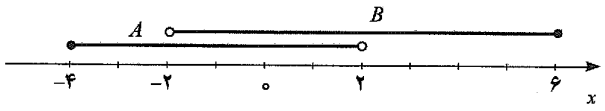
$$x \in (A \cap B) \Longleftrightarrow x \in A \text{ و } x \in B$$

۱ـ۲۷ در نمودار زیر قسمت هاشورخورده $A \cap B$ است.



مثال اگر $A = \{x| -۴ \leqslant x < ۲\}$ و $B = \{x| -۲ < x \leqslant ۶\}$ و $A, B \subset \mathbb{R}$، آنگاه $A \cap B$ را تعیین کنید.

حل



$$\Longrightarrow A \cap B = \{x| -۲ < x < ۲\}$$

تست A مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۸، B مجموعه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $x^۳ + ۲x^۲ - ۸x = ۰$ و C مجموعه‌ی اعداد فرد که در نامساوی $۱ \leqslant x < ۹$ صدق می‌کند. مجموعه‌ی $A \cap (B \cup C)$ چندعضوی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۲.

$$A = \{۱, ۲, ۴, ۸\} \ , \ B = \{۰, ۲, -۴\} \ , \ C = \{۱, ۳, ۵, ۷\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{۱, ۲, ۴, ۸\} \cap \{۰, ۱, ۲, ۳, -۴, ۵, ۷\} = \{۱, ۲\}$$

۱ـ۲۸ ویژگی‌های اشتراک دو مجموعه:

۱) $A \cap A = A$	۲) $A \cap \phi = \phi$	۳) $A \cap M = A$
۴) $A \cap A' = \phi$	۵) $(A \cap B) \subset A$	۶) $(A \cap B) \subset B$
۷) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$		

مثال اگر $A \subset B$، ثابت کنید $A \cap B' = \phi$.

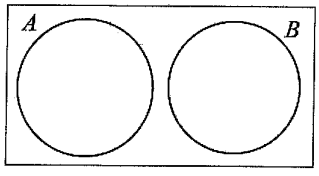
حل

$$A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A$$

$$A \cap B' = (A \cap B) \cap B' = A \cap (B \cap B') = A \cap \phi = \phi$$

دو مجموعه‌ی جدا از هم

۱ـ۲۹ دو مجموعه‌ی غیرتهی را که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند جدا از هم می‌گوییم. اگر A و B جدا از هم باشند، به‌صورت $A \cap B = \phi$ نشان داده می‌شوند. نمایش هندسی آن به‌صورت زیر است:



مثال مجموعه‌ی اعداد فرد و مجموعه‌ی اعداد زوج دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

تفاضل دو مجموعه

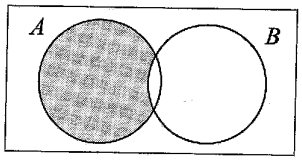
۱ـ۳۰ تفاضل دو مجموعه‌ی A و B که به‌صورت $A-B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که اعضای آن متعلق به A باشد و متعلق به B نباشد، یعنی:

$$A-B=\{x|x\in A \text{ و } x\notin B\}$$

بنابراین همواره

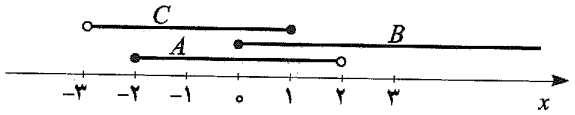
$$x\in(A-B)\iff x\in A \text{ و } x\notin B$$

۱ـ۳۱ در نمودار زیر قسمت هاشورخورده $A-B$ است.



مثال اگر $A=\{x|-۲\leqslant x<۲\}$، $B=\{x|x\geqslant ۰\}$ و $C=\{x|-۳<x\leqslant ۱\}$ و $A,B,C\subset\mathbb{R}$، آنگاه $(A-C)\cap B$ را با علائم ریاضی نمایش دهید.

حل



$$(A-C)\cap B=\{x|۱<x<۲\}\cap\{x|x\geqslant ۰\}=\{x|۱<x<۲\}$$

۱ـ۳۲ ویژگی‌های تفاضل دو مجموعه:

۱) $A-A=\phi$ ۲) $A-\phi=A$ ۳) $\phi-A=\phi$

۴) $M-A=A'$ ۵) $A-M=\phi$ ۶) $A-A'=A$

۷) $\begin{cases}A-B\subset A\\B-A\subset B\end{cases}$ ۸) $A-B=A\cap B'$ ۹) $A\subset B\iff A-B=\phi$

۱۰) $A\cap B=\phi\iff\begin{cases}A-B=A\\B-A=B\end{cases}$

مثال ثابت کنید $A-B=B'-A'$.

حل

$$A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$$

تست اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، حاصل $(A-B)\cup(B-A)\cap(A\cup B)'$ برابر است با:

۱) ϕ ۲) M ۳) $A\cup B$ ۴) $A\cap B$

حل گزینه‌ی ۱.

$$A \cap B = \phi \Longrightarrow A - B = A \ , \ B - A = B$$
$$(A - B) \cup (B - A) \cap (A \cup B)' \Longrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup B)' = \phi$$

جبر مجموعه‌ها

۱ـ۳۳ جبر مجموعه‌ها مجموعه‌ی قوانینی است که بین دو یا چند مجموعه ارتباط برقرار می‌کند. قوانین جبر مجموعه‌ها را در زیر خلاصه می‌کنیم:

۱) قانون جابه‌جایی:

$$A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$$

۲) قانون شرکت‌پذیری:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad , \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

۳) قانون توزیع‌پذیری:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

۴) قانون جذب:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad , \quad A \cap (A \cup B) = A$$

۵) قانون شبه‌جذب:

$$A \cup (A' \cap B) = A \cup B \quad , \quad A \cap (A' \cup B) = A \cap B$$

۶) قانون دمورگان:

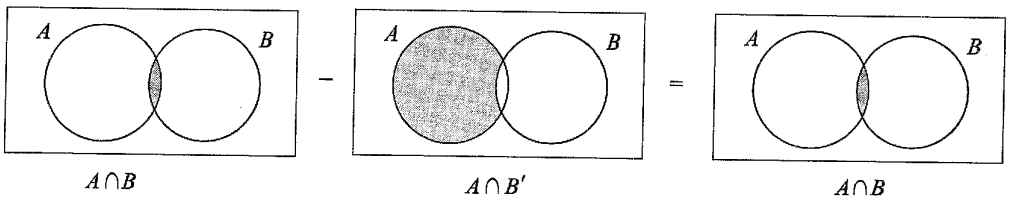
$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

مثال ثابت کنید $(A \cap B) - (A \cap B') = A \cap B$.

حل

$$(A\cap B)-(A\cap B') = (A\cap B)\cap(A\cap B')' = (A\cap B)\cap(A'\cup B)$$
$$= [(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap B] = [(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap B)]$$
$$= (\phi\cap B)\cup(A\cap B) = \phi\cup(A\cap B) = A\cap B$$

راه‌حل دوم. استفاده از نمودار هندسی.



مثال ثابت کنید $A = [A\cap(A'\cup B)]\cup[B'\cap(A\cup B)]$.

حل

$$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B'\cap(A\cup B)] = [(A\cap A')\cup(A\cap B)]\cup[(B'\cap A)\cup(B'\cap B)]$$
$$= [\phi\cup(A\cap B)]\cup[(B'\cap A)\cup\phi]$$
$$= (A\cap B)\cup(B'\cap A) = A\cap(B\cup B')$$
$$= A\cap M = A$$

راه‌حل دوم. با فرض $M=\{۱,۲,۳\}$، $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$ داریم $A'=\{۳\}$ و $B'=\{۱\}$، پس

$$A\cap(A'\cup B)=\{۱,۲\}\cap\{۲,۳\}=\{۲\},\ B'\cap(A\cup B)=\{۱\}\cap\{۱,۲,۳\}=\{۱\}$$
$$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B'\cap(A\cup B)]=\{۲\}\cup\{۱\}=\{۱,۲\}=A$$

تست حاصل عبارت $[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

حل گزینه‌ی ۴. با فرض $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$ داریم

$$A-B=\{۱\},\ B-A=\{۳\},\ A\cap B=\{۲\}$$
$$[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)=(\{۱\}\cup\{۳\})\cup\{۲\}=\{۱,۲,۳\}=A\cup B$$

عدد اصلی مجموعه

۱ـ۳۴ تعداد اعضای یک مجموعه‌ی متناهی مانند A را عدد اصلی آن مجموعه می‌گوییم و با $n(A)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی تعریف‌نشده است.

۱ـ۳۵ از فرمول‌های زیر در حل مسائل حساب استفاده می‌شود:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

مثال درصورتی‌که A و B دومجموعه باشند، $A \cap B = \{۱, ۲, ۳\}$، $n(A) = ۵$ و $n(B) = ۷$، آنگاه عدد اصلی مجموعه‌ی $A \cup B$ را بیابید.

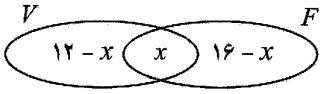
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۵ + ۷ - ۳ = ۹$$

مثال در یک کلاس ۲۰ نفری، ۱۶ نفر فوتبال و ۱۲ نفر والیبال بازی می‌کنند و ۲ نفر هم از ورزش معاف هستند. معین کنید چند نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

حل فرض کنید X مجموعه‌ی بازیکنان مشترک فوتبال و والیبال است و x عضو دارد، یعنی:

$$F \cap V = X \ , \ n(X) = x \ , \ n(V) = ۱۲ \ , \ n(F) = ۱۶$$

پس، $(۱۶ - x)$ نفر فقط فوتبال و $(۱۲ - x)$ نفر فقط والیبال بازی می‌کنند.



چون ۲ نفر از ورزش کردن معاف هستند، پس:

$$(۱۲ - x) + x + (۱۶ - x) + ۲ = ۲۰ \Longrightarrow x = ۱۰$$

تست درصورتی‌که M مرجع و A و B زیرمجموعه‌هایی از M و $n(M) = ۷۰$ و $n(B') = ۳۸$ و $n(A \cap B) = ۱۲$ و $n(A) = ۴۲$ باشند، $n(A' \cap B')$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

حل گزینه‌ی ۲.

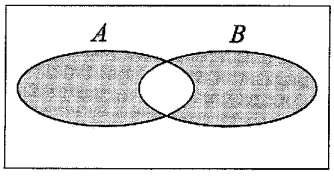
$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(M) - n(A \cup B) = ۷۰ - ۶۲ = ۸$$
$$n(B) = n(M) - n(B') = ۷۰ - ۳۸ = ۳۲$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۴۲ + ۳۲ - ۱۲ = ۶۲$$

تفاضل متقارن دو مجموعه

۱ـ۳۶ تفاضل متقارن دومجموعه‌ی A و B که آن را با $A \triangle B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که اعضایش فقط متعلق به یکی از دو مجموعه‌ی A و B باشد، نه به هردو آن‌ها.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

۱ـ۳۷ در نمودار زیر قسمت هاشورخورده $A \triangle B$ است.



به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$A\triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$A\triangle B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

مثال اگر $A = \{a, b, c, d\}$، $B = \{b, d, e\}$ و $C = \{c, b\}$، آنگاه $(A\triangle B) \cap (B\triangle C)$ چند عضو دارد؟

حل

$$A\triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c\} \cup \{e\} = \{a, e, c\}$$
$$B\triangle C = (B - C) \cup (C - B) = \{d, e\} \cup \{c\} = \{d, e, c\}$$
$$(A\triangle B) \cap (B\triangle C) = \{e, c\} \Longrightarrow n = ۲$$

۱ـ۳۸ ویژگی‌های تفاضل متقارن دو مجموعه:

۱) $A\triangle A = \phi$	۲) $A\triangle \phi = A$	۳) $A\triangle M = A'$
۴) $A\triangle A' = M$	۵) $A\triangle B = B\triangle A$	۶) $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$
۷) $A\triangle B = A\triangle C \Longrightarrow B = C$	۸) $A\triangle B = \phi \Leftrightarrow A = B$	

مثال اگر $A \subset B$، ثابت کنید $A\triangle B = B - A$.

حل

$$A \subset B \Longrightarrow A - B = \phi$$
$$A\triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \phi \cup (B - A) = B - A$$

مثال ویژگی‌های (۳) و (۴) را ثابت کنید.

حل

$$A\triangle M = (A - M) \cup (M - A) = \phi \cup A' = A'$$
$$A\triangle A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = M$$

تست اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، $A\triangle B$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) M ۳) $A \cup B$ ۴) $A \cap B$

حل گزینه‌ی ۳.

$$A \cap B = \phi \Longrightarrow A - B = A\ ,\ B - A = B$$
$$A\triangle B = (A - B) \cup (B - A) = A \cup B$$

اجتماع و اشتراک چند مجموعه

۱ـ۳۹ به‌طورکلی اجتماع و اشتراک n مجموعه‌ی A_1، A_2، A_3، ...، A_n چنین نشان داده می‌شود:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$$

در روابط بالا، مجموعه‌ی $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ را مجموعه‌ی اندیکس می‌گویند.

مثال اگر $A_n = \{x | \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n} \ , \ n \in N\}$، حاصل عبارت $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$ را بیابید.

حل

$$\bigcup_{i=1}^{3} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [1, 2] \cup [\tfrac{1}{2}, 1] \cup [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] = [\tfrac{1}{3}, 2]$$

مثال اگر $A_i = \{x | -i \leqslant x \leqslant i \ , \ i \in Z\}$، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ را به‌دست آورید.

حل

$$\bigcap_{i=1}^{n} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = [-1, 1] \cap [-2, 2] \cap [-3, 3] \cap \cdots = [-1, 1]$$

تست اگر $A_n = [n - 1, n + 1]$، آنگاه مجموعه‌ی $\bigcup_{i=1}^{4} A_n - \bigcap_{i=1}^{3} A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $\{x : 1 \leqslant x \leqslant 5\}$ ۲) $\{x : 0 \leqslant x \leqslant 5\}$

۳) $\{x : 0 \leqslant x \leqslant 5 \ , \ x \neq 2\}$ ۴) $\{x : 1 \leqslant x \leqslant 5 \ , \ x \neq 2\}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_n - \bigcap_{i=1}^{3} A_n = [0, 2] \cup [1, 3] \cup [2, 4] \cup [3, 5] - [0, 2] \cap [1, 3] \cap [2, 4]$$

$$= [0, 5] - \{2\} = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 5 \ , \ x \neq 2\}$$

۱ـ۴۰ قوانین دمورگان برای اجتماع و اشتراک چند مجموعه هم برقرار است، یعنی:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcap_{i=1}^{n} A_i' \ , \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$$

افراز یک مجموعه

۱ـ۴۱ اگر A_1 و A_2 و ... و A_n زیرمجموعه‌های غیرتهی باشند، طوری‌که اشتراک دو به دوی آن‌ها تهی باشد، و اجتماع همه‌ی آن‌ها A باشد، یعنی $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$، می‌گوییم $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ یک افراز (تقسیم) n عضوی A است.

مثال کلیه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید.

حل

یک افراز A	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$
یک افراز A	$\{1\}, \{2, 3\}$
یک افراز A	$\{2\}, \{1, 3\}$
یک افراز A	$\{3\}, \{1, 2\}$
یک افراز A	$\{1, 2, 3\}$

در مجموع پنج افراز دارد.

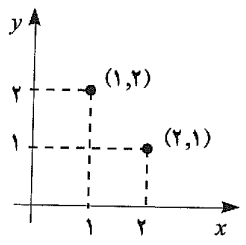
۱ـ۴۲ به‌خاطر بسپاریم اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، داریم

تعداد عضو مجموعه‌ی A	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد افراز A	۱	۲	۵	۱۵	۵۲

ضرب دکارتی دو مجموعه

۱ـ۴۳ زوج مرتب: هر دو شیء مانند a و b تشکیل یک زوج می‌دهند و اگر برای این زوج ترتیب نیز قائل شویم، به آن‌ها زوج مرتب می‌گوییم و به‌صورت (a, b) نمایش می‌دهیم. a را مؤلفه‌ی اول و b را مؤلفه‌ی دوم می‌نامیم.

مثال هر نقطه در صفحه دارای ۲ مختص است که این دو مختص (مؤلفه) با توجه به تعریف زوج مرتب می‌توانند یک زوج مرتب تشکیل دهند، یعنی نقطه‌ی $A\Big|_{y}^{x}$ می‌تواند با زوج مرتب (x, y) متناظر باشد و واضح است که مثلاً $(1, 2) \neq (2, 1)$، زیرا طبق شکل این دو نقطه، دو نقطه‌ی متمایز در صفحه‌اند.



۱ـ۴۴ دو زوج مرتب با یکدیگر مساوی‌اند، اگر و فقط اگر مؤلفه‌های نظیر به‌نظیر با هم برابر باشند، یعنی:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \ , \ b = d$$

مثال هرگاه داشته باشیم $(x + y, x - 2y) = (2x - 1, 1 + y)$، دراین‌صورت x و y را به‌دست آورید.

حل

$$\begin{cases} x+y=۲x-۱ \\ x-۲y=۱+y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x+y=-۱ \\ x-۳y=۱ \end{cases} \Longrightarrow y=۰\ ,\ x=۱$$

۱ـ۴۵ اگر در یک پرانتز سه مؤلفه قرار دهیم و برای آن‌ها ترتیبی درنظر بگیریم، $(a_۱, a_۲, a_۳)$، آن را سه‌تایی مرتب و... به‌همین‌ترتیب nتایی مرتب $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ می‌گوییم.

۱ـ۴۶ حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A و B که با $A \times B$ نمایش داده می‌شود، برابر است با مجموعه‌ای مشتمل بر تمام زوج‌های مرتب (a, b) به‌طوری‌که مؤلفه‌ی اول آن متعلق به A و مؤلفه‌ی دوم آن متعلق به B باشد، یعنی:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A\ ,\ b \in B\}$$

مثال اگر $A = \{x, y\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳\}$، مطلوب است محاسبه‌ی $A \times B$ و $B \times A$.

حل

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A\ ,\ b \in B\} = \{(x,۱), (x,۲), (x,۳), (y,۱), (y,۲), (y,۳)\}$$
$$B \times A = \{(a,b) | a \in B\ ,\ b \in A\} = \{(۱,x), (۱,y), (۲,x), (۲,y), (۳,x), (۳,y)\}$$

مثال اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و B مجموعه‌ی اعداد مضرب ۵ و کوچک‌تر از ۳۶ باشند، مجموعه‌ی $(A \times B) \cap (B \times A)$ چند عضو دارد؟

حل از $(A \times B) \cap (B \times A)$ می‌توان فهمید که اشتراک این دو مجموعه درصورتی است که عضو اول و دوم هم در مجموعه‌ی A وجود داشته باشد و هم در مجموعه‌ی B.

$$A = \{۲, ۴, ۶, \ldots\}\ ,\ B = \{۵, ۱۰, ۱۵, \ldots, ۳۵\}$$
$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(۱۰,۲۰), (۱۰,۳۰), (۲۰,۱۰), (۲۰,۳۰), (۳۰,۱۰), (۳۰,۲۰),$$
$$(۱۰,۱۰), (۲۰,۲۰), (۳۰,۳۰)\} \Longrightarrow n = ۹$$

۱ـ۴۷ هرگاه مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ را داشته باشیم:

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$
$$n[(A \times B) \cap (B \times A)] = [n(A \cap B)]^۲$$
$$n[(A \times B) \cup (B \times A)] = ۲n(A) \cdot n(B) - [n(A \cap B)]^۲$$
$$n[(A \times B) - (B \times A)] = n(A) \cdot n(B) - [n(A \cap B)]^۲$$

تست اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵\}$ باشد، تعداد عضوهای $(A \times B) \cup (B \times A)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۲ ۴) ۲۰

حل گزینه‌ی ۴.

$$n[(A \times B) \cup (B \times A)] = ۲ \times ۴ \times ۳ - (۲)^۲ = ۲۴ - ۴ = ۲۰$$

۱ـ۴۸ حاصل‌ضرب یک مجموعه در خودش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times A = A^2 = \{(a,b) | a \in A \ , \ b \in A\}$$

تست اگر مجموعه‌ی $A = \{۲, ۳\}$، کدام دوتایی مرتب عضو A^2 نیست؟

۱) $(۲, ۲)$ ۲) $(۴, ۹)$ ۳) $(۳, ۲)$ ۴) $(۲, ۳)$

حل گزینه‌ی ۲.

$$A^2 = A \times A = \{(۲, ۲), (۲, ۳), (۳, ۲), (۳, ۳)\}$$

۱ـ۴۹ ویژگی‌های ضرب دکارتی دو مجموعه:

۱) برای هر مجموعه‌ی دلخواه A : $A \times \phi = \phi \times A = \phi$

۲) تنها مجموعه‌ای که حاصل‌ضرب دکارتی در خودش برابر با خودش خواهد شد، مجموعه‌ی تهی است، یعنی $\phi \times \phi = \phi$

۳) در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$

۴) همواره داریم: $(A \times B) = \phi \iff A = \phi$ یا $B = \phi$

۵) همواره داریم: $n(A \times B) = ۰ \iff A = \phi$ یا $B = \phi$

۶) شرط لازم و کافی برای آن‌که $A \times B = B \times A$ آن است که $A = B$ یا $A = \phi$ یا $B = \phi$.

۷) اگر زوج مرتب (a, b) متعلق به $A \times B$ باشد، فقط می‌توان نتیجه گرفت که $a \in A$ و $b \in B$. اما، درصورتی‌که (a, b) در $A \times B$ نباشد، در سه حالت ممکن است این اتفاق رخ دهد و برعکس، یعنی:

$$(a,b) \notin (A \times B) \iff \begin{cases} a \notin A \ , \ b \in B \\ a \in A \ , \ b \notin B \\ a \notin A \ , \ b \notin B \end{cases}$$

۸) عمل ضرب دکارتی روی اشتراک، اجتماع و تفاضل از طرف چپ و از طرف راست توزیع‌پذیر است. یعنی:

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\ (B \cap C) \times A &= (B \times A) \cap (C \times A) \\ A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ (B \cup C) \times A &= (B \times A) \cup (C \times A) \\ A \times (B - C) &= (A \times B) - (A \times C) \\ (B - C) \times A &= (B \times A) - (C \times A) \end{aligned}$$

تست‌های فصل ۱

۱. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $x \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ۲) $\{x\} \subset \{\{x\}, \{x, y\}\}$

۳) $\{\phi\} \subset \{۲, \{۱\}\}$ ۴) $\{\} \in \{\phi\}$

۲. اگر تعداد اعضای مجموعه‌ی B، ۳ عدد کم‌تر از تعداد اعضای A و حاصل‌ضرب تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A در تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی B، برابر ۳۲ باشد، تعداد اعضای مجموعه‌ی A کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۳. اگر $A - B = A \cup B$، آنگاه کدام درست است؟

۱) $A = B$ ۲) $B = A'$ ۳) $A = \phi$ ۴) $B = \phi$

۴. اگر $B - C = \phi$، آنگاه کدام نادرست است؟

۱) $B \cup C = C$ ۲) $C' \subset B'$ ۳) $C \cap B = B$ ۴) $C \subset B$

۵. اگر $B - A = B$، دراین‌صورت حاصل $A - [B - (A - B)]$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

۶. اگر $A \subset B$ و $B \subset C$، دراین‌صورت حاصل $[(C' \cap A') \cap (B' \cap A')]$ کدام است؟

۱) A ۲) A' ۳) C' ۴) B'

۷. متمم مجموعه‌ی $[(A - B) - A] \cup [(A \cap B) - A]$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) M ۳) A' ۴) A

۸. مجموعه‌ی $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C)$ برابر است با:

۱) C ۲) A ۳) B ۴) ϕ

۹. مجموعه‌ی $[A \cup (A \cap B)]' \cap [B \cap (B \cup A)]' \cap [(A \cup A) - A]$ برابر است با:

۱) ϕ ۲) M ۳) A ۴) B

۱۰. اگر A مجموعه‌ی اعداد دورقمی و $B = \{۷k | k \in A\}$، آنگاه مجموعه‌ی توانی $(B \cap A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۱. مجموعه‌ی $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup C') \cap (A \cup B')$ برابر است با:

۱) A ۲) $A \cup B$ ۳) B ۴) C

۱۲. اگر $P = \{a, b, c, d, e\}$ و $Q = \{b, c, e, f, g, h\}$ و $R = \{a, b, e, g\}$ باشد، $(P \cap Q) \triangle (P \cap R)$ برابر است با:

۱) $\{f, h\}$ ۲) $\{c, g\}$ ۳) $\{a, c\}$ ۴) $\{a, c, d\}$

۱۳. مجموعه‌ی A دارای ۱۴ و مجموعه‌ی B دارای ۱۷ و مجموعه‌ی $A \cap B$ دارای ۵ عضو هستند. تفاضل متقارن A و B چند عضو دارد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۴. اگر $n \in N$ و $A_n = \{x : \frac{۱}{n} < x \leqslant \frac{۲}{n}\}$، آنگاه $\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_n$ کدام است؟

۱) $(۰, ۱]$ ۲) $[۰, ۱)$ ۳) $(۰, ۲]$ ۴) $[۰, ۲)$

۱۵. در $\{a\} = \{(۲x - ۵), (۲۵ - ۳x)\}$، a چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳}$ ۲) ۷ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۶

۱۶. اگر مجموعه‌ی E از مجموعه‌ی F یک عضو بیش‌تر داشته باشد و اختلاف زیرمجموعه‌های آن‌ها ۳۲ باشد، مجموعه‌ی F چندعضوی است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۷. اگر به‌ازای هر دو مجموعه‌ی A و B داشته باشیم $(A \cup B) \subset (A \cap B')$، آنگاه کدام یک از رابطه‌های زیر همواره برقرار است؟

۱) $A = \phi$ ۲) $A' = B$ ۳) $B = \phi$ ۴) $A = B'$

۱۸. اگر $A = \{x | ۰ < x \leqslant ۳, x \in \mathbb{R}\}$ و $B = \{x | -۱ < x \leqslant ۱, x \in \mathbb{R}\}$ باشد، حاصل $(A \cup B)'$ کدام است؟

۱) $\{x | x \leqslant -۱$ یا $x > ۳\}$ ۲) $\{x | -۱ \leqslant x \leqslant ۳\}$
۳) $\{x | x < -۱$ یا $x \geqslant ۳\}$ ۴) $\{x | -۱ < x < ۳\}$

۱۹. اگر $A_k = \{x | \frac{۱}{k} \leqslant x \leqslant \frac{۲}{k}, k \in N, x \in \mathbb{R}\}$ باشد، $\bigcup_{k=۱}^{\infty} A_k$ کدام است؟

۱) $(۰, ۲)$ ۲) $(۰, ۲]$ ۳) $[۰, ۱)$ ۴) $[۰, ۲]$

۲۰. A مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۸، B مجموعه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $x^۳ + ۲x^۲ - ۸x = ۰$ و C مجموعه‌ی اعداد فرد که در نامساوی $۱ \leqslant x < ۹$ صدق می‌کند. کدام تساوی نادرست است؟

۱) $A - B = \{۱, ۴, ۸\}$ ۲) $A \cap (B \cap C) = \phi$
۳) $A \cap (B \cup C) = \{۱\}$ ۴) $A - (B - C) = \{۱, ۴, ۸\}$

۲۱. اگر $A = \{x | ۱ \leqslant x \leqslant ۲\}$ و $B = \{y | ۰ \leqslant y \leqslant ۱\}$ باشد و $B \subset \mathbb{R}$ و A، آنگاه $A \times B$

۱) دارای عضوی نیست. ۲) دارای عضو صفر نیست.
۳) دارای دو عضو است. ۴) دارای بی‌نهایت عضو است.

۲۲. هرگاه $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{a, b, d, e\}$ باشد، تعداد عضوهای $(A \times B) \cap (B \times A)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۴

۲۳. مجموعه‌ی $(C - E) \cap (A - B) \cap (A - C) \cap (B - D)$ برابر است با:

۱) ϕ ۲) M ۳) $A \cap B$ ۴) $E \cap D$

۲۴. حاصل $(A \cup B' \cup C') \cap [A \cup (B \cap C)]$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) A ۳) $A - B$ ۴) B

۲۵. حاصل $[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $A-B'$ ۳) $A'\cap B'$ ۴) $A\cup B$

۲۶. حاصل $(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap C)\cup(B'\cap C)$ کدام است؟

۱) C ۲) A ۳) B ۴) $(A\cap B\cap C)'$

۲۷. $(B-A)\cup(A-B')$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) A ۳) $A\cup B$ ۴) B

۲۸. حاصل $[A\cup(A\cap B)]-[B\cap(B\cup A)]$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $A\cup B$ ۴) $A\cup B'$

۲۹. در یک کلاس ۴۰ نفری، ۳۲ نفر در درس ریاضی و ۲۴ نفر در درس آمار تجدید آورده‌اند و فقط ۴ نفر قبول شده‌اند. چند نفر در هر دو درس تجدید شده‌اند؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۳۰. هرگاه سه‌تایی مرتب $(2b, 4, a-2)$ و $(a-3, a+b, c-1)$ برابر باشند، a و b و c کدام است؟

۱) $c=-4, b=5, a=1$ ۲) $c=4, b=-1, a=5$

۳) $c=3, b=2, a=-1$ ۴) $c=4, b=1, a=-5$

۳۱. مجموعه‌ی $\{(a,b)|a+b=6\}\cap\{(a,b)|3a+b=6\}$ برابر است با:

۱) $\{(0,6)\}$ ۲) $\{(6,0)\}$ ۳) $\{\ \}$ ۴) $\{(3,3)\}$

۳۲. اگر $A=\{x\}$ باشد، مجموعه‌ی A^2 کدام است؟

۱) $\{x^2\}$ ۲) $\{x,x\}$ ۳) $\{(x,x)\}$ ۴) $\{(x)\}$

۳۳. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی و $A-B=A$، آنگاه $B\cap A'$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) A ۲) B ۳) M ۴) ϕ

۳۴. حاصل $[(A-B')\cup A]'$ کدام است؟

۱) B' ۲) A' ۳) A ۴) B

۳۵. اگر $A=\{1,2,3\}$ و $(A-B)\cup(B-A)=\{1,4\}$ باشد، مجموعه‌ی B کدام است؟

۱) $\{2,3,4\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{1,4\}$ ۴) $\{1,2,3,4\}$

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۱

۱. گزینه‌ی ۴.

گزینه‌ی ۱ غلط است، زیرا x عضو مجموعه نیست.

گزینه‌ی ۲ غلط است، زیرا $\{x\}$ عضو مجموعه است.

گزینه‌ی ۳ غلط است، زیرا $\{\ \}$ زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است، اما $\{\phi\}$ مجموعه‌ی تهی نیست.

۲. گزینه‌ی ۲.. اگر تعداد اعضای مجموعه‌های A و B را به‌ترتیب x و y بنامیم، داریم:

$$y = x - ۳\ ,\ ۲^x \times ۲^y = ۳۲ \Longrightarrow ۲^{x+y} = ۲^۵ \Longrightarrow x + y = ۵$$

$$\begin{cases} x - y = ۳ \\ x + y = ۵ \end{cases} \Longrightarrow ۲x = ۸ \Longrightarrow x = ۴$$

۳. گزینه‌ی ۴.

$$A - B = A \cup B \Longrightarrow A \cap B' = A \cup B \Longrightarrow (A \cap B') \cap B = (A \cup B) \cap B \Longrightarrow \phi = B$$

۴. گزینه‌ی ۴.

$$B - C = \phi \Longrightarrow B \subset C \Longrightarrow C' \subset B'\ ,\ B \cup C = C\ ,\ C \cap B = B$$

۵. گزینه‌ی ۱.

$$B - A = B \Longrightarrow A \cap B = \phi \Longrightarrow \text{جدا از هم هستند } B, A \Longrightarrow A - B = A$$
$$A - [B - (A - B)] = A - (B - A) = A - B = A$$

۶. گزینه‌ی ۳.

$$A \subset B \Longrightarrow B' \subset A' \Longrightarrow B' \cap A' = B'$$
$$A \subset B, B \subset C \Longrightarrow A \subset C \Longrightarrow C' \subset A' \Longrightarrow C' \cap A' = C'$$
$$(C' \cap A') \cap (B' \cap A') = C' \cap B' \xrightarrow{C' \subset B'} = C'$$

۷. گزینه‌ی ۲. با فرض $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۲, ۳\}$

$$A - B = \{۱\} \Longrightarrow (A - B) - A = \{۱\} - \{۱, ۲\} = \phi$$
$$A \cap B = \{۲\} \Longrightarrow (A \cap B) - A = \{۲\} - \{۱, ۲\} = \phi$$
$$[(A - B) - A] \cup [(A \cap B) - A] = \phi \cup \phi = \phi \xrightarrow{\text{متمم}} \phi' = M$$

۸. گزینه‌ی ۱.

$$[(A \cap B) \cap C] \cup [(A' \cap C) \cup (B' \cap C)] = [(A \cap B) \cap C] \cup [C \cap (A' \cup B')]$$
$$= C \cap [(A \cap B) \cup (A' \cup B')] = C \cap [(A \cap B) \cup (A \cap B)'] = C \cap M = C$$

۹. گزینه‌ی ۱.

$$A \cup (A \cap B) = A\ ,\ B \cap (B \cup A) = B\ ,\ (A \cup A) - A = A - A = \phi$$
$$[A \cup (A \cap B)]' \cap [B \cap (B \cup A)]' \cap [(A \cup A) - A] = (A' \cap B') \cap \phi = \phi$$

۱۰. گزینه‌ی ۴.

$$A = \{۱۰, ۱۱, \ldots, ۹۹\}$$
$$B = \{۷ \times ۱۰, ۷ \times ۱۱, ۷ \times ۱۲, \ldots, ۷ \times ۹۹\}$$
$$A \cap B = \{۷ \times ۱۰, ۷ \times ۱۱, ۷ \times ۱۲, ۷ \times ۱۳, ۷ \times ۱۴\}$$

یعنی $A \cap B$ دارای ۵ عضو است، پس $۲^۵ = ۳۲$ زیرمجموعه دارد. بنابراین مجموعه‌ی توانی $A \cap B$ دارای ۳۲ عضو است.

۱۱. گزینه‌ی ۱.

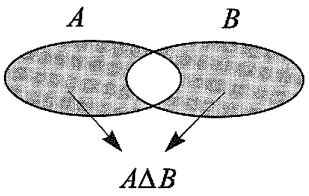
$$[(A \cup B) \cup C] \cap [(A \cup B) \cup C'] \cap (A \cup B') = [(A \cup B) \cup (C \cap C')] \cap (A \cup B')$$
$$= [(A \cup B) \cup \phi] \cap (A \cup B') = (A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \phi = A$$

۱۲. گزینه‌ی ۳.

$$A = P \cap Q = \{b, c, e\}\ ,\ B = P \cap R = \{a, b, e\}$$
$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{a, b, c, e\} - \{b, e\}$$
$$A \triangle B = \{a, c\}$$

۱۳. گزینه‌ی ۳.

$$n(A \triangle B) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B) - ۲n(A \cap B)$$
$$n(A \triangle B) = n(A) + n(B) - ۲n(A \cap B) = ۱۴ + ۱۷ - ۲ \times ۵ = ۲۱$$



۱۴. گزینه‌ی ۳.

$$\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_n = A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n = (۱, ۲] \cup (\frac{۱}{۲}, ۱] \cup (\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}) \cup (\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}) \cup \cdots = (۰, ۲]$$

۱۵. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} ۲x - ۵ = a \\ ۲۵ - ۳x = a \end{cases} \Longrightarrow ۲x - ۵ = ۲۵ - ۳x \Longrightarrow x = ۶ \Longrightarrow ۱۲ - ۵ = a \Longrightarrow a = ۷$$

۱۶. گزینه‌ی ۴.

$$n(E) = x, n(F) = x - ۱, ۲^x - ۲^{x-۱} = ۳۲ \Longrightarrow ۲^x(۱ - \frac{۱}{۲}) = ۲^۵ \Longrightarrow ۲^x = ۲^۵ \times ۲$$
$$\Longrightarrow x = ۶ \Longrightarrow n(F) = ۵$$

۱۷. گزینه‌ی ۳.

$$A = \phi \Longrightarrow B \subset \phi$$
$$A' = B \Longrightarrow M \subset A$$
$$B = \phi \Longrightarrow A \subset A$$
$$A = B' \Longrightarrow (A \cup B) \subset A$$

درنتیجه تنها گزینه‌ی ۳ همواره صادق است.

۱۸. گزینه‌ی ۱.

$$A \cup B = \{x| -۱ < x \leqslant ۳\} \Longrightarrow (A \cup B)' = \{x|x \leqslant -۱ \text{ یا } x > ۳\}$$

۱۹. گزینه‌ی ۲.

$$A_۱ = \{x|۱ \leqslant x \leqslant ۲\} = [۱, ۲]$$
$$A_۲ = \{x|\frac{۱}{۲} \leqslant x \leqslant ۱\} = [\frac{۱}{۲}, ۱] \quad \Longrightarrow \bigcup_{k=۱}^{\infty} A_k = A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots = (۰, ۲]$$
$$A_۳ = \{x|\frac{۱}{۳} \leqslant x \leqslant \frac{۲}{۳}\} = [\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}]$$

۲۰. گزینه‌ی ۳.

$$A = \{۱, ۲, ۴, ۸\} \ ، \ B = \{۰, ۲, -۴\} \ ، \ C = \{۱, ۳, ۵, ۷\}$$
$$A \cap (B \cup C) = \{۱, ۲\}$$

۲۱. گزینه‌ی ۴.

۲۲. گزینه‌ی ۴.

$$n[(A \times B) \cap (B \times A)] = [n(A \cap B)]^۲ = ۲^۲ = ۴$$

۲۳. گزینه‌ی ۱.

$$(C - E) \cap (A - B) \cap (A - C) \cap (B - D) = (C \cap E') \cap (A \cap B') \cap (A \cap C') \cap (B \cap D')$$
$$= (C \cap C') \cap \cdots = \phi \cap \cdots = \phi$$

۲۴. گزینه‌ی ۲.

$$(A \cup B' \cup C') \cap [A \cup (B \cap C)] = [A \cup (B \cap C)'] \cap [A \cup (B \cap C)]$$
$$= A \cup [(B \cap C)' \cap (B \cap C)] = A \cup \phi = A$$

۲۵. گزینه‌ی ۴.

$$[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) = [(A \cap B') \cup (B \cap A')] \cup (A \cap B)$$
$$= (A \cap B') \cup (A \cap B)] \cup (B \cap A') = [A \cap (B \cup B')] \cup (B \cap A')$$
$$= (A \cap M) \cup (B \cap A') = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A')$$
$$= (A \cup B) \cap M = A \cup B$$

۲۶. گزینه‌ی ۱.

$$(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap C)\cup(B'\cap C)=(A\cap B\cap C)\cup[(A'\cup B')\cap C]$$
$$=[(A\cap B)\cup(A'\cup B')]\cap C=[(A\cap B)\cup(A\cap B)']\cap C=M\cap C=C$$

۲۷. گزینه‌ی ۴.

$$(B-A)\cup(A-B')=(B\cap A')\cup(A\cap B)=B\cap(A'\cup A)=B\cap M=B$$

۲۸. گزینه‌ی ۲.

$$[A\cup(A\cap B)]-[B\cap(B\cup A)]=[(A\cap M)\cup(A\cap B)]-[(B\cup\phi)\cap(B\cup A)]$$
$$=[A\cap(M\cup B)]-[B\cup(\phi\cap A)]=(A\cap M)-(B\cup\phi)=A-B=A\cap B'$$

۲۹. گزینه‌ی ۱.. تعداد کل تجدیدی‌های کلاس (۳۶ = ۴ − ۴۰) نفر است، بنابراین:

$$n(E\cup M)=n(E)+n(M)-n(E\cap M)\Longrightarrow ۳۶=۳۲+۲۴-n(E\cap M)\Longrightarrow n(E\cap M)=۲۰$$

۳۰. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases}۳-a=۲b\\ a+b=۴\\ c-۱=a-۲\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-a-۲b=-۳\\ a+b=۴\\ c-a=-۱\end{cases}\Longrightarrow b=-۱,a=۵,c=۴$$

۳۱. گزینه‌ی ۱. ازطریق جاگذاری گزینه‌ها آسان‌تر است.

۳۲. گزینه‌ی ۳. زیرا $A^۲=A\times A$ و به‌صورت زوج مرتب است.

۳۳. گزینه‌ی ۲.

$$A-B=A\Longrightarrow A\cap B=\phi\Longrightarrow B\cap A'=B-A=B$$

۳۴. گزینه‌ی ۲.

$$[(A-B')\cup A]'=[(A\cap B)\cup A]'=[(A\cap B)\cup(A\cap M)]'=[A\cap(B\cup M)]'=(A\cap M)'=A'$$

۳۵. گزینه‌ی ۱. با توجه به جواب‌ها گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مدیریت

۱. اگر A و B دو مجموعه باشند، متمم مجموعه‌ی $(A \cup B)$ یعنی $(A \cup B)'$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) $(A' \cap B')$ ۲) $(A' \cup B')$ ۳) $(A \cap B)'$ ۴) $(A - B)'$

۲. اگر A و B دو مجموعه باشند، $B - (A - B)$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) A ۲) B ۳) $A - B$ ۴) $B - A$

۳. اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد، $A^۵ = A \times A \times A \times A \times A$ چند عضو دارد؟ [۱۳۷۱]

۱) ۲۴۳ ۲) ۱۲۵ ۳) ۷۲۹ ۴) ۴۵

۴. اگر مجموعه‌ی جهانی $U = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$ و $A = \{۲, ۴, ۶\}$ و $B = \{۱, ۳, ۷\}$ مفروض است، $(A \cap B) \cup A'$ چند عضو دارد؟ [۱۳۷۲]

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۵. متمم مجموعه‌ی $A \cap B \cap (A - B)$ کدام مجموعه است؟ [۱۳۷۳]

۱) A' ۲) B' ۳) ϕ ۴) M

۶. اگر $A = \{x | ۱ \leqslant x \leqslant ۲\}$ و $B = \{x | ۲ \leqslant x < ۵\}$ بوده و $A, B \subset N$ باشند، $B - A$ چند عضو دارد؟ [۱۳۷۴]

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۷. اگر $A_i = \{x | -i < x < i, i \in N\}$ باشد، $\bigcap_{i=۱}^{n} A_i$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $A_۱$ ۲) A_n ۳) $A_n - A_۱$ ۴) $A_۱ - A_n$

۸. مجموعه‌ی $(A \cap B) \cap (A - B)'$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) A ۲) B ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

۹. اگر به مجموعه‌ی A دو عضو اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن چند برابر می‌شود؟ [۱۳۷۶]

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۱۰. اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشد، حاصل $(A' - B)'$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) A ۲) B ۳) $A \cup B$ ۴) $A \cap B$

۱۱. اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشد، مجموعه $A - (A \cap B)$، کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $A \cap B$ ۲) $A \cap B'$ ۳) $B \cap A'$ ۴) $(A \cup B)'$

۱۲. اگر A و B و C سه مجموعه باشند، به‌طوری که $A \subset B \subset C$ آنگاه $[(A \cap B) \cup C] \cap (A \cup B)$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $A \cap B$ ۲) $A \cup B$ ۳) B ۴) C

۱۳. اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل عبارت $A - [(A \cap B) \cup A]$ کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) A ۲) B ۳) $A - B$ ۴) ϕ

۱۴. مجموعه‌ی $A' \cap [(A \cap B) \cup (A - B)]$، برابر کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) A ۲) B ۳) ϕ ۴) $A \cup B$

۱۵. یک مجموعه n عنصر مجزا دارد، به این مجموعه ۳ عنصر متمایز از عناصر مجموعه به آن اضافه شده، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی جدید، چند برابر زیرمجموعه‌های، مجموعه‌ی اولیه است؟ ۱۳۸۲

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۶. از بین دانشجویان فارغ‌التحصیل رشته مدیریت یک دانشگاه، ۳۰ نفر در آزمون رشته مدیریت و ۲۰ نفر در آزمون رشته حسابداری و ۱۰ نفر در هر دو آزمون شرکت کرده‌اند. چند نفر از این دانشجویان لااقل در یکی از این دو رشته شرکت کرده‌اند؟ ۱۳۸۳

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۵۵ ۴) ۶۰

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۱. قانون دمورگان است.

۲. گزینه‌ی ۲.

$$B - (A - B) = B - (A \cap B') = B \cap (A \cap B')' = B \cap (A' \cup B)$$
$$= (B \cup \phi) \cap (B \cup A') = B \cup (\phi \cap A') = B \cup \phi = B$$

راه‌حل دوم: با فرض $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۲, ۳\}$:

$$B - (A - B) = \{۲, ۳\} - (\{۱, ۲\} - \{۲, ۳\}) = \{۲, ۳\} - \{۱\} = \{۲, ۳\} = B$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$A^۵ \text{ تعداد اعضای} = n(A)^۵ = ۳^۵ = ۲۴۳$$

۴. گزینه‌ی ۲.

$$(A \cap B) \cup A' = \{\ \} \cup \{۱, ۳, ۵, ۷\} = \{۱, ۳, ۵, ۷\}$$

۵. گزینه‌ی ۴.

$$[A \cap B \cap (A - B)]' = [A \cap B \cap (A \cap B')']' = [(A \cap A) \cap (B \cap B')]' = (A \cap \phi)' = \phi' = M$$

۶. گزینه‌ی ۴.

$$A = \{۱, ۲\}, B = \{۲, ۳, ۴\} \Longrightarrow B - A = \{۳, ۴\}$$

۷. گزینه‌ی ۱. خواهیم داشت: $A_۱ \subset A_۲ \subset \cdots \subset A_n$ بنابراین $A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n = A_۱$ یا $\bigcap_{i=۱}^{n} A_i = A_۱$.

۸. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cap(A-B)' &= (A\cap B)\cap(A\cap B')' = (A\cap B)\cap(A'\cup B)\\ &= [(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap B]\\ &= [(A\cap A')\cap B]\cup[(B\cap B)\cap A] = (\phi\cap B)\cup(B\cap A)\\ &= \phi\cup(B\cap A) = A\cap B\end{aligned}$$

راه‌حل دوم: با فرض $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$ و $M=\{۱,۲,۳\}$:

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cap(A-B)' &= (\{۱,۲\}\cap\{۲,۳\})\cap(\{۱,۲\}-\{۲,۳\})'\\ &= \{۲\}\cap\{۱\}' = \{۲\}\cap\{۲,۳\} = \{۲\} = A\cap B\end{aligned}$$

۹. گزینه‌ی ۳.

$$۲^k = ۲^۲ = ۴$$

۱۰. گزینه‌ی ۳.

$$(A'-B)' = (A'\cap B')' = (A')'\cup(B')' = A\cup B$$

۱۱. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{aligned}A-(A\cap B) &= A\cap(A\cap B)' = A\cap(A'\cup B') = (A\cap A')\cup(A\cap B')\\ &= \phi\cup(A\cap B') = A\cap B'\end{aligned}$$

راه‌حل دوم: با فرض $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$ داریم:

$$A-(A\cap B) = \{۱,۲\}-(\{۱,۲\}\cap\{۲,۳\}) = \{۱,۲\}-\{۲\} = \{۱\} = A\cap B'$$

۱۲. گزینه‌ی ۳.

$$A\subset B\subset C\Longrightarrow\begin{cases}A\subset B\Longrightarrow A\cap B=A\ ,\ A\cup B=B\\ B\subset C\Longrightarrow B\cap C=B\ ,\ B\cup C=C\\ A\subset C\Longrightarrow A\cap C=A\ ,\ A\cup C=C\end{cases}$$

بنابراین:

$$[\underbrace{(A\cap B)}_{A}\cup C]\cap\underbrace{(A\cup B)}_{B} = \underbrace{(A\cup C)}_{C}\cap B = C\cap B = B$$

۱۳. گزینه‌ی ۴.

$$A-[(A\cap B)\cup A] = A-A = A\cap A' = \phi$$

۱۴. گزینه‌ی ۳.

$$[(A \cap B) \cup (A - B)] \cap A' = [(A \cap B) \cup (A \cap B')] \cap A' = [A \cap (B \cup B')] \cap A'$$
$$= (A \cap M) \cap A' = A \cap A' = \phi$$

۱۵. گزینه‌ی ۳.

$$۲^k = ۲^۳ = ۸$$

۱۶. گزینه‌ی ۱.

$$n(M \cup A) = n(M) + n(A) - n(M \cap A) = ۳۰ + ۲۰ - ۱۰ = ۴۰$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

حسابداری

۱. اگر $A \subset B$ باشد، مجموعه‌ی $(A - B)' \cap A$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ϕ ۲) $A \cap B'$ ۳) A ۴) B'

۲. اگر مجموعه‌ی $M = \{۱, ۰, ۲\}$، کدام سه‌تایی عضو $M^۳$ نیست؟ [۱۳۷۱]

۱) $(۱, ۰, ۰)$ ۲) $(۱, ۰, ۸)$ ۳) $(۱, ۰, ۲)$ ۴) $(۰, ۲, ۰)$

۳. مجموعه‌ی $(A - B) \cap A \cap B$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) A ۲) B ۳) ϕ ۴) $A - B$

۴. اگر $A = \{x | x > ۲\}$ و $B = \{x | x \leqslant -۲\}$ باشد و $A, B \subset \mathbb{R}$، $A' \cap B'$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $\{x | x > -۲\}$ ۲) $\{x | x < -۲\}$ ۳) $\{x | x < -۲$ یا $x > ۲\}$ ۴) $\{x | -۲ < x \leqslant ۲\}$

۵. اگر مجموعه‌ی جهانی $U = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰\}$ و A مجموعه‌ی اعداد فرد و B مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مجموعه $(A - B)$، چند زیرمجموعه دارد؟ [۱۳۷۳]

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۶. مجموعه‌ی $A \cup [A \cap B \cap (A - B)]$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) A ۲) B ۳) ϕ ۴) $A - B$

۷. اگر داشته باشیم $A \subset B \subset C$، حاصل عبارت $[(A \cap B) \cup C] \cap (A \cup B)$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) B ۲) $A \cap C$ ۳) $A \cup C$ ۴) A

۸. اگر $A = \{x | ۲ \leqslant x \leqslant ۴\}$ و $B = \{x | ۳ \leqslant x < ۶\}$ بوده و $A, B \subset N$ باشد، $A \times (A - B)$ چند عضو دارد؟ [۱۳۷۴]

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

۹. اگر M و N دو مجموعه باشند، $(M \cup N) \cap N'$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) N' ۲) M ۳) $M \cap N'$ ۴) $(M \cup N)'$

۱۰. اگر تعداد عناصر مجموعه‌های A و B و $A \cap B$ به‌ترتیب ۵ و ۷ و ۳ باشد، تعداد عناصر $A \cup B$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۱. مجموعه‌ی $(A \cup B) \cap (A \cup B')$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) A ۲) B ۳) $A \cup B$ ۴) $A \cup B'$

۱۲. اگر به مجموعه‌ی A، سه عضو اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن چند برابر می‌شود؟ [۱۳۷۶]

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۸

۱۳. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، $(A - B)'$ با کدام مجموعه برابر است؟ [۱۳۷۷]

۱) $A \cup B'$ ۲) $A' \cup B$ ۳) $A' \cup B'$ ۴) $A' \cap B'$

۱۴. اجتماع دو مجموعه A و B، ۲۰ عضو دارد. به مجموعه A، ۸ عضو جدید اضافه کردیم به اشتراک آنها ۶ عضو اضافه شد. اجتماع مجموعه B و مجموعه‌ی جدید A چند عضو دارد؟ [۱۳۷۷]

۱) ۲۲ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

۱۵. اگر داشته باشیم $n(A) = ۱۰$ (تعداد عناصر مجموعه A) و $n(B) = ۱۵$ و $n(A \cup B) = ۱۹$ باشد، $n(A \cap B)$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

۱۶. اگر A و B دو مجموعه باشند، $A' \cap [A \cup (B \cap A)]$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) ϕ

۱۷. اگر A و B و C سه مجموعه و $A \subset B$ باشد، حاصل $[(B' \cap A) \cap C] \cup C'$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) B' ۲) A ۳) C' ۴) B

۱۸. مجموعه‌های A و B و C مفروضند، به‌طوری که $A \subset B \subset C$ است، حاصل $C' \cap (A' \cap B')$ کدام است؟ [۱۳۸۰]

۱) A' ۲) B' ۳) C' ۴) ϕ

۱۹. در مجموعه‌ی جهانی $U = \{x | x \in N \ , \ x \leqslant ۱۵\}$ اگر A مجموعه‌ی اعداد فرد و B مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مجموعه‌ی $A \cap B$ چند زیرمجموعه دارد؟ [۱۳۸۱]

۱) ۱۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۰. کدام یک از روابط زیر **نادرست** است؟ [۱۳۸۲]

۱) $A \cup (A - B) = A$ ۲) $(A - B) = A \cap B'$

۳) $(A \cup B)' \cup A = A \cup B'$ ۴) $B \cap (B - A) = A \cup B$

۲۱. اگر داشته باشیم $A \subset B \subset C$، آنگاه $(A \cup B) \cap C - A \cap B$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) B ۲) C ۳) ϕ ۴) $B \cap A'$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۳.

$$A \subset B \Longrightarrow A - B = \phi, (A - B)' \cap A = \phi' \cap A = M \cap A = A$$

۲. گزینه‌ی ۲. هر یک از مؤلفه‌های سه‌تایی داده شده باید عضو M باشند، در صورتی که $۸ \notin M$.

۳. گزینه‌ی ۳.

$$(A - B) \cap A \cap B = (A \cap B') \cap A \cap B = (A \cap A) \cap (B \cap B') = A \cap \phi = \phi$$

۴. گزینه‌ی ۴.

$$A' = \{x | x \leqslant ۲\}, B' = \{x | x > -۲\} \Longrightarrow A' \cap B' = \{x | -۲ < x \leqslant ۲\}.$$

۵. گزینه‌ی ۳. داریم $A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ و $B = \{۳, ۶, ۹\}$ بنابراین:

$$A - B = \{۱, ۵, ۷\} \Longrightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = ۲^۳ = ۸$$

۶. گزینه‌ی ۱.

$$[A\cap B\cap(A-B)]\cup A=[A\cap B\cap(A\cap B')]\cup A=[(A\cap A)\cap(B\cap B')]\cup A$$
$$=(A\cap\phi)\cup A=\phi\cup A=A$$

۷. گزینه‌ی ۱.

$$A\subset B\subset C\Longrightarrow\begin{cases}A\cap B=A, C\cap B=B\\ A\cup B=B, A\cup C=C\end{cases}$$

$$[(\underbrace{A\cap B}_{A})\cup C]\cap(\underbrace{A\cup B}_{B})=(\underbrace{A\cup C}_{C})\cap B=C\cap B=B$$

۸. گزینه‌ی ۱. داریم $A=\{۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ بنابراین:

$$(A-B)\times A=\{۲\}\times\{۲,۳,۴\}=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴)\}$$

۹. گزینه‌ی ۳.

$$(M\cup N)\cap N'=(N'\cap M)\cup(N'\cap N)=(N'\cap M)\cup\phi=N'\cap M=M\cap N'$$

۱۰. گزینه‌ی ۲.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۵+۷-۳=۹$$

۱۱. گزینه‌ی ۱.

$$(A\cup B)\cap(A\cup B')=A\cup(B\cap B')=A\cup\phi=A$$

۱۲. گزینه‌ی ۴.

$$۲^۴=۲^۳=۸$$

۱۳. گزینه‌ی ۲.

$$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup(B')'=A'\cup B$$

۱۴. گزینه‌ی ۱. اگر مجموعه‌ی A^* را مجموعه‌ی جدیدی از A بدانیم، آنگاه:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۲۰$$
$$n(A^*\cup B)=[n(A)+۸]+n(B)-[n(A\cap B)+۶]$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+۸-۶=۲۰+۸-۶=۲۲$$

۱۵. گزینه‌ی ۱.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$۱۹=۱۰+۱۵-n(A\cap B)\Longrightarrow n(A\cap B)=۶$$

۱۶. گزینه‌ی ۴. قانون جذب $A \cup (B \cap A) = A$ پس:

$$A' \cap [A \cup (B \cap A)] = A' \cap A = \phi$$

۱۷. گزینه‌ی ۳.

$$B' \cap A = A \cap B' = A - B \overset{A \subset B}{\longrightarrow} A - B = \phi$$
$$[(B' \cap A) \cap C] \cup C' = (\phi \cap C) \cup C' = \phi \cup C' = C'$$

۱۸. گزینه‌ی ۳.

$$A \subset B \subset C \Longrightarrow \begin{cases} A \subset B \Longrightarrow B' \subset A' \Longrightarrow A' \cap B' = B' \\ B \subset C \Longrightarrow C' \subset B' \Longrightarrow B' \cap C' = C' \end{cases}$$

بنابراین:

$$C' \cap (\underbrace{A' \cap B'}_{B'}) = C' \cap B' = C'$$

۱۹. گزینه‌ی ۴.

$$A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵\} \ , \ B = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵\}$$
$$A \cap B = \{۳, ۹, ۱۵\} \Longrightarrow A \cap B \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } = ۲^n = ۲^۳ = ۸$$

۲۰. گزینه‌ی ۴.

$$B \cap (B - A) = B \cap (B \cap A') = B \cap A'$$

۲۱. گزینه‌ی ۴.

$$A \subset B \subset C \Longrightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ B \cap C = B \end{cases}$$

$$(A \cup B) \cap C - A \cap B = (\underbrace{A \cup B}_{B}) \cap (\underbrace{C \cap B}_{B}) \cap A' = B \cap A'$$

فصل ۲

بسط دوجمله‌ای

دوجمله‌ای

۲ـ۱ عبارت دوجمله‌ای عبارتی است که شامل دو جمله باشد و با یک علامت مثبت یا منفی به هم ارتباط یافته باشد. به این ترتیب $(x+y)^{۲}$، $(۲a-b)^{۳}$ و $(۱+\sqrt{x})^{۱۰}$ نمونه‌هایی از عبارت‌های دوجمله‌ای هستند.

۲ـ۲ اگر a و b دو عدد حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^{۲} + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$$

که در آن، $\binom{n}{r}$ تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء است، بسط دوجمله‌ای نامیده می‌شود.

مثال بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ به‌ازای $n=۳$ و $n=۴$ به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}(a+b)^{۳} &= a^{۳} + \binom{۳}{۱}a^{۲}b + \binom{۳}{۲}ab^{۲} + b^{۳}\\ &= a^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} + b^{۳}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^{۴} &= a^{۴} + \binom{۴}{۱}a^{۳}b + \binom{۴}{۲}a^{۲}b^{۲} + \binom{۴}{۳}ab^{۳} + b^{۴}\\ &= a^{۴} + ۴a^{۳}b + ۶a^{۲}b^{۲} + ۴ab^{۳} + b^{۴}\end{aligned}$$

با دقت در بسط‌های بالا می‌توانیم نظام موجود در $(a+b)^n$ را حدس بزنیم.

ویژگی‌های بسط دوجمله‌ای

۲ـ۳ تعداد جمله‌های بسط برابر با $(n+۱)$ است.

۲ـ۴ جمله‌ها از a^n شروع و به b^n ختم می‌شود.

۲ـ۵ در هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل، از توان a یک واحد کم و به توان b یک واحد اضافه می‌شود.

۲ـ۶ مجموع درجات a و b در هر جمله برابر با n است.

۲ـ۷ ضریب هر جمله برابر است با حاصل ضرب توان a در جمله‌ی قبل در ضریب آن تقسیم بر تعداد جمله‌های نوشته‌شده تا آن جمله.

مثال بسط دوجمله‌ای $(a+b)^{۵}$ را بنویسید.

حل

$$(a+b)^{۵} = a^{۵} + \frac{۵\times ۱}{۱}a^{۴}b + \frac{۴\times ۵}{۲}a^{۳}b^{۲} + \frac{۳\times ۱۰}{۳}a^{۲}b^{۳} + \frac{۲\times ۱۰}{۴}ab^{۴} + b^{۵}$$
$$= a^{۵} + ۵a^{۴}b + ۱۰a^{۳}b^{۲} + ۱۰a^{۲}b^{۳} + ۵ab^{۴} + b^{۵}$$

۲ـ۸ جمله‌های متقارن نسبت به a و b ضریب یکسانی دارند (جمله‌هایی که توان‌های a و b در آن‌ها عوض شده است، متقارن هستند، مانند $a^{۲}b^{۳}$ و $a^{۳}b^{۲}$).

مثال جمله‌ای از بسط $(a+b)^{۶}$ به‌صورت $۱۵a^{۴}b^{۲}$ است، ضریب جمله‌ی $a^{۲}b^{۴}$ در این بسط چه‌قدر است؟

حل چون این دو جمله نسبت به a و b متقارن هستند، پس ضریب $a^{۲}b^{۴}$ برابر ۱۵ است.

۲ـ۹ جملات بسط $(a-b)^{n}$ یک‌درمیان مثبت و منفی هستند، به قسمی که جملات فرد مثبت و جملات زوج منفی است.

مثال بسط دوجمله‌ای $(a-b)^{۵}$ را بنویسید.

حل

$$(a-b)^{۵} = a^{۵} - ۵a^{۴}b + ۱۰a^{۳}b^{۲} - ۱۰a^{۲}b^{۳} + ۵ab^{۴} - b^{۵}$$

۲ـ۱۰ برای یافتن مجموع ضرایب جملات بسط، کافی است به‌جای حروف به‌کاررفته عدد ۱ قرار دهیم.

مثال مجموع ضرایب بسط $\left(\frac{x}{۳} - \frac{۴}{۳x}\right)^{۷}$ را بیابید.

حل

$$\text{مجموع ضرایب بسط} = \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۴}{۳}\right)^{۷} = (-۱)^{۷} = -۱$$

مثال مجموع ضرایب بسط $(۳a+b)^{n}$ برابر با ۲۵۶ است، تعداد جملات این بسط را بیابید.

حل

$$\text{مجموع ضرایب بسط} = ۲۵۶ \Longrightarrow (۳+۱)^{n} = ۲۵۶ \Longrightarrow ۲^{۲n} = ۲^{۸} \Longrightarrow n = ۴$$
$$\text{تعداد جملات بسط} = n+۱ = ۴+۱ = ۵$$

تست مجموع ضرایب بسط $(a-۲b-۳c)^{۳}$ کدام است؟

۱) -۴۸ ۲) -۶۴ ۳) -۱۲۵ ۴) -۱۱۴

حل گزینه‌ی ۲.

$$\text{مجموع ضرایب بسط} = (۱-۲-۳)^{۳} = (-۴)^{۳} = -۶۴$$

تست اگر مجموع ضرایب بسط $(۲x+y)^{۲n}$ از مجموع ضرایب بسط $(۲x-y)^{n}$ به‌اندازه‌ی ۸۰ واحد بیشتر باشد، n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل گزینه‌ی ۱.

$$\text{مجموع ضرایب بسط } (۲x+y)^{۲n} = (۲+۱)^{۲n} = ۳^{۲n}$$
$$\text{مجموع ضرایب بسط } (۲x-y)^{n} = (۲-۱)^{n} = ۱^{n}$$

بنابراین داریم

$$۳^{۲n} = ۸۰ + ۱^{n} \Longrightarrow ۳^{۲n} = ۳^{۴} \Longrightarrow n = ۲$$

۲ـ۱۱ در بسط $(a-b)^{n}$ اگر مجموع ضرایب بسط را A بنامیم و مجموع ضرایب بسط را در حالتی که تمام علامت‌های منفی را به مثبت تغییر دهیم B فرض کنیم، داریم:

$$\text{مجموع ضرایب مثبت بسط} = \frac{A+B}{۲}$$
$$\text{مجموع ضرایب منفی بسط} = \frac{A-B}{۲}$$

مثال مجموع ضرایب مثبت بسط $(۳x-۲y)^{۴}$ را بیابید.

حل با قرار دادن $x=y=۱$ داریم $A=(۳-۲)^{۴}=۱$ و با مثبت فرض کردن علامت‌ها در بسط $(۳x+۲y)^{۴}$ با قرار دادن $x=y=۱$ داریم $B=(۳+۲)^{۴}=۶۲۵$. بنابراین مجموع ضرایب مثبت بسط برابر با $\frac{۶۲۵+۱}{۲}=۳۱۳$ است.

جمله‌ی $(r+۱)$اُم

۲ـ۱۲ جمله‌ی $(r+۱)$اُم در بسط دوجمله‌ای از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\text{جمله‌ی } (r+۱)\text{اُم} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^{r}$$

r یک واحد کم‌تر از شماره‌ی جمله‌ی مورد سؤال است.

مثال جمله‌ی سوم در بسط $(۳x-y)^{۵}$ را بیابید.

حل

$$\text{جمله‌ی سوم}, \ r=۳-۱=۲, \ n=۵ = \binom{۵}{۲}(۳x)^{۵-۲}(-y)^{۲}$$
$$= \frac{۵!}{۲!۳!}(۲۷x^{۳})(y^{۲}) = ۲۷۰x^{۳}y^{۲}$$

مثال اگر جمله‌ی سوم بسط $\left(\sqrt[۳]{x}+\frac{۱}{x}\right)^{۵}$ برابر $\frac{۵}{۲}$ باشد، x را بیابید.

حل

$$\text{جمله‌ی سوم}=\frac{۵}{۲}\Longrightarrow\binom{۵}{۲}(\sqrt[۳]{x})^{۳}\left(\frac{۱}{x}\right)^{۲}=\frac{۵}{۲}\Longrightarrow\frac{۵!}{۲!۳!}(x)\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)=\frac{۵}{۲}$$
$$\Longrightarrow\frac{۱۰}{x}=\frac{۵}{۲}\Longrightarrow x=۴$$

مثال در بسط $(۱+x)^{۱۰}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{۱۰}$، ضریب جمله‌ی $x^{۴}$ را بیابید.

حل

$$(۱+x)^{۱۰}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{۱۰}=(۱+x)^{۱۰}\left(\frac{x+۱}{x}\right)^{۱۰}=\frac{(۱+x)^{۲۰}}{x^{۱۰}}$$

چون هر جمله‌ی صورت بر $x^{۱۰}$ تقسیم می‌شود، لذا:

$$\text{ضریب } x^{۴} \text{ در این بسط}=\text{ضریب } x^{۱۴} \text{ صورت}=\binom{۲۰}{۱۴}=۳۸۷۶۰$$

تست ضریب $x^{۲}$ در بسط دوجمله‌ای $\left(۲x-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۸}$ کدام است؟

۱) ۱۲۱۰ ۲) ۱۰۲۰ ۳) ۱۱۱۰ ۴) ۱۱۲۰

حل گزینه‌ی ۴.

$$\text{هر جمله‌ی بسط}=\binom{۸}{r}(۲x)^{۸-r}\left(-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{r}=\binom{۸}{r}(۲x)^{۸-r}(-x^{-\frac{۱}{۲}})^{r}$$

r را طوری تعیین می‌کنیم که توان x برابر ۲ باشد:

$$۸-r-\frac{۱}{۲}r=۲\Longrightarrow r=۴$$
$$\text{ضریب } x^{۲}=\binom{۸}{۴}(۲x)^{۴}\left(-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۴}=۱۱۲۰x^{۲}$$

۱۳-۲ در بعضی از مسائل، جملات a و b طوری است که پس از بسط، یک جمله‌ی بسط x ندارد. این جمله را فاقد x یا مستقل از x یا عدد ثابت گویند. بنابراین جمله‌ی مستقل از x، جمله‌ای است که در آن توان x برابر صفر باشد.

مثال در بسط $\left(۴x-\frac{۱}{x}\right)^{۴}$ جمله‌ی مستقل از x را بیابید.

حل

$$\text{هر جمله‌ی بسط}=\binom{۴}{r}(۴x)^{۴-r}\left(-\frac{۱}{x}\right)^{r}=\binom{۴}{r}(۴x)^{۴-r}(-x^{-۱})^{r}$$

r را طوری تعیین می‌کنیم که توان x برابر صفر باشد.

$$۴-r-r=۰ \Longrightarrow r=۲$$

$$\text{جمله‌ی مستقل از } x = \binom{۴}{۲}(۴x)^۲\left(-\frac{۱}{x}\right)^۲ = \frac{۴!}{۲!۲!}\times ۱۶ = ۹۶$$

تست اگر جمله‌ی هفتم در بسط $\left(\frac{۱}{\sqrt{x^m}}+x^۲\right)^{۱۰}$ مستقل از x باشد، m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

حل گزینه‌ی ۲.

$$\text{جمله‌ی هفتم} = \binom{۱۰}{۶}\left(\frac{۱}{\sqrt{x^m}}\right)^۴(x^۲)^۶ = \binom{۱۰}{۶}\left(x^{-\frac{m}{۲}}\right)^۴x^{۱۲}$$

بنابراین

$$-۲m+۱۲=۰ \Longrightarrow m=۶$$

۲ـ۱۴ اگر در تست یا مسأله‌ای بپرسند در این بسط، کدام جمله دارای x^t است، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$t = (r)\times(\text{توان دومین حرف}) + (n-r)\times(\text{توان اولین حرف})$$

از رابطه‌ی فوق r به‌دست می‌آید. درنتیجه جمله‌ی $(r+۱)$ام دارای x^t است.

مثال در بسط $\left(x^۳-\frac{۱}{x}\right)^{۱۲}$ چندمین جمله مستقل از x است؟

حل

$$(x^۳-\frac{۱}{x})^{۱۲} = (x^۳-x^{-۱})^{۱۲}$$

$$۳(۱۲-r)-۱(r)=۰ \Longrightarrow r=۹ \Longrightarrow \text{جمله‌ی دهم}$$

مثال در بسط $(x^۲-۲x+۱)^۴$، ضریب $x^۷$ را بیابید.

حل با فرض $a = ۲x+۱$ دراین‌صورت $(a-x^۲)^۴$

$$۱(۴-r)+۲(r)=۷ \Longrightarrow r=۳ \Longrightarrow \text{جمله‌ی چهارم}$$

$$\text{جمله‌ی چهارم} = \binom{۴}{۳}(۱+۲x)(-x^۲)^۳ \Longrightarrow \text{ضریب } x^۷ = \binom{۴}{۳}(۲)(-۱) = -۸$$

تست در بسط $\left(۲\sqrt{x}+\frac{۱}{۴x\sqrt{x}}\right)^۶$ چندمین جمله دارای $x^{-۳}$ است؟

۱) جمله‌ی چهارم ۲) جمله‌ی سوم ۳) جمله‌ی پنجم ۴) جمله‌ی دوم

حل گزینه‌ی ۱.

$$\left(۲\sqrt{x}+\frac{۱}{۴x\sqrt{x}}\right)^{۶}=\left(۲x^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}\right)^{۶}$$

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)(۶-r)-\frac{۳}{۲}(r)=-۳\Longrightarrow ۳-\frac{۱}{۲}r-\frac{۳}{۲}r=-۳\Longrightarrow r=۳\Longrightarrow \text{جمله‌ی چهارم}$$

تست در بسط $(۲x-x^{۳})^{۵}$، ضریب $x^{۱۱}$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۲۰ ۳) -۲۰ ۴) -۴۰

حل گزینه‌ی ۴.

$$۱(۵-r)+۳(r)=۱۱\Longrightarrow r=۳\Longrightarrow \text{جمله‌ی چهارم}$$

$$\text{جمله‌ی چهارم}=\binom{۵}{۳}(۲x)^{۲}(-x^{۳})^{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}(۴x^{۲})(-x^{۹})=-۴۰x^{۱۱}$$

۲ـ۱۵ بزرگ‌ترین ضریب بسط دوجمله‌ای، متعلق به جمله‌ی وسط بسط یا دو جمله‌ی وسط بسط است.

۱) اگر n زوج باشد، شماره‌ی جمله‌ی وسط برابر با $\frac{n}{۲}+۱$ است.

۲) اگر n فرد باشد، شماره‌ی جمله‌ی وسط برابر با $\left(\frac{n}{۲}+۱\right)\pm\frac{۱}{۲}$ است.

مثال بزرگ‌ترین ضریب در بسط $(x+y)^{۱۰}$ را بیابید.

حل

$$\frac{n}{۲}+۱=\frac{۱۰}{۲}+۱=۶\Longrightarrow \text{جمله‌ی ششم}$$

$$\text{جمله‌ی ششم}=\binom{۱۰}{۵}x^{۱۰-۵}y^{۵}=\frac{۱۰!}{۵!۵!}x^{۵}y^{۵}=۲۵۲x^{۵}y^{۵}$$

۲ـ۱۶ اگر ضریب جمله‌های pاُم و qاُم در بسط $(a+b)^{n}$ با هم برابر باشند، آنگاه $p+q=n+۲$.

مثال در بسط $(a+b)^{n}$، ضرایب جمله‌های هفتم و هشتم برابرند، جمله‌ی یازدهم را بیابید.

حل

$$۷+۸=n+۲\Longrightarrow n=۱۳$$

$$\text{جمله‌ی یازدهم}=\binom{۱۳}{۱۰}(a)^{۱۳-۱۰}(b)^{۱۰}=\frac{۱۳!}{۱۰!۳!}a^{۳}b^{۱۰}=۲۸۶a^{۳}b^{۱۰}$$

۲ـ۱۷ در برخی از مسائل، a و b جملاتی رادیکالی با فرجه‌های مختلفند و می‌پرسند در این بسط چندجمله‌ی گویا وجود دارد.

$$\left(\underbrace{\sqrt[p]{x}}_{a}+\underbrace{\sqrt[q]{y}}_{b}\right)^{n}$$

فرض می‌کنیم $p > q$:

توان‌هایی که عامل $\sqrt[p]{x}$ را گویا می‌کنند، می‌نویسیم، برای این کار مضارب p را از ۰ تا n می‌نویسیم. از آن جا که در هر جمله از بسط مجموع توان‌ها در تمام جملات برابر n است، توان‌های عامل دیگر $(\sqrt[q]{y})$ را با توجه به توان عامل اول می‌نویسیم و سپس توان‌هایی که دو جمله را گویا می‌کنند مشخص می‌کنیم.

مثال بسط دوجمله‌ای $(\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۵]{y})^{۲۳}$ چند جمله‌ی گویا دارد؟

حل

توان‌های گویاکننده‌ی عامل $\sqrt[۵]{y}$: ۰ , ۵ , ۱۰ , ۱۵ , ۲۰

توان‌های عامل $\sqrt[۳]{x}$: ۲۳ , (۱۸) , ۱۳ , ۸ , (۳)

۳ و ۱۸ مضارب ۳ هستند، پس این بسط دارای دو جمله‌ی گویاست.

تست مجموع ضرایب جملات گویا در بسط $(۳x + \sqrt[۳]{x})^{۵}$ که متغیر x در آن عدد گویاست، کدام است؟

۱) ۳۷۲ ۲) ۲۷۳ ۳) ۱۲۸ ۴) ۳۳۳

حل گزینه‌ی ۴. جملات اول و چهارم جملات گویای بسط هستند.

$$\binom{۵}{۰}(۳x)^{۵}(\sqrt[۳]{x})^{۰} + \binom{۵}{۳}(۳x)^{۲}(\sqrt[۳]{x})^{۳} = ۲۴۳x^{۵} + ۹۰x^{۳}$$

$$\text{مجموع ضرایب} = ۲۴۳ + ۹۰ = ۳۳۳$$

۲ـ۱۸ تعداد تبدیلات n تایی از n شیء که دارای $n_۱$ شیء و $n_۲$ شیء و ... و n_k شیء تکراری نظیر هم باشند، به‌قسمی‌که $n = n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k$ از دستور $\dfrac{n!}{n_۱! \times n_۲! \times \ldots \times n_k!}$ قابل‌محاسبه است. در بسط $(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k)^n$ ضریب جمله‌ی $a_۱^{n_۱} \cdot a_۲^{n_۲} \cdot \ldots \cdot a_k^{n_k}$ از دستور فوق محاسبه می‌شود.

مثال در بسط عبارت $(a - ۲b + ۳c)^{۶}$ ضریب عددی جمله‌ی $a^{۳}b^{۲}c$ را به‌دست آورید.

حل

$$(a - ۲b + ۳c)^{۶} = [a + (-۲b) + (۳c)]^{۶}$$

$$\text{جمله‌ی موردنظر} = \frac{۶!}{۳!۲!۱!}(a)^{۳}(-۲b)^{۲}(۳c) = ۷۲۰a^{۳}b^{۲}c$$

پس، ضریب عددی جمله‌ی $a^{۳}b^{۲}c$ برابر ۷۲۰ است.

۲ـ۱۹ تعداد جملات در بسط $(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k)^n$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\binom{k - ۱ + n}{n}$$

مثال تعداد جملات در بسط $(a+b+c)^{۷}$ را بیابید.

حل

$$n=۷\ ,\ k=۳ \Longrightarrow \text{تعداد جملات} = \binom{۳-۱+۷}{۷} = \binom{۹}{۷} = \frac{۹!}{۷!۲!} = ۳۶$$

تست تعداد جملات در بسط $(x_۱+x_۲+x_۳)^{n}$ برابر ۲۸ است، n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

حل گزینه‌ی ۴.

$$\binom{k-۱+n}{n} = ۲۸ \Longrightarrow \binom{۳-۱+n}{n} = ۲۸ \Longrightarrow \binom{n+۲}{n} = ۲۸$$

$$\Longrightarrow \frac{(n+۲)!}{n!(n+۲-n)!} = ۲۸ \Longrightarrow (n+۲)(n+۱) = ۵۶ \Longrightarrow n = ۶$$

تست‌های فصل ۲

۱. در بسط $(x+y)^{۸}$ مجموع ضریب‌های جمله‌های سوم تا هشتم کدام است؟

۱) ۲۴۶ ۲) ۲۴۲ ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۴۴

۲. در بسط $\left(a\sqrt[۳]{\frac{۱}{a}}+\frac{۱}{\sqrt[۷]{a^{۲}}}\right)^{۱۰}$ جمله‌ی مستقل از a جمله‌ی چندم است؟

۱) هفتم ۲) هشتم ۳) نهم ۴) ششم

۳. در بسط دوجمله‌ای $\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^{۹}$ ضریب جمله‌ی شامل $\sqrt[۳]{x^{۴}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳۵}{۸}$ ۳) $\frac{۶۳}{۹}$ ۴) $\frac{۶۳}{۸}$

۴. در بسط $(a+b)^{n}$، اگر ضریب جمله‌ی نهم مساوی ضریب جمله‌ی بیستم باشد، بزرگ‌ترین ضریب جمله‌ی این بسط کدام است؟

۱) $C_{۲۷}^{۱۱}$ ۲) $C_{۲۷}^{۱۲}$ ۳) $C_{۲۷}^{۱۳}$ ۴) $C_{۲۷}^{۱۵}$

۵. در بسط $\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{۲}(x+۱)^{۳}$ ضریب x چه‌قدر از ضریب $\frac{۱}{x}$ بیشتر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶. در بسط $x^{۸}+۸x^{۷}y+۲۸x^{۶}y^{۲}+۵۶x^{۵}y^{۳}+\ldots$، ضریب جمله‌ی پنجم کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۷۰ ۳) ۱۱۲ ۴) ۲۸

۷. ضریب جمله‌ی وسط بسط $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۲۵۲ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۲۰

۸. در بسط $(a+b)^{۱۱}$ ضریب جمله‌ی سوم با ضریب کدام جمله برابر است؟

۱) نهم ۲) هشتم ۳) دهم ۴) هفتم

۹. بسط دوجمله‌ای $(\sqrt[۵]{۳}+\sqrt[۷]{۲})^{۱۰}$ چند جمله‌ی گویا دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۰. اگر a و b اعداد طبیعی و جمله‌ی سوم بسط $(a+b)^{۵}$ برابر ۷۲۰ باشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۷

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۲

۱. گزینه‌ی ۱.

$$(x+y)^{۸} = x + ۸x^{۷}y + \cdots + y^{۸}$$

$$\text{مجموع تمامی ضریب‌ها} = (۱+۱)^{۸} = ۲۵۶$$

$$\text{مجموع ضریب‌های جملات اول و دوم و نهم} = ۱ + ۸ + ۱ = ۱۰$$

$$\text{مجموع ضریب‌های جمله‌های سوم تا هشتم} = ۲۵۶ - ۱۰ = ۲۴۶$$

۲. گزینه‌ی ۲.

$$\left(a\sqrt[۲]{\frac{۱}{a}} + \frac{۱}{\sqrt[۷]{a^{۲}}}\right)^{۱۰} = \left(a^{\frac{۲}{۳}} + a^{-\frac{۲}{۷}}\right)^{۱۰}$$

$$\text{جمله‌ی هشتم} \Longrightarrow \frac{۲}{۳}(۱۰-r) - \frac{۲}{۷}r = ۰ \Longrightarrow r = ۷ \Longrightarrow$$

۳. گزینه‌ی ۴.

$$\left(\sqrt[۳]{x^{۲}} - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^{۹} = \left(x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}\right)^{۹}$$

$$\frac{۲}{۳}(۹-r) - \frac{۱}{۲}(r) = \frac{۴}{۳} \Longrightarrow r = ۴$$

$$\text{ضریب } \sqrt[۳]{x^{۴}} = \binom{۹}{۴}\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۴} = \frac{۹!}{۴!۵!} \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۶۳}{۸}$$

۴. گزینه‌ی ۳.

$$p + q = n + ۲ \Longrightarrow ۹ + ۲۰ = n + ۲ \Longrightarrow n = ۲۷$$

$$\text{جملات چهاردهم و پانزدهم بزرگ‌ترین ضریب را دارند} \Longrightarrow \left(\frac{n}{۲} + ۱\right) \pm \frac{۱}{۲} = \left(\frac{۲۷}{۲} + ۱\right) \pm \frac{۱}{۲} = ۱۴, ۱۵$$

$$\text{ضریب جمله‌ی چهاردهم} = \binom{۲۷}{۱۳} = \binom{۲۷}{۱۴}$$

۵. گزینه‌ی ۴.

$$(۱+x)^{۳}\left(\frac{x+۱}{x}\right)^{۲} = \frac{(۱+x)^{۵}}{x^{۲}} = \frac{۱ + \binom{۵}{۱}x + \binom{۵}{۲}x^{۲} + \binom{۵}{۳}x^{۳} + \binom{۵}{۴}x^{۴} + x^{۵}}{x^{۲}}$$

$$\text{ضریب } x^{۳} \text{ صورت} - \text{ضریب } x \text{ صورت} = \binom{۵}{۳} - \binom{۵}{۱} = ۱۰ - ۵ = ۵$$

۶. گزینه‌ی ۲.

$$\text{جمله‌ی پنجم} = \frac{۵ \times ۵۶}{۴}x^{۴}y^{۴} = ۷۰x^{۴}y^{۴}$$

۷. گزینه‌ی ۱. بسط داده شده دارای $n+1$ یعنی ۱۱ جمله است. بنابراین جمله‌ی وسط آن جمله‌ی ششم است.

$$\text{جمله‌ی وسط} = \frac{n}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6$$

$$\text{جمله‌ی ششم} = \binom{10}{5} \left(\frac{a}{x}\right)^5 \left(\frac{x}{a}\right)^5 = \frac{10!}{5!5!} \left(\frac{a}{x}\right)^0 = 252$$

۸. گزینه‌ی ۳.

$$p+q = n+2 \Longrightarrow 3+q = 11+2 \Longrightarrow q = 10$$

۹. گزینه‌ی ۱.

۷ , ۰ : توان‌های گویاکننده‌ی عامل $\sqrt[7]{2}$

۳ , (۱۰) : توان‌های عامل $\sqrt[5]{3}$

۱۰. گزینه‌ی ۱.

$$\text{جمله‌ی سوم} = 720 \Longrightarrow \binom{5}{2} a^3 b^2 = 720 \Longrightarrow 10 a^3 b^2 = 720 \Longrightarrow a^3 b^2 = 72$$

$$\Longrightarrow a^3 b^2 = 2^3 \times 3^2 \Longrightarrow a = 2\,,\ b = 3 \Longrightarrow a+b = 5$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

مدیریت

۱. در بسط $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۸}$ عدد ثابت کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۸۰ ۲) ۷۰ ۳) ۶۴ ۴) ۶۰

۲. ضریب $x^{۲}$ در بسط دوجمله‌ای $\left(x+\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۸}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۴۶ ۲) ۷۰ ۳) ۷۲ ۴) ۸۰

۳. در بسط $\left(x-\frac{۱}{۲x}\right)^{۸}$ مجموع ضرایب کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $\frac{۱}{۲۵۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶۴}$ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

۴. در بسط عبارت $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۸}$ ضریب $x^{۲}$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) ۴۸ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۵. در بسط $\left(\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{۱}{x}\right)^{۹}$، ضریب جمله‌ای که فاقد x است، کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $-\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۲۱}{۴}$

۶. تعداد جملات بسط $(a+b+c)^{۵}$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۲.

$$\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۸}=(x+x^{-۱})^{۸}$$

$$(۱)(۸-r)+(-۱)(r)=۰ \Longrightarrow -۲r=-۸ \Longrightarrow r=۴$$

$$\text{عدد ثابت}=\binom{۸}{۴}(x)^{۴}\left(\frac{۱}{x}\right)^{۴}=\binom{۸}{۴}=\frac{۸!}{۴!۴!}=۷۰$$

۲. گزینه‌ی ۲.

$$\left(x+\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۸}=(x+x^{-\frac{۱}{۲}})^{۸}$$

$$(۱)(۸-r)+\left(-\frac{۱}{۲}\right)(r)=۲\Longrightarrow -\frac{۳}{۲}r=-۶\Longrightarrow r=۴$$

$$x^{۲}\text{ ضریب}=\binom{۸}{۴}(x)^{۴}\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۴}=\frac{۸!}{۴!۴!}x^{۲}=۷۰x^{۲}$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$\text{مجموع ضرایب}=\left(۱-\frac{۱}{۲\times ۱}\right)^{۸}=\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)^{۸}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۸}=\frac{۱}{۲۵۶}$$

۴. گزینه‌ی ۲.

$$\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۸}=(x+x^{-۱})^{۸}$$

$$(۱)(۸-r)+(-۱)(r)=۲\Longrightarrow -۲r=-۶\Longrightarrow r=۳$$

$$x^{۲}\text{ ضریب}=\binom{۸}{۳}(x)^{۵}\left(\frac{۱}{x}\right)^{۳}=\frac{۸!}{۳!۵!}x^{۲}=۵۶x^{۲}$$

۵. گزینه‌ی ۳.

$$\left(\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{۱}{x}\right)^{۹}=\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}-x^{-۱}\right)^{۹}$$

$$(۲)(۹-r)+(-۱)(r)=۰\Longrightarrow -۳r=-۱۸\Longrightarrow r=۶$$

$$x\text{ جمله‌ی‌فاقد}=\binom{۹}{۶}\left(\frac{x^{۲}}{۲}\right)^{۳}\left(-\frac{۱}{x}\right)^{۶}=\frac{۹!}{۶!۳!}\times\frac{۱}{۸}=۸۴\times\frac{۱}{۸}=\frac{۲۱}{۲}$$

۶. گزینه‌ی ۴.

$$\binom{k-۱+n}{n}=\binom{۳-۱+۵}{۵}=\binom{۷}{۵}=\frac{۷!}{۵!۲!}=۲۱$$

حسابداری

۱. مجموع ضرایب بسط $\left(۲x - \frac{۴}{۳x}\right)^۶$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{۶۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳۲}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۶۴}{۷۲۹}$

۲. ضریب جمله مستقل از x در بسط $\left(x^۲ - \frac{۱}{x}\right)^۶$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) -۲۰ ۲) -۱۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۳. ضریب جمله $x^۴$ در بسط دوجمله‌ای $\left(۲x - \frac{۱}{۴}\right)^۸$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $\frac{۳۵}{۸}$ ۲) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۷}{۳۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۴. ضریب جمله $x^۲$ در بسط دوجمله‌ای $\left(x - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^۸$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $-\frac{۳۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۳۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳۵}{۸}$

۵. در بسط $\left(x - \frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۱۰}$، ضریب جمله شامل $x^۴$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

۶. ضریب $x^۳$ در بسط دوجمله‌ای $\left(۲x^۲ - \frac{۱}{۳\sqrt{x^۳}}\right)^{۱۲}$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $C_{۱۲}^۶\left(\frac{۲}{۳}\right)^۶$ ۲) $C_{۱۲}^۳\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳$ ۳) $C_{۱۲}^۳\frac{۲^۳}{۳^۹}$ ۴) $C_{۱۲}^۹\frac{۲^۹}{۳^۳}$

۷. مجموع ضرایب در بسط $(a+b+c)^۵$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۴۳

۸. در بسط دوجمله‌ای $\left(x - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^۶$، جمله فاقد x برابر کدام است؟ [۱۳۸۴]

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۴.

$$\text{مجموع ضرایب بسط} = \left(۲ - \frac{۴}{۳}\right)^۶ = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۶ = \frac{۶۴}{۷۲۹}$$

۲. گزینه‌ی ۳.

$$\left(x^۲ - \frac{۱}{x}\right)^۶ = (x^۲ - x^{-۱})^۶$$

$$(۲)(۶-r) + (-۱)(r) = ۰ \Longrightarrow -۳r = -۱۲ \Longrightarrow r = ۴$$

$$\text{جمله‌ی مستقل از } x = \binom{۶}{۴}(x^۲)^۲\left(\frac{۱}{x}\right)^۴ = \frac{۶!}{۴!۲!} = ۱۵$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$(۱)(۸-r) + (۰)(r) = ۴ \Longrightarrow r = ۴$$

$$\text{ضریب جمله‌ی } x^۴ = \binom{۸}{۴}(۲x)^۴\left(-\frac{۱}{۴}\right)^۴ = \frac{۸!}{۴!۴!} \times ۱۶ \times \frac{۱}{۲۵۶}x^۴ = \frac{۳۵}{۸}x^۴$$

۴. گزینه‌ی ۴.

$$\left(x - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^۸ = \left(x - \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}\right)^۸$$

$$(۱)(۸-r) + \left(-\frac{۱}{۲}\right)(r) = ۲ \Longrightarrow -\frac{۳}{۲}r = -۶ \Longrightarrow r = ۴$$

$$\text{ضریب جمله‌ی } x^۲ = \binom{۸}{۴}(x)^۴\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^۴ = \frac{۸!}{۴!۴!} \times \frac{۱}{۱۶}x^۲ = \frac{۳۵}{۸}x^۲$$

۵. گزینه‌ی ۳.

$$\left(x - \frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۱۰} = (x - x^{-\frac{۱}{۲}})^{۱۰}$$

$$(۱)(۱۰-r) + \left(-\frac{۱}{۲}\right)(r) = ۴ \Longrightarrow -\frac{۳}{۲}r = -۶ \Longrightarrow r = ۴$$

$$\text{ضریب جمله‌ی } x^۴ = \binom{۱۰}{۴}(x)^۶\left(-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^۴ = \frac{۱۰!}{۴!۶!}x^۴ = ۲۱۰x^۴$$

۶. گزینه‌ی ۱.

$$\left(۲x^۲ - \frac{۱}{۳\sqrt{x^۳}}\right)^{۱۲} = \left(۲x^۲ - \frac{۱}{۳}x^{-\frac{۳}{۲}}\right)^{۱۲}$$

$$(۲)(۱۲-r) + \left(-\frac{۳}{۲}\right)(r) = ۳ \Longrightarrow -\frac{۷}{۲}r = -۲۱ \Longrightarrow r = ۶$$

$$\text{ضریب جمله‌ی } x^۳ = \binom{۱۲}{۶}(۲x^۲)^۶\left(\frac{۱}{۳\sqrt{x^۳}}\right)^۶ = \binom{۱۲}{۶}\left(\frac{۲}{۳}\right)^۶x^۳$$

۷. گزینه‌ی ۴.

$$\text{مجموع ضرایب بسط} = (۱+۱+۱)^۵ = ۳^۵ = ۲۴۳$$

۸. گزینه‌ی ۴.

$$\left(x-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^{۶}=\left(x-\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}\right)^{۶}$$

$$(۱)(۶-r)+\left(-\frac{۱}{۲}\right)(r)=۰\Longrightarrow -\frac{۳}{۲}r=-۶\Longrightarrow r=۴$$

$$\text{جمله‌ی فاقد } x=\binom{۶}{۴}(x)^{۲}\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^{۴}=\frac{۶!}{۴!۲!}\times\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

فصل ۳

تابع

تابع

۳ـ۱ اگر دو متغیر x و y چنان به هم مربوط باشند که به‌ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست آید، آنگاه y تابعی از x نامیده می‌شود. این تابع را به صورت $y = f(x)$ نشان می‌دهیم. در این‌جا x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است، مقادیر y به مقادیری که به x نسبت داده می‌شود وابسته است. مقادیر x را دامنه‌ی تابع و مقادیر y متناظر با آن‌ها را بُرد تابع می‌نامند.

مثال یک ورق آلومینیم به‌شکل مستطیل به طول ۵۰ متر و عرض x متر را درنظر بگیرید. واضح است که مساحت و محیط این ورق تابعی از متغیر x است.

۱) اگر $S(x)$ مساحت این ورق باشد، فرمول $S(x)$ را بنویسید.

۲) اگر $P(x)$ محیط این ورق باشد، فرمول $P(x)$ را بنویسید.

۳) با توجه به این‌که x اندازه‌ی عرض یک مستطیل است، حدود تغییرات x را تعیین کنید.

حل

۱) $\text{مساحت مستطیل} = \text{طول مستطیل} \times \text{عرض مستطیل} \Longrightarrow S(x) = ۵۰x$

۲) $\text{محیط مستطیل} = ۲\times(\text{طول مستطیل} + \text{عرض مستطیل}) \Longrightarrow P(x) = ۲(۵۰ + x)$

۳) طبق قرارداد، همواره عرض مستطیل از طول مستطیل کوچک‌تر است، پس $۰ < x < ۵۰$.

۳ـ۲ تعریف مجموعه‌ای تابع: تابع مجموعه‌ای است از زوج‌های مرتب که هیچ دو زوج مرتب متمایز آن، دارای مؤلفه‌های اول (xهای) مساوی نباشند. از این تعریف، مجموعه‌ی عضوهای اول زوج‌های مرتب را دامنه‌ی تابع (D_f) و مجموعه‌ی عضوهای دوم زوج‌های مرتب را بُرد تابع (R_f) می‌گوییم. پس می‌توان تابع f را به صورت زیر نمایش داد:

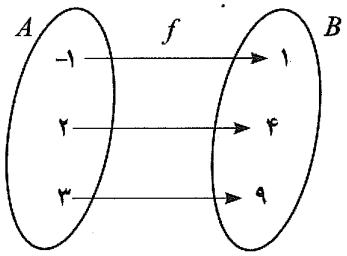
$$f = \{(x, y) | x \in D_f \ , \ y = f(x)\}$$

مثال مجموعه‌ی $f = \{(-۱, ۱), (۲, ۴), (۳, ۹)\}$ یک تابع را مشخص می‌کند، زیرا در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول مساوی نیستند. از طرفی $D_f = \{-۱, ۲, ۳\}$ و $R_f = \{۱, ۴, ۹\}$.

۳ـ۳ تعریف تابع با استفاده از نمودار ون: دراین روش، اعضای مجموعه‌های دامنه و بُرد را در شکل‌های بسته‌ی هندسی قرار می‌دهیم و اعضایی از دامنه را که با عضوی از بُرد مرتبطند با پیکان به آن عضو مربوط می‌کنیم. مثلاً تابع

$$f = \{(-۱, ۱), (۲, ۴), (۳, ۹)\}$$

با نمودار ون به صورت زیر مشخص می‌شود:

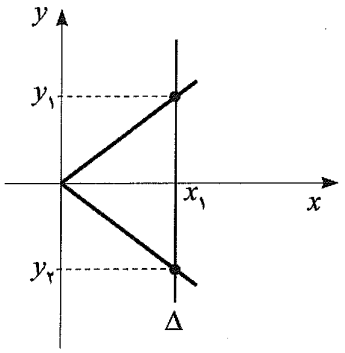


و به صورت $f : A \to B$ نمایش داده می‌شود. بخوانید «f تابعی از A به B.» مجموعه‌ی A دامنه‌ی تابع و مجموعه‌ی B بُرد تابع نامیده می‌شود.

تذکر: اگر نمودار ون رابطه‌ی f رسم شود، و از هر عضو دامنه حداکثر یک پیکان خارج شود، دراین‌صورت رابطه‌ی f تابع است.[۱].

۴ـ۳ تعریف تابع از روی نمودار: نمودار وقتی نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور yها (مانند $x = a$) آن نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال شکل زیر نمودار یک تابع نیست، زیرا خط قائم رسم‌شده نمودار را در دو نقطه قطع کرده است، درواقع به‌ازای یک مقدار $x = x_۱$، دو مقدار $y_۱$ و $y_۲$ برای y به دست می‌آید.



۵ـ۳ نمایش تابع به‌وسیله‌ی فرمول (ضابطه‌ی تابع): اگر تابع f به عضوی از دامنه مانند x، عضوی چون y از بُرد تابع را نسبت دهد، قانونی که این ارتباط را برقرار می‌کند، ضابطه‌ی تابع نامیده می‌شود. ضابطه‌ی تابع f را به‌شکل $y = f(x)$ می‌نویسیم که در آن y مقدار تابع به‌ازای عضو دلخواه x از دامنه است. تابع f را که دامنه و بُردش اعداد حقیقی باشند، یعنی

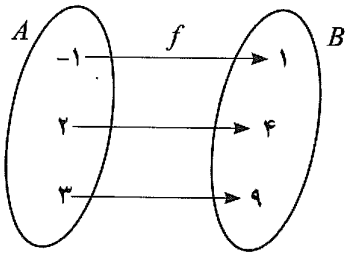
$$D_f \subset \mathbb{R} \ , \ R_f \subset \mathbb{R}$$

۱. رابطه مجموعه‌ای است از زوج‌های مرتب.

به صورت زیر نمایش می‌دهند

$$\begin{cases} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y = f(x) \end{cases}$$

مثال تابع $f : A \mapsto B$ را درنظر بگیرید. ۱ مربع ۱−، ۴ مربع ۲ و ۹ مربع ۳ است. پس هر عضو y از بُرد، از مربع یک عضو x از دامنه تولید شده است، یعنی $y = f(x) = x^2$. معادله‌ی $y = x^2$ را ضابطه‌ی این تابع می‌نامند.



۳ـ۶ تابع حقیقی: تابع $f : A \mapsto B$ را که بُرد آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، تابع حقیقی می‌نامیم.

۳ـ۷ معمولاً ضابطه‌ی تابع حقیقی را می‌توان با معادله‌ای از دو متغیر x و y بیان کرد، ولی هر معادله‌ی دومتغیره لزوماً ضابطه‌ی تابع حقیقی نیست.

مثال معادله‌ی $x^2 + y^2 = 9$ برحسب x ضابطه‌ی یک تابع نیست، زیرا مثلاً به‌ازای $x = 0$ داریم $y = \pm 3$، یعنی به‌ازای یک عضو از دامنه، دو مقدار برای y نتیجه می‌شود و این با تعریف تابع تناقض دارد.

۳ـ۸ اثبات تابع نبودن یک رابطه ازروی ضابطه‌ی آن: هرگاه بخواهیم نشان دهیم حکمی در حالت کلی نادرست است، کافی است مثال نقضی از حکم بزنیم. بنابراین اگر بخواهیم ثابت کنیم رابطه‌ای تابع نیست، کافی است نشان دهیم به‌ازای xای از دامنه، دو مقدار برای y نتیجه می‌شود.

مثال معادله‌ی $x = 1 + |y + 3|$ برحسب x در اعداد حقیقی، ضابطه‌ی یک تابع نیست، زیرا مثلاً به‌ازای $x = 0$ دومقدار $y = -2$ و $y = -4$ برای y نتیجه می‌شود.

۳ـ۹ رابطه‌هایی که در آن‌ها y، داخل قدرمطلق، جزء صحیح، دارای توان زوج یا کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، معمولاً تابع نیستند.

تست کدام یک از معادلات زیر در $\mathbb{R}$ می‌تواند ضابطه‌ی یک تابع باشد؟

۱) $y^2 - 2y + 1 = x$

۲) $[y] - x = 0$

۳) $x = \cos y$

۴) $y - 2|x| = 3$

حل گزینه‌ی ۴.

در معادله‌ی گزینه‌ی ۴ به‌ازای هر x داریم $y = 2|x| + 3$، یعنی به‌ازای هر مقدار x، فقط یک مقدار برای y نتیجه می‌شود، پس این معادله ضابطه‌ی یک تابع است.

۳ـ۱۰ توابع چند ضابطه‌ای: هرگاه دامنه‌ی یک تابع را به چند مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم کنیم، به‌طوری‌که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه باشد و روی هر مجموعه، ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، دراین‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای به دست می‌آید. مثلاً

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1 \\ f_2(x) & x\in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x\in D_n \end{cases}$$

به‌طوری‌که:

$$D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_n=D_f$$
$$\forall i,j\in N: D_i\cap D_j=\phi$$

مثال تابع قدرمطلق $f(x)=|x|$ یک تابع چند ضابطه‌ای است که معمولاً آن را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

۳ـ۱۱ به‌طورکلی، رابطه‌های چند ضابطه‌ای درصورتی تابع هستند که هرکدام از ضابطه‌ها تابع باشد و دامنه‌های ضابطه‌ها دو به دو جدا از هم باشند.

مثال رابطه‌ی f به صورت زیر تعریف شده است. آیا این رابطه یک تابع است؟

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\leqslant -2 \\ 4 & -3<x\leqslant 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$$

حل چون دامنه‌ی ضابطه‌های اول و دوم با هم اشتراک دارند، این رابطه ضابطه‌ی یک تابع نیست، زیرا به‌ازای $x=-2$ دو مقدار ۴ و -5 برای y به دست می‌آید.

تست اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+x+a & x\geqslant 1 \\ 6x-a & x\leqslant 1 \end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۰

حل گزینه‌ی ۲.

$$x=1\Longrightarrow f_1(1)=f_2(1)\Longrightarrow 1+1+a=6-a\Longrightarrow a=2$$

دامنه و بُرد تابع‌های حقیقی

۳ـ۱۲ دامنه‌ی یک تابع، مجموعه‌ی مقدارهایی است که یک متغیر مستقل می‌تواند داشته باشد. به بیان دیگر، دامنه‌ی f عبارت است از بزرگ‌ترین زیرمجموعه از اعداد حقیقی که اگر هر عضو آن را به‌جای x تابع f قرار دهیم، y نیز عددی حقیقی شود، یعنی

$$D_f = \{x | f(x) \in \mathbb{R}\}$$

مثال دامنه‌ی تابع حقیقی $f(x) = x^3 - 1$، $\mathbb{R}$ است، زیرا دلیلی برای محدود کردن x در این تابع وجود ندارد.

مثال دامنه‌ی تابع حقیقی $f(x) = \frac{1}{x+2}$ تمام اعداد حقیقی به‌جز $x = -2$ است، یعنی: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$، زیرا اگر $x = -2$ باشد، مخرج مساوی صفر می‌شود و تقسیم عدد بر صفر بی‌معنی است، پس مقدار تابع، عدد حقیقی نخواهد بود.

مثال دامنه‌ی تابع حقیقی $f(x) = \sqrt{4 - x}$ مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از یا مساوی ۴ است، یعنی: $D_f = \{x | x \leqslant 4\}$، زیرا مقدار زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، پس مقدار $x - 4$ باید بزرگ‌تر از یا مساوی صفر شود، یعنی $x - 4 \geqslant 0$ یا $x \leqslant 4$.

۳ـ۱۳ بُرد یک تابع، مجموعه‌ی مقدارهایی است که یک متغیر وابسته می‌تواند داشته باشد. به بیان دیگر، y عضوی از برد تابع f است، اگر عدد حقیقی x از دامنه یافت شود به قسمی که $y = f(x)$.

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} | y = f(x)\ ,\ x \in D_f\}$$

مثال بُرد تابع حقیقی $f(x) = x^3$، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، زیرا به‌ازای هر y متعلق به $\mathbb{R}$ معادله‌ی $y = x^3$ برای x دارای جواب است.

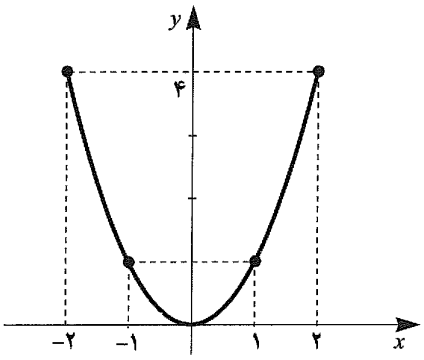
مثال بُرد تابع حقیقی $f(x) = x^2$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی است، یعنی $R_f = [0, +\infty)$، زیرا به‌ازای هر x متعلق به این بازه $y = x^2$ برای x، دارای جواب است.

مثال بُرد تابع حقیقی $f(x) = \sqrt{x - 1}$، مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی است، یعنی $R_f = [0, +\infty)$، زیرا به‌ازای هر x متعلق به این بازه $y = \sqrt{x - 1}$ برای x، دارای جواب است.

نمودار تابع

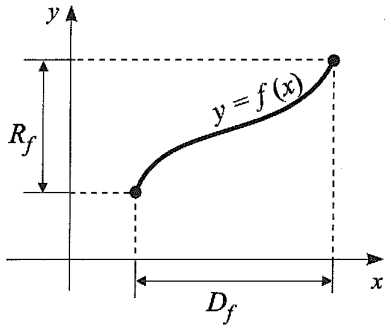
۳ـ۱۴ نمودار تابع در یک دستگاه مختصات، مکان هندسی مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که مختصات آن‌ها در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند. بنابراین، نمودار تابع f در صفحه‌ی مختصات مجموعه‌ی نقاط نظیر زوج‌های مرتب $(x, f(x))$ است که در آن x هر مقدار از دامنه‌ی تابع و $f(x)$ یا y مقدار تابع f متناظر با ورودی x است.

۳ـ۱۵ روش عمومی برای رسم نمودار توابع، نقطه‌یابی است، یعنی با دادن مقادیر مختلف به x، yهای نظیر را به دست می‌آوریم و با داشتن نقاط متعددی از منحنی و وصل کردن این نقاط به یکدیگر، نمودار تابع را رسم می‌کنیم. برای مثال، رسم منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = x^2$ به‌کمک این روش به صورت زیر است:



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۱	۰	۱	۴

۳ـ۱۶ در شکل زیر دامنه و بُرد و نمودار تابع f مشخص شده است.



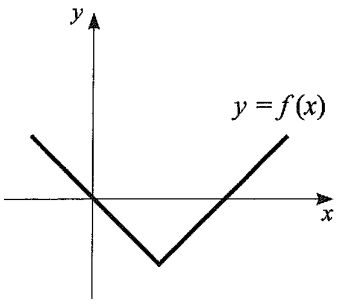
ملاحظه می‌شود که دامنه‌ی f مجموعه‌ای از نقاط روی محور xها و برد f مجموعه‌ای از نقاط روی محور yهاست.

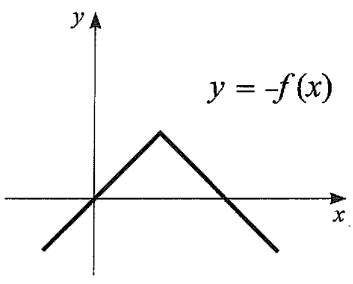
تغییرات و انتقال منحنی‌ها

۳ـ۱۷ تابع f به معادله‌ی $y = f(x)$ مفروض است. می‌خواهیم نمودارهای توابع به معادلات $y = -f(x)$ و $y = f(-x)$ و $y = f(x) \pm c$ و $y = cf(x)$ و $y = f(cx)$ را ازروی منحنی تابع $y = f(x)$ رسم کنیم.

۳ـ۱۸ برای رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y = -f(x)$ باید قرینه‌ی منحنی $y = f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

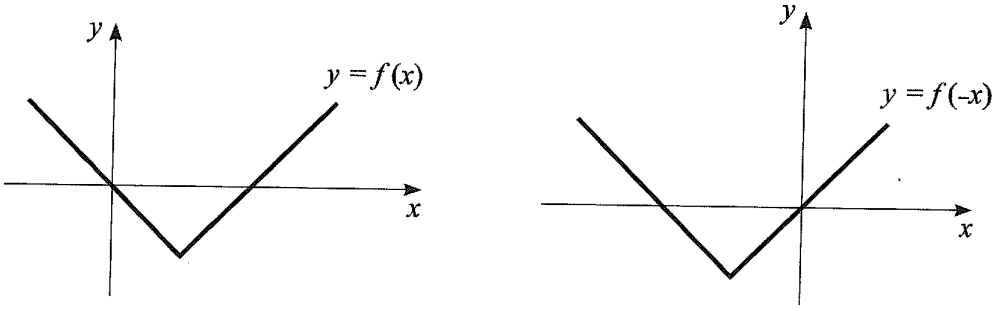
مثال





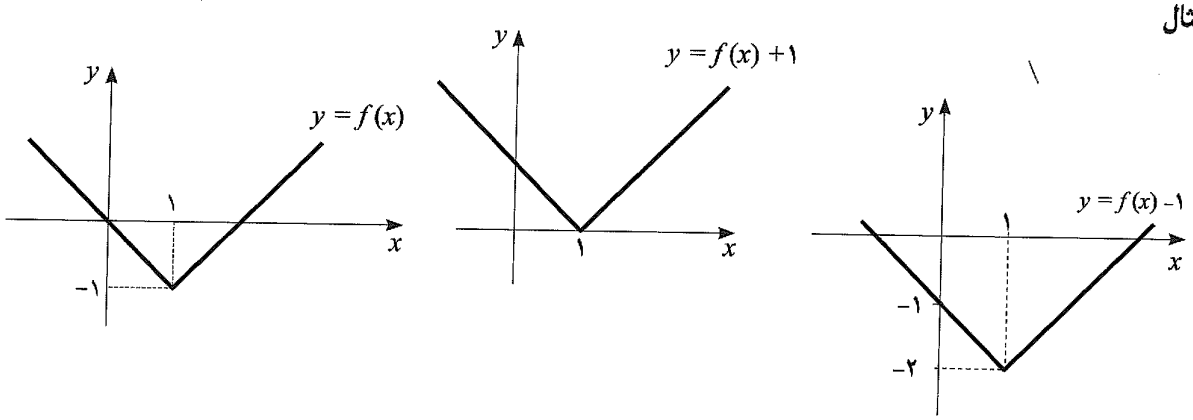
۳ـ۱۹ برای رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y = f(-x)$ باید قرینه‌ی منحنی $y = f(x)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم.

مثال



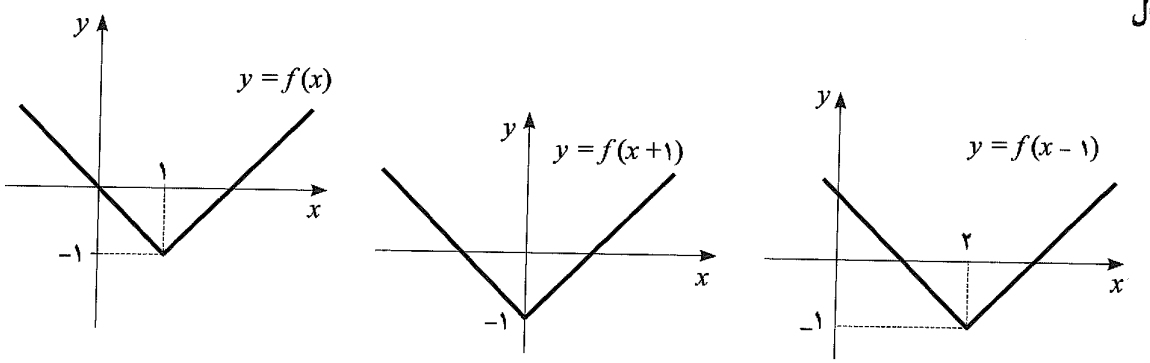
۳ـ۲۰ برای رسم تابع به معادله‌ی $y = f(x) + c$ باید همه‌ی نقاط منحنی $y = f(x)$ را به‌اندازه‌ی $y = c$ در راستای محور yها تغییرمکان دهیم. اگر $c > 0$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به‌اندازه‌ی $y = c$ به‌طرف بالای محور yها انتقال می‌یابد و اگر $c < 0$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه‌ی $y = c$ به‌طرف پایین محور yها انتقال می‌یابد.

مثال



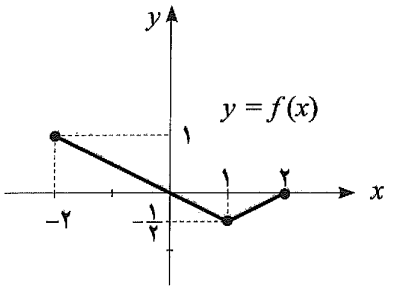
۳ـ۲۱ برای رسم تابع به معادله‌ی $y = f(x + c)$ باید همه‌ی نقاط منحنی $y = f(x)$ را به‌اندازه‌ی $x = c$ در راستای محور xها تغییرمکان دهیم. اگر $c > 0$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به‌اندازه‌ی $x = c$ به‌طرف چپ محور xها انتقال می‌یابد و اگر $c < 0$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به‌اندازه‌ی $x = c$ به‌طرف راست محور xها انتقال می‌یابد.

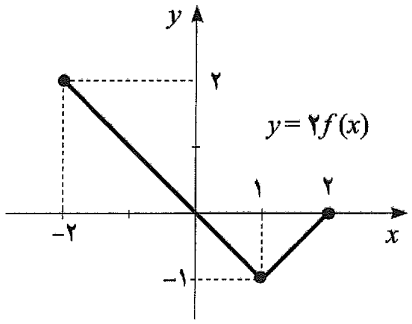
مثال



۳ـ۲۲ برای رسم تابع به معادله‌ی $y = cf(x)$ باید عرض هر نقطه از منحنی $y = f(x)$ را (با حفظ طول آن) در عدد c ضرب کنیم.

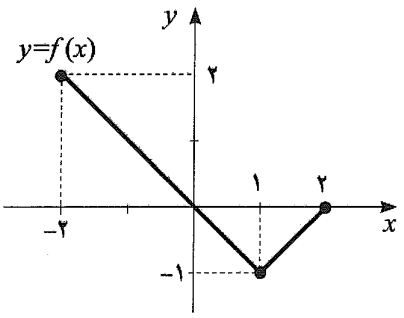
مثال

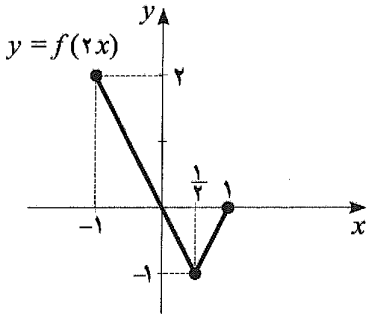




۳ـ۲۳ برای رسم تابع به معادله‌ی $y = f(cx)$ باید طول هر نقطه از منحنی $y = f(x)$ را (با حفظ عرض آن) بر عدد c تقسیم کنیم.

مثال





مثال به‌کمک تغییرات و انتقال منحنی‌ها، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

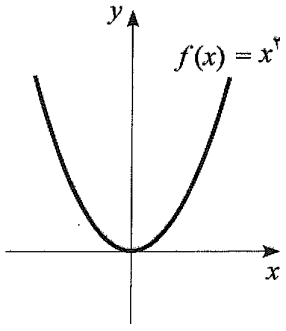
۱) $f(x) = x^2 - 1$

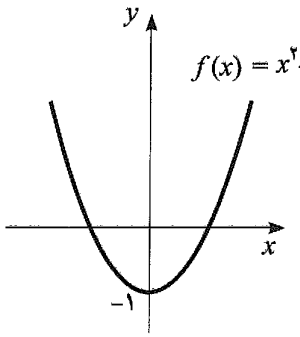
۲) $f(x) = (x+1)^3$

۳) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

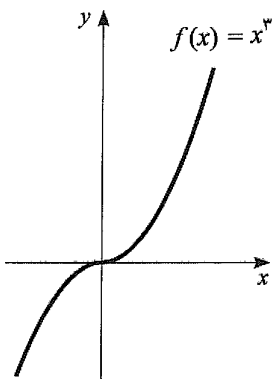
۴) $f(x) = -(x-1)^4$

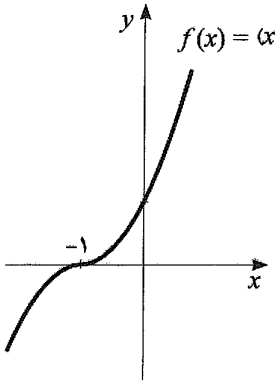
حل



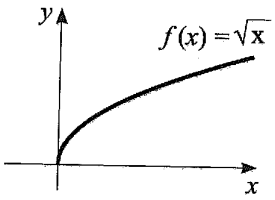


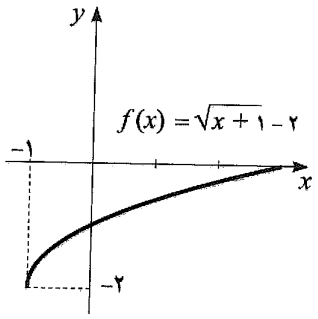
۱) $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = [-1, +\infty) \end{cases}$



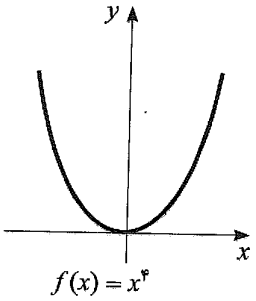


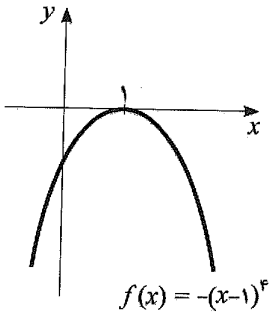
۲) $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases}$





۳) $\begin{cases} D_f = [-1, +\infty) \\ R_f = [-2, +\infty) \end{cases}$

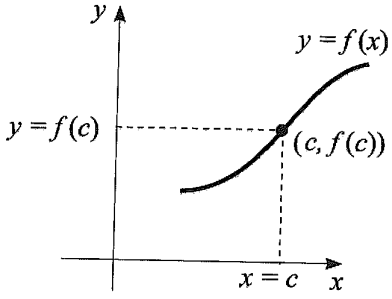




۴) $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = (-\infty, 0] \end{cases}$

مقدار تابع در یک نقطه

۲۴ـ۳ محاسبه‌ی مقدار تابع، پیدا کردن مقدار $y = f(x)$ به‌ازای مقدارهای مختلفی است که به متغیر مستقل x داده می‌شود. در تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ برای محاسبه‌ی مقدار تابع به‌ازای $x = c$ در $f(x)$ به‌جای x عدد c را جاگذاری می‌کنیم، یعنی $f(c)$ را حساب می‌کنیم. در نمودار زیر، نقطه‌ی $(c, f(c))$ یکی از نقاط نمودار تابع f است. مقدار $y = f(x)$، عرض نقطه‌ای است که طول آن $x = c$ است.



مثال اگر $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$، مقادیر زیر را بیابید.

۱) $f(-1)$

۲) $f(f(0))$

حل

۱) $f(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$

۲) $f(0) = 3(0) - 2(0) - 1 = -1 \Longrightarrow f(f(0)) = f(-1) = 3 + 2 - 1 = 4$

مثال اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 1 - x^3 & x < 0 \end{cases}$ باشد، مقادیر زیر را بیابید.

۱) $f(-2)$

۲) $f(f(16))$

حل

۱) $f(-۲) = ۱ - (-۲)^۳ = ۱ + ۸ = ۹$

۲) $f(۱۶) = \sqrt{۱۶} = ۴ \Longrightarrow f\big(f(۱۶)\big) = f(۴) = \sqrt{۴} = ۲$

۲۵ـ۳ تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$ را درنظر بگیرید. هر نقطه‌ای که روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، مختصاتش در معادله‌ی تابع $y = f(x)$ صدق می‌کند و برعکس، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادله‌ی $y = f(x)$ صدق کند، روی نمودار تابع f قرار دارد.

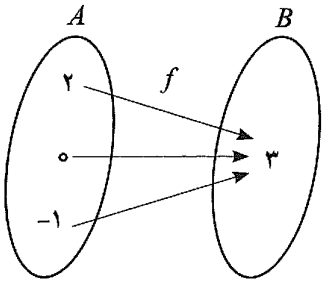
مثال به‌ازای کدام مقدار a نقطه‌ی $P\left(\frac{\pi}{۶}, a + ۲\right)$ روی نمودار تابع $f(x) = ۲\sin x$ قرار دارد؟

حل

$$P\left(\frac{\pi}{۶}, a + ۲\right) \Longrightarrow a + ۲ = ۲\sin\frac{\pi}{۶} \Longrightarrow a + ۲ = ۲ \times \frac{۱}{۲} \Longrightarrow a = -۱$$

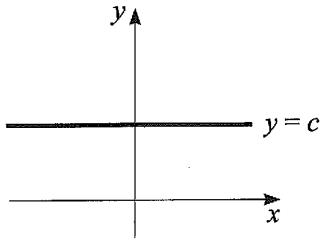
تابع ثابت و تابع همانی

۲۶ـ۳ تابع ثابت: تابعی است که همه‌ی اعضای دامنه را در برد، به یک عضو ثابت تصویر می‌کند. بدیهی است که برد همه‌ی توابع ثابت، یک‌عضوی است. نمونه‌ای از این تابع با نمودار ون در زیر نمایش داده شده است.



یا $f = \{(۲, ۳), (۰, ۳), (-۱, ۳)\}$

۲۷ـ۳ ضابطه‌ی تابع ثابت به صورت $f(x) = c$ است و اگر این تابع حقیقی باشد، نمودار آن با دامنه‌ی اعداد حقیقی خطی راست موازی محور xهاست.



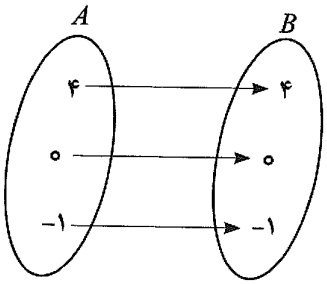
$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \{c\} \end{cases}$$

مثال ثابت کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = ۱ + ۴\sin^۲ x - \sin^۲ ۲x - ۴\sin^۴ x$ تابعی ثابت است.

حل

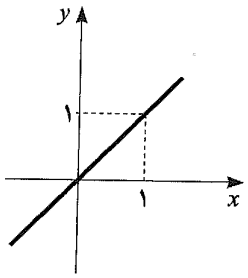
$$f(x) = ۱ + ۴\sin^۲ x(۱ - \sin^۲ x) - \sin^۲ ۲x = ۱ + ۴\sin^۲ x\cos^۲ x - \sin^۲ ۲x$$
$$= ۱ + \sin^۲ ۲x - \sin^۲ ۲x = ۱ \Longrightarrow f(x) = ۱$$

۲۸ـ۳ تابع همانی: تابعی است که به هر عضو دامنه، همان عضو را در بُرد نسبت می‌دهد. نمونه‌ای از این تابع با نمودار ون در زیر نمایش داده شده است.



یا $f = \{(۴, ۴), (۰, ۰), (-۱, -۱)\}$

۲۹ـ۳ ضابطه‌ی تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است و اگر این تابع حقیقی باشد، نمودار آن با دامنه‌ی اعداد حقیقی، نیم‌ساز ربع اول و سوم است.



$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases}$$

تابع قدرمطلق

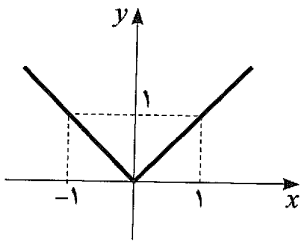
۳۰ـ۳ تابع قدرمطلق تابعی است با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

حاصل تأثیر این تابع روی هر عدد حقیقی یک عدد حقیقی نامنفی است. مثلاً

$$f(۲) = |۲| = ۲ \ , \ f(۰) = |۰| = ۰ \ , \ f(۱ - \sqrt{۲}) = |۱ - \sqrt{۲}| = -(۱ - \sqrt{۲}) = \sqrt{۲} - ۱$$

۳۱ـ۳ نمودار تابع حقیقی f با ضابطه‌ی $f(x) = |x|$ به‌شکل زیر است:



$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \mathbb{R}^{\geqslant ۰} \end{cases}$$

۳۲ـ۳ تعیین ضابطه و رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |u|$ که در آن u تابعی از x است: u را تعیین علامت می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$f(x) = |u| = \begin{cases} u & u \geqslant ۰ \\ -u & u < ۰ \end{cases}$$

مثال $f(x) = |x| + |x - ۱|$ را به یک تابع چند ضابطه‌ای تبدیل کنید.

حل

$$x = ۰ \ , \ x - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = ۱$$

x	$-\infty$		۰		۱	
x		$-$	۰	$+$		$+$
$x-۱$		$-$		$-$	۰	$+$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-۱) - x & x \leqslant ۰ \\ -(x-۱) + x & ۰ < x \leqslant ۱ \\ x - ۱ + x & x > ۱ \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} ۱ - ۲x & x \leqslant ۰ \\ ۱ & ۰ < x \leqslant ۱ \\ ۲x - ۱ & x > ۱ \end{cases}$$

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

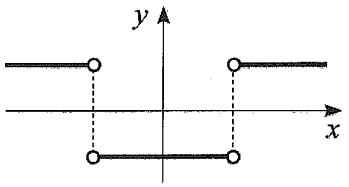
۱) $f(x) = \dfrac{|x^۲ - ۴|}{x^۲ - ۴}$ ۲) $f(x) = x|x|$

حل

۱)

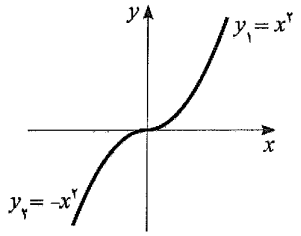
$$x^۲ - ۴ > ۰ \Longrightarrow x > ۲ \text{ یا } x < -۲ \Longrightarrow y = \frac{x^۲ - ۴}{x^۲ - ۴} = ۱$$

$$x^۲ - ۴ < ۰ \Longrightarrow -۲ < x < ۲ \Longrightarrow y = \frac{-(x^۲ - ۴)}{x^۲ - ۴} = -۱$$

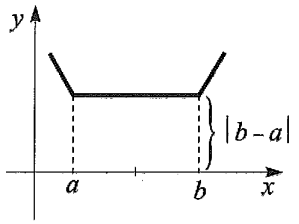


۲)

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) & x \geqslant ۰ \\ x(-x) & x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} x^۲ & x \geqslant ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$$

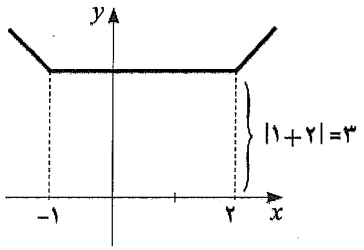


۳ـ۳۳ بررسی نمودار تابع $y = |x - a| + |x - b|$، $a < b$: نمودار این تابع یک پاره‌خط و دو نیم‌خط است. دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $y \geqslant |b - a|$ است.



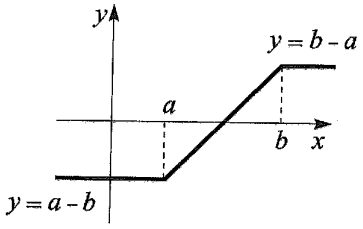
مثال نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x + ۱| + |x - ۲|$ را رسم کنید.

حل $a = -۱$، $b = ۲$



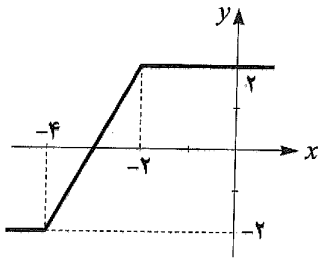
$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = [۳, +\infty) \end{cases}$$

۳ـ۳۴ بررسی نمودار تابع $y = |x-a| - |x-b|$، $a < b$: نمودار این تابع یک پاره‌خط و دو نیم‌خط است. دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $a - b \leqslant y \leqslant b - a$ است.



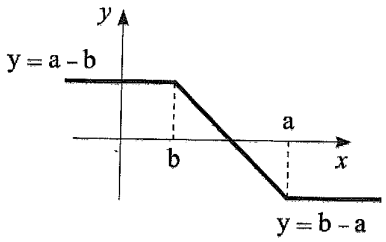
مثال نمودار تابع $y = |x+۴| - |x+۲|$ را رسم کنید.

حل $a = -۴$، $b = -۲$



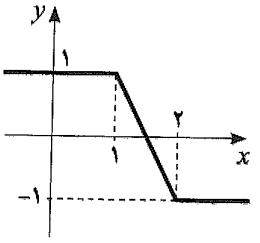
$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ D_f = [-۲, ۲] \end{cases}$$

۳ـ۳۵ بررسی نمودار تابع $y = |x-a| - |x-b|$، $a > b$: نمودار این تابع یک پاره‌خط و دو نیم‌خط است. دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $b - a \leqslant y \leqslant a - b$ است.



مثال نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x-۲| - |x-۱|$ را رسم کنید.

حل $a = ۲$، $b = ۱$



$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = [-۱, ۱] \end{cases}$$

۳ـ۳۶ رسم نمودار $y = |g(x)|$: ابتدا نمودار $y = g(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قرینه‌ی قسمتی از نمودار را که زیر محور xهاست نسبت به محور xها به دست می‌آوریم.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = |x^۲ - ۱|$

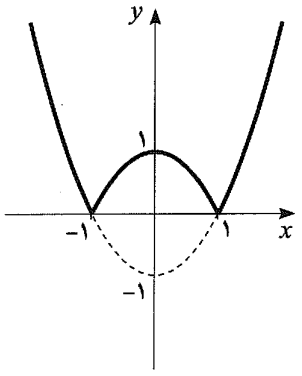
۲) $y = |x^۳|$

۳) $y = ||x| - ۲|$

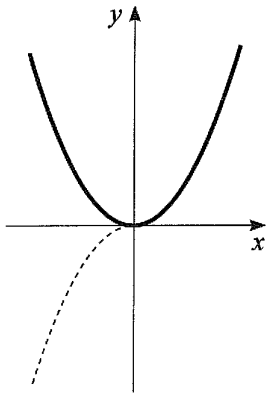
۴) $y = |\sin x|$, $۰ \leqslant x \leqslant ۲\pi$

حل

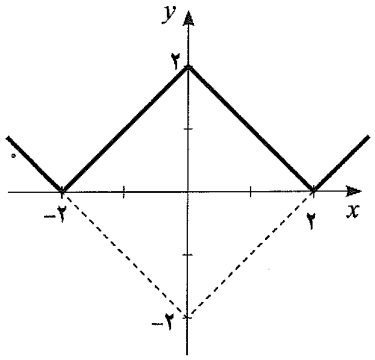
۱)



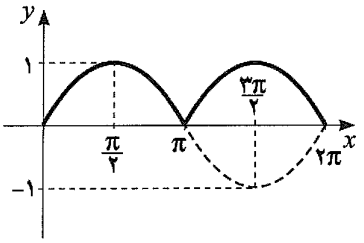
۲)



۳)



۴)



۳ـ۳۷ ویژگی‌های قدرمطلق:

۱) $\sqrt{x^۲} = \lvert x \rvert$	۲) $\lvert x \rvert = ۰ \iff x = ۰$
۳) $\lvert x \rvert = \lvert - x \rvert$	۴) $\lvert x \rvert = a \overset{a \geq ۰}{\iff} x = \pm a$
۵) $- \lvert x \rvert \leqslant x \leqslant \lvert x \rvert$	۶) $\lvert x^۲ \rvert = \lvert x \rvert^۲ = x^۲$
۷) $\lvert x \rvert = \lvert y \rvert \iff x = \pm y$	۸) $\lvert x - y \rvert = \lvert y - x \rvert$
۹) $\lvert xy \rvert = \lvert x \rvert \, \lvert y \rvert$	۱۰) $\lvert \frac{x}{y} \rvert = \frac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$
۱۱) $\lvert x \rvert \geqslant ۰$	۱۲) $\lvert x + y \rvert \leqslant \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$
۱۳) $\lvert x \rvert \geqslant a \overset{a \geq ۰}{\iff} x \geqslant a$ یا $x \leqslant -a$	۱۴) $\lvert x \rvert \leqslant a \overset{a \geq ۰}{\iff} -a \leqslant x \leqslant a$

مثال معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\lvert \lvert x \rvert - ۷ \rvert = ۵$ ۲) $x^۲ + ۲\lvert x \rvert - ۳ = ۰$

حل

۱)
$$\lvert \lvert x \rvert - ۷ \rvert = ۵ \Longrightarrow \lvert x \rvert - ۷ = \pm ۵ \Longrightarrow \begin{cases} \lvert x \rvert = ۱۲ \Longrightarrow x = \pm ۱۲ \\ \lvert x \rvert = ۲ \Longrightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$

۲) می‌دانیم $x^۲ = \lvert x \rvert^۲$، بنابراین:

$$\lvert x \rvert^۲ + ۲\lvert x \rvert - ۳ = ۰ \Longrightarrow (\lvert x \rvert + ۳)(\lvert x \rvert - ۱) = ۰$$

$$\lvert x \rvert + ۳ = ۰ \Longrightarrow \text{جواب ندارد} \quad , \quad \lvert x \rvert - ۱ = ۰ \Longrightarrow \lvert x \rvert = ۱ \Longrightarrow x = \pm ۱$$

مثال نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|۲-x|<۱$ ۲) $|x-۲|>۳$

۳) $|x^۲+۴|\leqslant ۸$ ۴) $|۲x-۳|<|۲x+۱|$

حل

۱) $|۲-x|<۱\Longrightarrow -۱<۲-x<۱\Longrightarrow -۳<-x<-۱\Longrightarrow ۱<x<۳$

۲) $|x-۲|>۳\Longrightarrow x-۲>۳$ یا $x-۲<-۳\Longrightarrow x>۵$ یا $x<-۱$

۳) $|x^۲+۴|=x^۲+۴$

$|x^۲+۴|\leqslant ۸\Longrightarrow x^۲+۴\leqslant ۸\Longrightarrow x^۲\leqslant ۴\Longrightarrow -۲\leqslant x\leqslant ۲$

۴) $|۲x-۳|<|۲x+۱|\Longrightarrow (۲x-۳)^۲<(۲x+۱)^۲\Longrightarrow ۴x^۲-۱۲x+۹<۴x^۲+۴x+۱$

$\Longrightarrow -۱۶x<-۸\Longrightarrow x>\frac{۱}{۲}$

تابع جزء صحیح

۳ـ۳۸ هر عدد حقیقی مانند x را همواره می‌توان به‌صورت مجموع عددی صحیح چون n و عددی حقیقی مانند r که $۰\leqslant r<۱$ نوشت، یعنی $x=n+r$. به قسمت صحیح عدد حقیقی x یعنی به n جزء صحیح عدد گفته می‌شود و جزء صحیح عدد x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهند. با توجه به تعریف فوق می‌توان گفت: بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از یا مساوی با x را جزء صحیح x می‌نامند. مثلاً

$$[۲]=۲\ ,\ [۳/۸]=۳\ ,\ [-۱]=-۱\ ,\ [-۲/۳]=-۳$$

در حالت کلی داریم:

$$n\leqslant x<n+۱\Leftrightarrow [x]=n$$

و این دستور فوق‌العاده مهم، مبنای بیشتر محاسبه‌های ما درمورد جزء صحیح اعداد است.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $[\sqrt{۲}+\sqrt{۳}]$ ۲) $[(\sqrt{۲}+۱)^۲-(\sqrt{۲}-۱)^۲]$

حل

۱) $[\sqrt{۲}+\sqrt{۳}]=[۱/۴+۱/۷]=[۳/۱]=۳$

۲) $[(\sqrt{۲}+۱)^۲-(\sqrt{۲}-۱)^۲]=[۲+۲\sqrt{۲}+۱-۲+۲\sqrt{۲}-۱]=[۴\sqrt{۲}]=[۵/۶]=۵$

مثال معادلات زیر را حل کنید:

۱) $۳[x]+۶=۰$ ۲) $[x]+[\sqrt{۶۷}]=۰$

حل

۱) $۳[x]=-۶\Longrightarrow [x]=-۲\Longrightarrow -۲\leqslant x<-۱$

۲) $[x]+۸=۰\Longrightarrow [x]=-۸\Longrightarrow -۸\leqslant x<-۷$

تست حاصل $[\sqrt{۴n^۲+۴n}]+[\sqrt{n^۲+۲n}]$ با شرط طبیعی بودن n، چه‌قدر است؟

۱) $۲n+۱$ ۲) $۳n$ ۳) $n+۲$ ۴) $۲n$

حل گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} n^۲ < n^۲ + ۲n < (n+۱)^۲ \Longrightarrow n < \sqrt{n^۲ + ۲n} < (n+۱) \Longrightarrow [\sqrt{n^۲ + ۲n}] = n \\ ۴n^۲ < ۴n^۲ + ۴n < (۲n+۱)^۲ \Longrightarrow ۲n < \sqrt{۴n^۲ + ۴n} < (۲n+۱) \Longrightarrow [\sqrt{۴n^۲ + ۴n}] = ۲n \end{cases}$$

$$[\sqrt{n^۲ + ۲n}] + [\sqrt{۴n^۲ + ۴n}) = n + ۲n = ۳n$$

۳ـ۳۹ ویژگی‌های جزء صحیح:

۱) $[x+n] = [x] + n \ , \ n \in Z$

۲) $[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$

۳) $۰ \leqslant x - [x] < ۱$

۴) $[x - [x]] = ۰$

۵) $[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in Z \\ -[x] - ۱ & x \notin Z \end{cases}$

۶) $[x+y] = \begin{cases} [x] + [y] \\ [x] + [y] + ۱ \end{cases}$

۷) $\Big[x + \big[x + [x + \cdots + [x]]\big]\Big] = nx$

۸) $[x^۲] \geqslant [x]$

۹) $[x+y] \geqslant [x] + [y]$

۱۰) $x > y \Longrightarrow [x] \geqslant [y]$

۱۱) $x > ۰ \Longrightarrow [x] \geqslant ۰$

۱۲) $x < ۰ \Longrightarrow [x] \leqslant -۱$ یا $[x] < ۰$

مثال معادله‌ی $\left[\frac{x+۳}{x}\right] = ۳$ را حل کنید.

حل

$$[\frac{x}{x} + \frac{۳}{x}] = ۳ \Longrightarrow ۱ + [\frac{۳}{x}] = ۳ \Longrightarrow [\frac{۳}{x}] = ۲ \Longrightarrow ۲ \leqslant \frac{۳}{x} < ۳$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{۲} \geqslant \frac{x}{۳} > \frac{۱}{۳} \Longrightarrow ۱ < x \leqslant \frac{۳}{۲}$$

مثال معادله‌ی $[x-۱] + [۲-x] = ۳$ را حل کنید.

حل

$$[x-۱] + [۲-x] = ۳ \Longrightarrow [x] - ۱ + ۲ + [-x] = ۳ \Longrightarrow [x] + [-x] = ۲$$

$$\begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases} \Longrightarrow ۲ \neq ۰, -۱ \Longrightarrow \text{جواب ندارد}$$

تست معادله‌ی $[x - [x] + ۲] = ۲$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) ندارد ۴) بی‌شمار

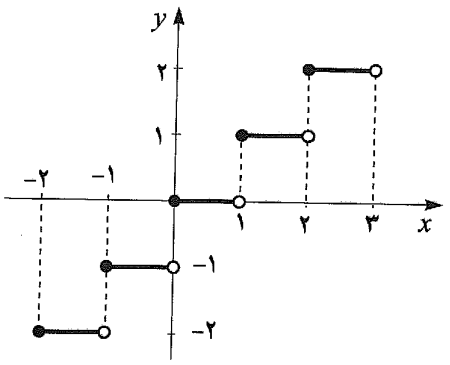
حل گزینه‌ی ۴. $[x]-$ و ۲ اعداد صحیحند، از داخل جزء صحیح خارج می‌شوند:

$$[x] - [x] + ۲ = ۲ \Longrightarrow ۲ = ۲ \Longrightarrow \text{بی‌شمار جواب}$$

۳ـ۴۰ تابع جزء صحیح تابعی است با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = [x]$$

نمودار f به‌شکل زیر است:



$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = Z \end{cases}$$

۳ـ۴۱ رسم توابعی که در آن‌ها $[kx]$ وجود دارد: باید افرازهای فاصله‌ی داده‌شده را هریک به طول $\frac{۱}{k}$ انتخاب کنیم تا kx بین دو عدد صحیح متوالی قرار گیرد و بتوانیم $[kx]$ را محاسبه کنیم.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = x - [x]\ ,\ [۰, ۳)$

۲) $y = [x] + [-x]\ ,\ [-۲, ۲]$

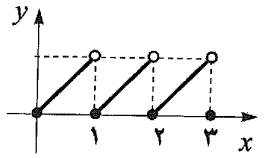
۳) $y = [۲x]\ ,\ [۰, ۲)$

۴) $y = \dfrac{x}{[x - ۱]}\ ,\ [-۱, ۲)$

حل

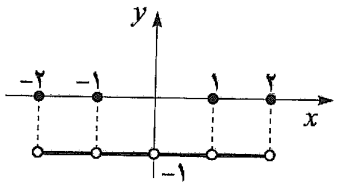
۱)

$$۰ \leqslant x < ۱ \Longrightarrow [x] = ۰ \Longrightarrow y = x$$
$$۱ \leqslant x < ۲ \Longrightarrow [x] = ۱ \Longrightarrow y = x - ۱$$
$$۲ \leqslant x < ۳ \Longrightarrow [x] = ۲ \Longrightarrow y = x - ۲$$



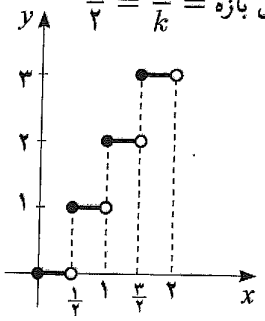
۲)

$$y = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$$



۳) طول بازه $= \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{k}$

$$۰ \leqslant x < \frac{۱}{۲} \Longrightarrow ۰ \leqslant ۲x < ۱ \Longrightarrow [۲x] = ۰ \Longrightarrow y = ۰$$
$$\frac{۱}{۲} \leqslant x < ۱ \Longrightarrow ۱ \leqslant ۲x < ۲ \Longrightarrow [۲x] = ۱ \Longrightarrow y = ۱$$
$$۱ \leqslant x < \frac{۳}{۲} \Longrightarrow ۲ \leqslant ۲x < ۳ \Longrightarrow [۲x] = ۲ \Longrightarrow y = ۲$$
$$\frac{۳}{۲} \leqslant x < ۲ \Longrightarrow ۳ \leqslant ۲x < ۴ \Longrightarrow [۲x] = ۳ \Longrightarrow y = ۳$$



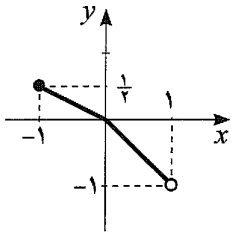
۴)

$$y = \frac{x}{[x-1]} = \frac{x}{[x]-1}$$

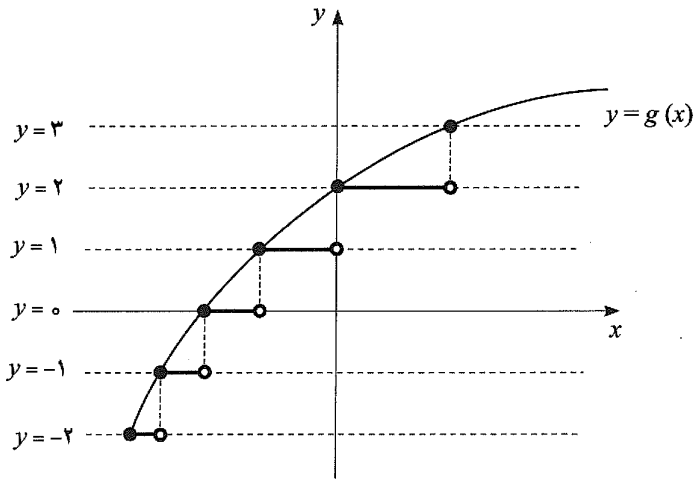
$$-1 \leqslant x < 0 \Longrightarrow [x] = -1 \Longrightarrow y = \frac{x}{-2}$$

$$0 \leqslant x < 1 \Longrightarrow [x] = 0 \Longrightarrow y = \frac{x}{-1}$$

$$1 \leqslant x < 2 \Longrightarrow [x] = 1 \Longrightarrow y = \frac{x}{0} \text{ نامعین}$$



۴۲ـ۳ رسم نمودار تابع $y = [g(x)]$: ابتدا نمودار $y = g(x)$ را روی دسته‌ی خطوط به معادله‌ی $y = k$ و $k \in Z$ (یعنی خطوط موازی محور xها با عرض از مبدأ صحیح) تصویر می‌کنیم و در این کار، محل برخورد منحنی با این دسته‌ی خطوط را نقاط توپُر و نقاط پای عمودهای تصویر روی این خطوط را توخالی درنظر می‌گیریم (به شکل دقت کنید).



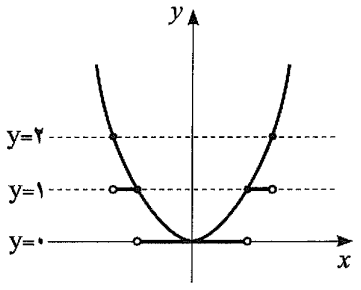
مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = [x^2]$

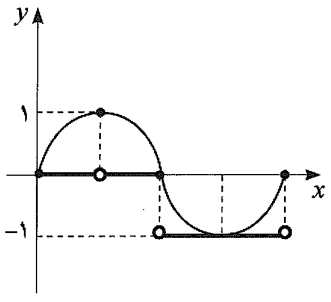
۲) $y = [\sin x]$

حل

۱)



۲)

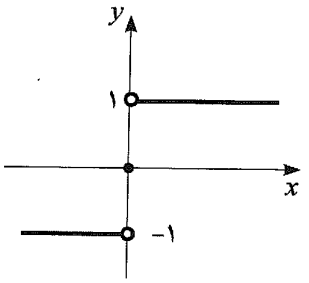


تابع علامت

۴۳ـ۳ تابع علامت تابعی است با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$\operatorname{sgn}(x) = S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار S به شکل زیر است:



$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \{-۱, ۰, ۱\} \end{cases}$$

۳ـ۴۴ تبدیل تابع $\operatorname{sgn}\big(u(x)\big)$ به یک تابع چند ضابطه‌ای: در حالت کلی باید تابع $u(x)$ را تعیین علامت کنیم. فاصله‌هایی از اعداد حقیقی که در آن $u(x) > ۰$ است، $\operatorname{sgn}\big(u(x)\big) = ۱$ است و فاصله‌هایی که در آن $u(x) < ۰$ است، $\operatorname{sgn}\big(u(x)\big) = -۱$ و نقاط با فاصله‌هایی از اعداد حقیقی که در آن $u(x) = ۰$ است $\operatorname{sgn}\big(u(x)\big) = ۰$ خواهد بود.

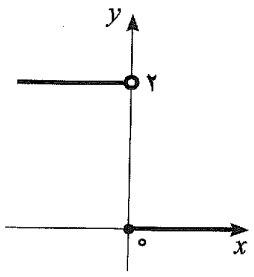
مثال مطلوب است محاسبه و رسم نمودار تابع $y = S(x^۲) - S(x)$.

حل

$$x > ۰ \Longrightarrow \begin{cases} S(x) = ۱ \\ S(x^۲) = ۱ \end{cases} \Longrightarrow y = ۱ - ۱ = ۰$$

$$x = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} S(x) = ۰ \\ S(x^۲) = ۰ \end{cases} \Longrightarrow y = ۰ - ۰ = ۰$$

$$x < ۰ \overset{x^۲ > ۰}{\Longrightarrow} \begin{cases} S(x) = -۱ \\ S(x^۲) = ۱ \end{cases} \Longrightarrow y = ۱ + ۱ = ۲$$

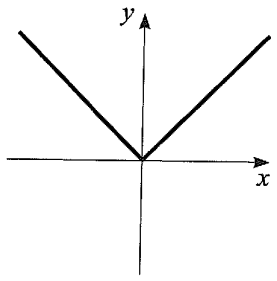


$$y = S(x^۲) - S(x) = \begin{cases} ۰ & x \geqslant ۰ \\ ۲ & x < ۰ \end{cases}$$

مثال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\operatorname{sgn}(x)$ را رسم کنید.

حل

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow x\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow f(x) = |x|$$

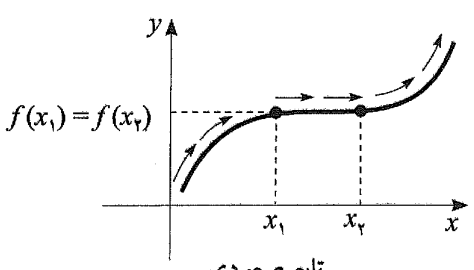


تابع صعودی و تابع نزولی

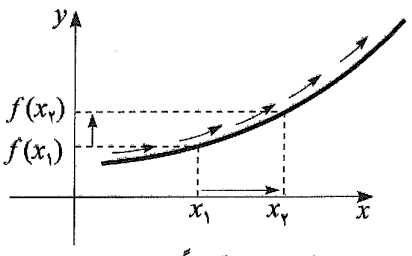
۴۵ـ۳ تابع حقیقی f را تابع صعودی می‌گویند اگر به‌ازای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f:

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \\ x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \end{cases}$$

یعنی در تابع صعودی تغییرات y هم‌جهت تغییرات x است. اگر نامساوی‌های فوق علامت تساوی نداشته باشد، تابع را اکیداً صعودی می‌نامند.

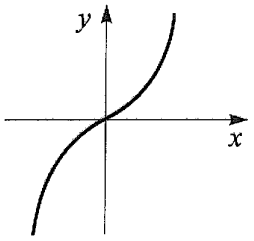


تابع صعودی

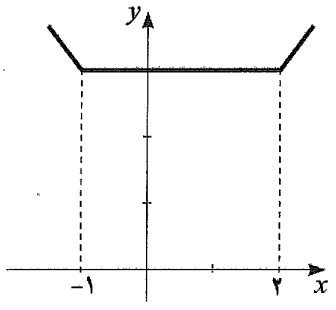


تابع اکیداً صعودی

مثال در شکل زیر تابع $f(x) = x^3$ در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



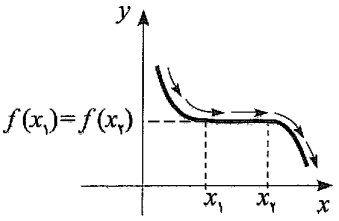
مثال در شکل زیر تابع $f(x) = |x+1| + |x-2|$ در بازه‌ی $(-1, +\infty)$ صعودی و در بازه‌ای $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



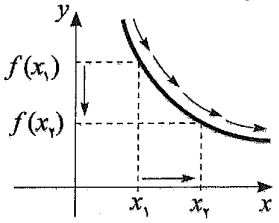
۴۶ـ۳ تابع حقیقی f را تابع نزولی می‌گویند اگر به‌ازای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f:

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \\ x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \end{cases}$$

یعنی در تابع نزولی تغییرات y در جهت خلاف تغییرات x است. اگر نامساوی‌های فوق علامت تساوی نداشته باشد، تابع را اکیداً نزولی می‌نامند.

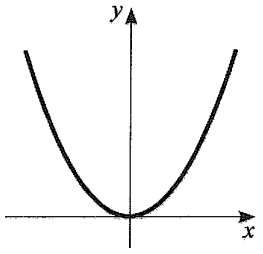


تابع نزولی



تابع اکیداً نزولی

مثال در شکل زیر تابع $f(x) = x^2$ در بازه‌ی $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است و در تمام دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است.

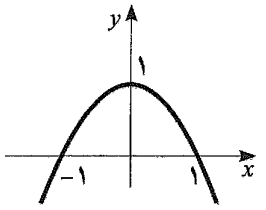


تابع کران‌دار

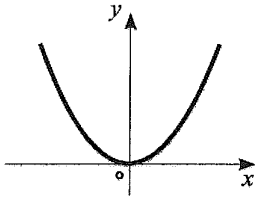
۳ـ۴۷ تابع f را کران‌دار می‌گویند، هرگاه عدد معینی مانند M باشد که $\forall x \in D_f$ داشته باشیم[۱] $|f(x)| \leqslant M$ یا $-M \leqslant f(x) \leqslant M$. اگر f کران‌دار نباشد، آن‌را بی‌کران می‌گویند.

مثال تابع $f(x) = \sin x$ تابع کران‌دار است، زیرا به‌ازای هر مقدار از x، $|f(x)| \leqslant 1$ یا $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

۳ـ۴۸ اگر $\forall x \in D_f$، $f(x) \leqslant M$ باشد، $f(x)$ را کران‌دار از بالا می‌گویند، مانند $f(x) = 1 - x^2$، زیرا به‌ازای هر مقدار از x، $f(x) \leqslant 1$.



۳ـ۴۹ اگر $\forall x \in D_f$، $f(x) \geqslant M$ باشد، $f(x)$ را کران‌دار از پایین می‌گویند، مانند $f(x) = x^2$، زیرا به‌ازای هر مقدار از x، $f(x) \geqslant 0$.



۱. به بیان ساده‌تر، تابع حقیقی یک‌متغیره‌ای که قدرمطلق همه‌ی مقادیر ممکن آن کم‌تر از، یا مساوی با، عدد معینی باشد.

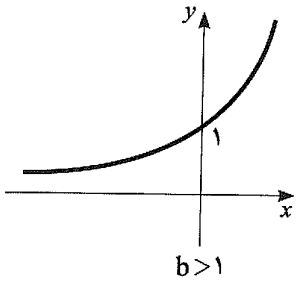
تابع نمایی

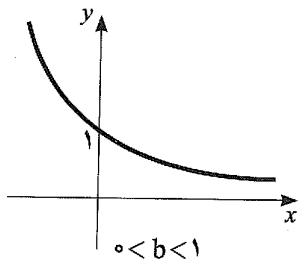
۳ـ۵۰ اگر b عدد حقیقی مثبت به‌جز عدد ۱ باشد ($b > ۰$ و $b \neq ۱$)، آنگاه تابع نمایی f با پایه‌ی b با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = b^x$$

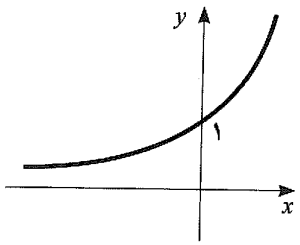
دامنه‌ی f مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($D_f = \mathbb{R}$) و بُرد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت ($R_f = \mathbb{R}^{>۰}$) است.

۳ـ۵۱ تابع نمایی اکیداً صعودی است اگر $b > ۱$ باشد و اکیداً نزولی است اگر $۰ < b < ۱$ باشد. در هر دو حالت فوق، محور xها (خط $y = ۰$) مجانب افقی تابع است. محل تلاقی منحنی تابع با محور yها نقطه‌ی $(۰, ۱)$ است. پارامتر b انحنای تابع را تعیین می‌کند[۱].





۳ـ۵۲ وقتی پایه‌ای تابع نمایی عدد e باشد ($e \simeq ۲/۷۱۸$)، آنگاه تابع $f(x) = e^x$ را تابع نمایی طبیعی می‌گویند. نمودار این تابع به‌شکل زیر است:



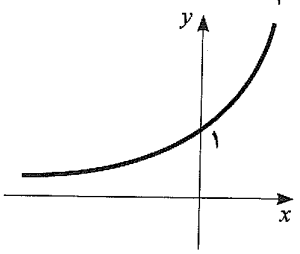
هم‌چنین هر تابع به صورت $f(x) = e^{g(x)}$ نیز تابع نمایی طبیعی است.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

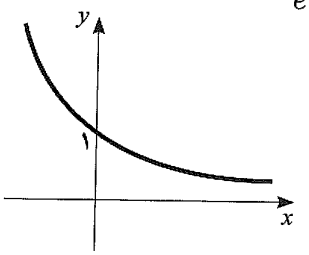
۱) $f(x) = (\frac{۱}{۲})^{-x}$ ۲) $f(x) = e^{-x}$

حل

۱) $f(x) = (\frac{۱}{۲})^{-x} = ۲^x$



۲) $f(x) = e^{-x} = (\frac{۱}{e})^x$



تست تابعی به صورت $f(x) = ۱۰ + ۵a^x$ مفروض است. اگر $f(۴) = ۹۰$ باشد، مقدار $f(۲)$ چقدر است؟

---

۱. اگر $b = ۱$، آنگاه $f(x) = ۱$ و تابع f ثابت است که مورد بحث تابع نمایی نیست.

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۷۰ ۴) ۸۰

حل گزینه‌ی ۲.

$$f(۴) = ۹۰ \Longrightarrow ۱۰ + ۵a^۴ = ۹۰ \Longrightarrow ۵a^۴ = ۸۰ \Longrightarrow a^۴ = ۱۶ \Longrightarrow a = \pm ۲$$
$$f(۲) = ۱۰ + ۵(\pm ۲)^۲ = ۱۰ + ۲۰ = ۳۰$$

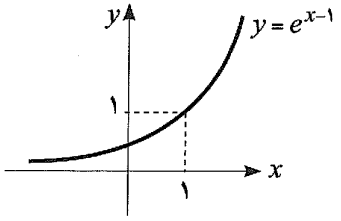
۳ـ۵۳ قاعده‌ی انتقال در رسم نمودار توابع نمایی صادق است.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

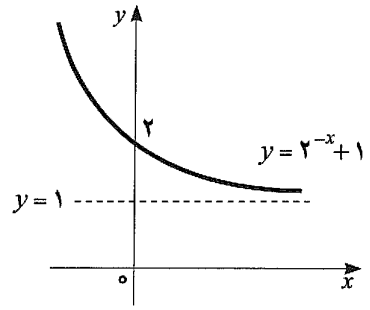
۱) $f(x) = e^{x-۱}$ ۲) $f(x) = ۲^{-x} + ۱$

حل

۱) نمودار $y = e^x$ را به‌اندازه‌ی یک واحد به‌سمت راست منتقل می‌کنیم.



۲) می‌دانیم $f(x) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x + ۱$. بنابراین نمودار $y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را به‌اندازه‌ی یک واحد به‌طرف بالا منتقل می‌کنیم.



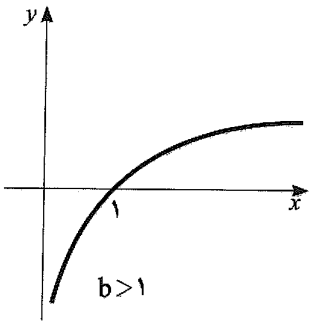
تابع لگاریتمی

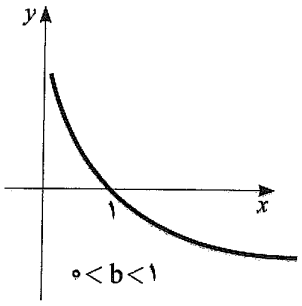
۳ـ۵۴ تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \log_b x$$

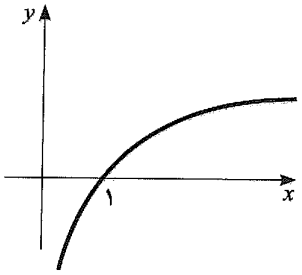
را تابع لگاریتمی با پایه‌ی b می‌نامیم ($b > ۰ \ , \ b \neq ۱$) و x عددی مثبت است. دامنه‌ی این تابع اعداد حقیقی مثبت ($D_f = \mathbb{R}^{>۰}$) و بُرد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($R_f = \mathbb{R}$) است.

۳ـ۵۵ تابع لگاریتمی اکیداً صعودی است اگر $b > ۱$ باشد و اکیداً نزولی است اگر $۰ < b < ۱$ باشد. در هر دو حالت فوق، محور yها (خط $x = ۰$) مجانب قائم تابع است. محل تلاقی منحنی تابع با محور xها نقطه‌ی $(۱, ۰)$ است. پارامتر b انحنای تابع را تعیین می‌کند.





۳ـ۵۶ وقتی پایه‌ی تابع لگاریتمی e باشد ($e \simeq ۲/۷۱۸$)، آنگاه $f(x) = \log_e^x$ را با $f(x) = \ln x$ نشان می‌دهند و به آن تابع لگاریتمی طبیعی می‌گویند. نمودار این تابع به‌شکل زیر است:



هم‌چنین هر تابع به صورت $f(x) = \ln g(x)$ نیز تابع لگاریتمی طبیعی است.

۳ـ۵۷ چون تابع لگاریتمی و تابع نمایی معکوس یکدیگرند، داریم:

$$y = \log_b x \iff x = b^y$$
$$y = \ln x \iff x = e^y$$

از معادلات فوق دو رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$e^{\ln x} = x \ , \ \ln e^x = x$$

به‌ازای هر x و y مثبت داریم:

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$
$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$
$$\ln x^n = n \ln x$$

مثال معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\ln(x-۳) = ۰$

۲) $(e^x - ۲)(e^x + ۱) = ۰$

۳) $\ln(۲x-۱) - \ln(x-۷) = \ln ۷$

۴) $e^{۲x} - ۵e^x + ۴ = ۰$

حل

۱) $\ln(x-۳)=۰ \Longrightarrow x-۳=e^{۰} \Longrightarrow x-۳=۱ \Longrightarrow x=۴$

۲) $(e^x-۲)(e^x+۱)=۰ \Longrightarrow \begin{cases} e^x-۲=۰ \Longrightarrow e^x=۲ \Longrightarrow x=\ln ۲ \\ e^x+۱=۰ \Longrightarrow e^x=-۱ \Longrightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$

۳) $\ln(۲x-۱)-\ln(x-۷)=\ln ۷ \Longrightarrow \ln\frac{۲x-۱}{x-۷}=\ln ۷ \Longrightarrow \frac{۲x-۱}{x-۷}=۷$

$\Longrightarrow ۷x-۴۹=۲x-۱ \Longrightarrow x=\frac{۴۸}{۵}$

۴) $(e^x)^۲-۵e^x+۴=۰ \Longrightarrow (e^x-۴)(e^x-۱)=۰ \Longrightarrow \begin{cases} e^x=۴ \Longrightarrow x=\ln ۴ \\ e^x=۱ \Longrightarrow x=۰ \end{cases}$

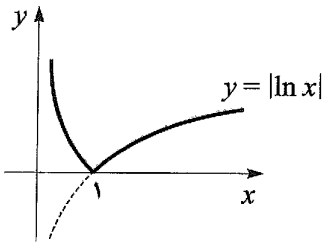
۳ـ۵۸ از انتقال تابع‌ها در رسم تابع لگاریتمی نیز می‌توان استفاده کرد.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

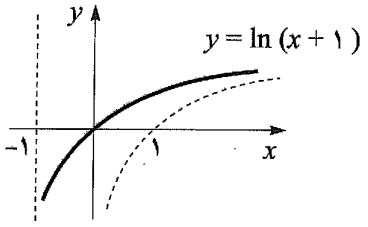
۱) $y=|\ln x|$ ۲) $y=\ln(x+۱)$

حل

۱) قرینه‌ی قسمتی از نمودار $y=\ln x$ را که زیر محور xهاست نسبت به محور xها به دست می‌آوریم.



۲) نمودار $y=\ln x$ را به‌اندازه‌ی یک واحد به‌سمت چپ منتقل می‌کنیم.



نحوه‌ی تعیین دامنه‌ی تابع

۳ـ۵۹ دامنه‌ی تعریف توابعی که ضابطه‌ی آن‌ها به صورت چند جمله‌ای است، اگر ذکر نشود، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

مثال دامنه‌ی تعریف توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=x^۳-۵x^۲+۷$ ۲) $f(x)=x^{۱۰۰}-x^{۹۹}$

حل دامنه‌ی توابع فوق مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

۳ـ۶۰ برای تعیین دامنه‌ی تعریف توابعی که ضابطه‌ی آن‌ها به صورت کسر است، ریشه‌ی مخرج کسر را (درصورت وجود) به دست می‌آوریم و مجموعه‌ی جواب فوق را از مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم می‌کنیم.

مثال دامنه‌ی تعریف توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=\frac{x^{۲}+۱۰}{x^{۹}-x^{۸}}$

۲) $f(x)=\frac{x-۳}{|x+۱|-۲}$

۳) $f(x)=\frac{x^{۲}+۳x+۱}{۲e^{x}-۱}$

۴) $f(x)=\frac{۱}{[x]+[-x]+۱}$

حل

۱) $x^{۹}-x^{۸}=۰\Longrightarrow x^{۸}(x-۱)=۰\Longrightarrow x=۰\ ,\ x=۱$

$D_f=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$

۲) $|x+۱|-۲=۰\Longrightarrow |x+۱|=۲\Longrightarrow x+۱=\pm ۲\Longrightarrow x=۱\ ,\ x=-۳$

$D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۳\}$

۳) $۲e^{x}-۱=۰\Longrightarrow ۲e^{x}=۱\Longrightarrow e^{x}=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow x=\ln\frac{۱}{۲}$

$D_f=\mathbb{R}-\{\ln\frac{۱}{۲}\}$

۴) $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}\Longrightarrow [x]+[-x]+۱=\begin{cases}۱ & x\in Z\\ ۰ & x\notin Z\end{cases}$

$D_f=Z$

تست دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{|[x]|-۱}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[-۱,۲)$

۲) $\mathbb{R}-\big([-۱,۰)\cup[۱,۲)\big)$

۳) $\mathbb{R}-[۱,۲)$

۴) $\mathbb{R}-\big([-۱,۰)\cup(۰,۱]\big)$

حل گزینه‌ی ۲.

$$|[x]|-۱=۰\Longrightarrow |[x]|=۱\Longrightarrow \begin{cases}[x]=۱\Longrightarrow ۱\leqslant x<۲\\ [x]=-۱\Longrightarrow -۱\leqslant x<۰\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\big([-۱,۰)\cup[۱,۲)\big)$$

۳ـ۶۱ برای تعیین دامنه‌ی تعریف توابعی که ضابطه‌ی آن‌ها شامل رادیکال با فرجه‌ی زوج است، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر از یا مساوی صفر قرار می‌دهیم و نامعادله‌ی حاصل را حل می‌کنیم. مجموعه‌ی جواب حاصل، دامنه‌ی تعریف تابع را مشخص می‌کند. هم‌چنین اگر رادیکالی با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر باشد، عبارت زیر رادیکال فقط بزرگ‌تر از صفر قرار داده می‌شود.

مثال دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=\sqrt{\frac{x-x^{۲}}{x}}$

۲) $f(x)=\sqrt{-|x+۱|}$

۳) $f(x)=\sqrt{x+|x|}$

۴) $f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$

۵) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x|-x}}$ ۶) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-[x]}}$

حل

۱) $\frac{x-x^۲}{x}\geqslant ۰ \Longrightarrow \frac{x(۱-x)}{x}\geqslant ۰ \overset{x\neq ۰}{\Longrightarrow} ۱-x\geqslant ۰ \Longrightarrow x\leqslant ۱$

$D_f=\{x|x\leqslant ۱, x\neq ۰\}=(-\infty,۰)\cup(۰,۱]$

۲) $-|x+۱|\geqslant ۰ \Longrightarrow |x+۱|\leqslant ۰ \Longrightarrow x=-۱ \Longrightarrow D_f=\{-۱\}$

۳) $x+|x|\geqslant ۰ \Longrightarrow x\in\mathbb{R} \Longrightarrow D_f=(-\infty,+\infty)$

۴) $۹-x^۲\geqslant ۰ \Longrightarrow x^۲\leqslant ۹ \Longrightarrow -۳\leqslant x\leqslant ۳$

$D_f=[-۳,۳]$

۵) $|x|-x>۰ \Longrightarrow |x|>x \Longrightarrow D_f=(-\infty,۰)$

۶) $۱-[x]>۰ \Longrightarrow [x]<۱ \Longrightarrow x<۱ \Longrightarrow D_f=(-\infty,۱)$

تست دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^۲-|x|}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ۲) $\mathbb{R}-(۰,۱)$ ۳) $\mathbb{R}-(-۱,۰)$ ۴) $\mathbb{R}-[-۱,۱]$

حل گزینه‌ی ۱.

$$x^۲-|x|\geqslant ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x\geqslant ۰ \Longrightarrow x^۲-x\geqslant ۰ \Longrightarrow x(x-۱)\geqslant ۰ \Longrightarrow x-۱\geqslant ۰ \Longrightarrow x\geqslant ۱ & (۱) \\ x<۰ \Longrightarrow x^۲+x\geqslant ۰ \Longrightarrow x(x+۱)\geqslant ۰ \Longrightarrow x+۱\leqslant ۰ \Longrightarrow x\leqslant -۱ & (۲) \end{cases}$$

$(۱)\cup(۲) \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-(-۱,۱)$

۳ـ۶۲ برای تعیین دامنه‌ی تعریف توابعی که ضابطه‌ی آن‌ها شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد است، کافی است دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال را تعیین کنیم.

مثال دامنه‌ی تعریف توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{x}{x^۲+۱}}$ ۲) $f(x)=\sqrt[۵]{[x]-۲}$

۳) $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۲}{|x|-۱}}$ ۴) $f(x)=\sqrt[۷]{\frac{x}{[x]+۲}}$

حل

۱) باید دامنه‌ی عبارت $\frac{x}{x^۲+۱}$ را پیدا کنیم:

$x^۲+۱=۰ \Longrightarrow$ جواب ندارد $\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

۲) باید دامنه‌ی عبارت $[x]-۲$ را پیدا کنیم، بدیهی است که $D_f=\mathbb{R}$.

۳) باید دامنه‌ی عبارت $\frac{۲}{|x|-۱}$ را پیدا کنیم:

$|x|-۱=۰ \Longrightarrow |x|=۱ \Longrightarrow x=\pm ۱ \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$

۴) باید دامنه‌ی عبارت $\frac{x}{[x]+۲}$ را پیدا کنیم:

$$[x]+۲=۰ \Longrightarrow [x]=-۲ \Longrightarrow -۲ \leqslant x < -۱ \Longrightarrow D_f = \mathbb{R}-[-۲,-۱)$$

تست دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲[x]-۱}}$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}-[۰,۱)$ ۴) $\mathbb{R}-\{۰\}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$\frac{۱}{۲[x]-۱}\ ,\ ۲[x]-۱=۰ \Longrightarrow [x]=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow \text{جواب ندارد} \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}$$

۳ـ۶۳ برای تعیین دامنه‌ی تعریف توابع شامل عبارت‌های لگاریتمی، به فرم کلی $f(x)=\log_{h(x)}^{g(x)}$، لازم است که $g(x)>۰$، $h(x)>۰$ و $h(x)\neq ۱$ باشد. با توجه به این محدودیت‌ها می‌توان دامنه‌ی تعریف توابع لگاریتمی را تعیین کرد. در حالت خاص، اگر $h(x)=e$ باشد، داریم $f(x)=\ln g(x)$، که برای تعیین دامنه کافی است تنها شرط $g(x)>۰$ را برقرار کنیم.

مثال دامنه‌ی تعریف توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=\log_x(x^۲-۱)$ ۲) $f(x)=\log x^۲$

۳) $f(x)=\log(\log_۲ x)$ ۴) $f(x)=\ln(\frac{۱}{x-۱})$

حل

۱) $$\begin{cases} x^۲-۱>۰ \\ x>۰ \\ x\neq ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>۱ \text{ یا } x<-۱ \\ x>۰ \\ x\neq ۱ \end{cases} \overset{\text{اشتراک}}{\Longrightarrow} D_f=(۱,+\infty)$$

۲) $$x^۲>۰ \Longrightarrow x\in\mathbb{R}-\{۰\} \Longrightarrow D_f=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$$

۳) $$\begin{cases} \log_۲ x>۰ \\ x>۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>۲^۰ \\ x>۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>۱ \\ x>۰ \end{cases} \Longrightarrow D_f=(۱,+\infty)$$

۴) $$\frac{۱}{x-۱}>۰ \Longrightarrow x-۱>۰ \Longrightarrow x>۱ \Longrightarrow D_f=(۱,+\infty)$$

تست دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\log(\frac{۱-x^۲}{x^۲-۱})$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) ϕ ۴) $\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\frac{۱-x^۲}{x^۲-۱}>۰ \Longrightarrow \frac{-(x^۲-۱)}{x^۲-۱}>۰ \Longrightarrow D_f=\phi$$

۴ـ۶۴ برای تعیین دامنه‌ی تعریف توابع شامل عبارت‌های نمایی، به فرم کلی $f(x)=b^{g(x)}$ یا در حالت خاص اگر $b=e$ باشد، داریم $f(x)=e^{g(x)}$، کافی است دامنه‌ی عبارت $g(x)$ را پیدا کنیم.

مثال دامنه‌ی توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x)=۳^{x^{-۲}}$ ۲) $f(x)=e^{[x]+[-x]}$

۳) $f(x)=(\frac{۱}{۲})^{\log x}$ ۴) $f(x)=e^{\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}}$

حل

۱) $g(x)=x^{-۲}=\frac{۱}{x^۲}\ ,\ x^۲=۰\Longrightarrow x=۰\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

۲) $g(x)=[x]+[-x]\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

۳) $g(x)=\log x\Longrightarrow x>۰\Longrightarrow D_f=(۰,+\infty)$

۴) $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}\Longrightarrow x^۲-۱>۰\Longrightarrow x^۲>۱\Longrightarrow x>۱$ یا $x<-۱$

$D_f=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

تست دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲^{\frac{-۱}{\sqrt{x-[x]}}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}-Z$ ۳) $\mathbb{R}^-$ ۴) ϕ

حل گزینه‌ی ۲.

$$g(x)=\frac{-۱}{\sqrt{x-[x]}}\Longrightarrow x-[x]>۰\Longrightarrow x>[x]\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-Z$$

بدیهی است که همواره جزء صحیح هر عدد غیرصحیح از خود آن عدد کوچک‌تر است.

۳ـ۶۵ در توابعی که شامل چند جزء هستند، برای یافتن دامنه، اشتراک اجزاء مختلف را تعیین می‌کنیم.

مثال دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=\sqrt{x^۲-۱}+\sqrt{۱-x^۲}+\frac{۱}{x+۱}$

۲) $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{\sqrt{۴-x^۲}}$

۳) $f(x)=\frac{[x]}{[-x]}+\frac{x}{[x]}$

۴) $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{x-۱}}$

۵) $f(x)=\sqrt{۲+\log_۲ x}$

۶) $f(x)=\sqrt{\ln(\frac{۱-x}{۱+x})}$

حل

۱)

$$x^۲-۱\geqslant۰\Longrightarrow x\geqslant۱\text{ یا }x\leqslant-۱\ ,\ ۱-x^۲\geqslant۰\Longrightarrow-۱\leqslant x\leqslant۱\ ,\ x+۱\neq۰\Longrightarrow x\neq-۱$$

از اشتراک شرایط اخیر دامنه‌ی تابع معین می‌شود: $D_f=\{۱\}$

۲)

$$\begin{cases}۴-x^۲>۰\Longrightarrow x^۲<۴\Longrightarrow-۲<x<۲\\ x^۲-۴\geqslant۰\Longrightarrow x^۲\geqslant۴\Longrightarrow x\geqslant۲\text{ یا }x\leqslant-۲\end{cases}$$

از اشتراک شرایط اخیر دامنه‌ی تابع معین می‌شود: $D_f=\phi$

۳)

$$\begin{cases}[-x]=۰\Longrightarrow۰\leqslant-x<۱\Longrightarrow-۱<x\leqslant۰\Longrightarrow x\in\mathbb{R}-(-۱,۰]\\ [x]=۰\Longrightarrow۰\leqslant x<۱\Longrightarrow x\in\mathbb{R}-[۰,۱)\end{cases}$$

از اشتراک شرایط اخیر دامنه‌ی تابع معین می‌شود:

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

۴)

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 1 \\ 1 - \sqrt{x-1} \geqslant 0 \Longrightarrow x - 1 \leqslant 1 \Longrightarrow x \leqslant 2 \end{cases}$$

از اشتراک شرایط اخیر دامنه‌ی تابع معین می‌شود: $D_f = [1, 2]$

۵)

$$\begin{cases} 2 + \log_2 x \geqslant 0 \Longrightarrow \log_2 x \geqslant -2 \Longrightarrow x \geqslant 2^{-2} \Longrightarrow x \geqslant \frac{1}{4} \\ x > 0 \end{cases}$$

از اشتراک شرایط اخیر دامنه‌ی تابع معین می‌شود: $D_f = [\frac{1}{4}, +\infty)$

۶)

$$\begin{cases} \ln(\frac{1-x}{1+x}) \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{1-x}{1+x} \geqslant 1 \Longrightarrow \frac{-2x}{1+x} \geqslant 0 \Longrightarrow x \in (-1, 0] \\ \frac{1-x}{1+x} > 0 \Longrightarrow x \in (-1, 1) \end{cases}$$

از اشتراک شرایط اخیر دامنه‌ی تابع معین می‌شود: $D_f = (-1, 0]$

تست دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\log(1-x) - 1}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, 1]$ ۲) $(-\infty, 1)$ ۳) $(-\infty, -9)$ ۴) $(-\infty, -9]$

حل گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} 1 - x > 0 \Longrightarrow x < 1 \\ \log(1-x) - 1 \geqslant 0 \Longrightarrow \log(1-x) \geqslant 1 \Longrightarrow 1 - x \geqslant 10 \Longrightarrow x \leqslant -9 \end{cases}$$

از اشتراک شرایط اخیر دامنه‌ی تابع به دست می‌آید: $D_f = (-\infty, -9]$

تست دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{[x] + [-x]}}$ کدام است؟

۱) $(0, +\infty)$ ۲) ϕ

۳) $\{1\}$ ۴) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

حل تابع f وقتی تعریف شده است که $[x] + [-x] > 0$ باشد و با توجه به این‌که عبارت $[x] + [-x]$ دو مقدار ۰ و -1 را اختیار می‌کند، پس تابع هیچ‌گاه تعریف‌شده نیست و $D_f = \phi$ است.

۳ـ۶۶ اگر ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = |g(x)|$ یا $f(x) = [g(x)]$، آنگاه $D_f = D_g$.

مثال دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x) = |x - \frac{1}{x}|$ ۲) $f(x) = [\sqrt{4 - x^2}]$

حل

۱) $g(x) = x - \frac{1}{x} \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

۲) $g(x) = \sqrt{4 - x^2} \Longrightarrow 4 - x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 \leqslant 4 \Longrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow D_f = [-2, 2]$

۶۷ـ۳ اگر f یک تابع و $D_f = [a,b]$، $a,b \in \mathbb{R}$، آنگاه برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع به معادله‌ی $y = f(g(x))$، باید $a \leqslant g(x) \leqslant b$.

مثال فرض کنید دامنه‌ی f بازه‌ی $[۰, ۱]$ باشد.

۱) دامنه‌ی تابع $g(x) = f(۳x^۲)$ را پیدا کنید.

۲) دامنه‌ی تابع $g(x) = f(۱ - x)$ را پیدا کنید.

حل

۱) $$۰ \leqslant ۳x^۲ \leqslant ۱ \Longrightarrow ۰ \leqslant x^۲ \leqslant \frac{۱}{۳} \Longrightarrow \frac{-\sqrt{۳}}{۳} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Longrightarrow D_g = \left[-\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right]$$

۲) $$۰ \leqslant ۱ - x \leqslant ۱ \Longrightarrow -۱ \leqslant -x \leqslant ۰ \Longrightarrow ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \Longrightarrow D_g = [۰, ۱]$$

تست فرض کنید دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $(۰, ۱)$ باشد. دامنه‌ی تابع $g(x) = f(\log x)$ کدام است؟

۱) $(۰, ۱۰)$ ۲) $(۰, ۱)$ ۳) $(۰, +\infty)$ ۴) $(۱, ۱۰)$

حل گزینه‌ی ۴.

$$۰ < \log x < ۱ \Longrightarrow ۱ < x < ۱۰ \Longrightarrow D_g = (۱, ۱۰)$$

۶۸ـ۳ دامنه‌ی تعریف توابع مثلثاتی با ضابطه‌های $f(x) = \sin(g(x))$ و $f(x) = \cos(g(x))$، برابر با دامنه‌ی تابع g است، یعنی: $D_f = D_g$.

مثال دامنه‌ی توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $f(x) = \sin\left(\frac{x^۲ - ۴}{x + ۲}\right)$ ۲) $f(x) = ۲\cos\left(\frac{x^۳ - ۱}{x^۲ + x + ۱}\right)$

حل

۱) $$x + ۲ = ۰ \Longrightarrow x = -۲ \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-۲\}$$

۲) $$x^۲ + x + ۱ = ۰ \Longrightarrow \Delta = ۱ - ۴ < ۰ \Longrightarrow \text{ریشه ندارد} \Longrightarrow D_f = \mathbb{R}$$

تست دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos\left(\log_۲(\log_۳ x)\right)$ کدام است؟

۱) $(۰, +\infty)$ ۲) $(۱, +\infty)$ ۳) $(۰, ۱)$ ۴) $(۲, ۳)$

حل گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} \log_۳ x > ۰ \Longrightarrow x > ۱ \\ x > ۰ \end{cases} \Longrightarrow D_f = (۱, +\infty)$$

۶۹ـ۳ برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \tan(g(x))$، معادله‌ی $g(x) = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ را حل می‌کنیم و مجموعه‌ی جواب فوق را از مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم می‌کنیم. برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cot(g(x))$، معادله‌ی $g(x) = k\pi$ را حل می‌کنیم و مجموعه‌ی جواب فوق را از مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم می‌کنیم.

مثال دامنه‌ی توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$ ۲) $f(x) = \cot ۲x$

حل

۱) $x - \frac{\pi}{۴} = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \Longrightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$

$D_f = \mathbb{R} - \{x | x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴}, k \in Z\}$

۲) $۲x = k\pi \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{x | x = \frac{k\pi}{۲}, k \in Z\right\}$

تست دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۳\tan x - ۴\cot x$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \left\{x | x = \frac{k\pi}{۲}\right\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{x | x = k\pi\}$

۳) $\mathbb{R} - \{۰\}$ ۴) $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{۲}, \frac{-\pi}{۲}\right\}$

حل گزینه‌ی ۱.

$$f(x) = \frac{۳\sin x}{\cos x} - \frac{۴\cos x}{\sin x} = \frac{۳\sin^۲ x - ۴\cos^۲ x}{\sin x \cos x}$$

$$\sin x \cos x = ۰ \Longrightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۲x = ۰ \Longrightarrow \sin ۲x = ۰ \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{x | x = \frac{k\pi}{۲}\right\}$$

۳ـ۷۰ اگر ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = \text{Arcsin}\left(g(x)\right)$ یا $f(x) = \text{Arccos}\left(g(x)\right)$، آنگاه برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع باید $-۱ \leqslant g(x) \leqslant ۱$.

مثال دامنه‌ی تعریف توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x-۲}{۳}\right)$ ۲) $f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+۱}\right)$

حل

۱) $-۱ \leqslant \frac{x-۲}{۳} \leqslant ۱ \Longrightarrow -۳ \leqslant x - ۲ \leqslant ۳ \Longrightarrow -۱ \leqslant x \leqslant ۵ \Longrightarrow D_f = [-۱, ۵]$

۲)

$$-۱ \leqslant \frac{x}{x+۱} \leqslant ۱ \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+۱} \geqslant -۱ \\ \frac{x}{x+۱} \leqslant ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{۲x+۱}{x+۱} \geqslant ۰ \\ \frac{۱}{x+۱} \geqslant ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < -۱ \text{ یا } x \geqslant -\frac{۱}{۲} \\ x > -۱ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x \geqslant -\frac{۱}{۲} \Longrightarrow D_f = [-\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

تست دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\text{Arcsin}(\log_۲ x)}$ کدام است؟

۱) $۱ \leqslant x \leqslant ۲$ ۲) $x \leqslant ۱$ ۳) $x \geqslant ۲$ ۴) $-۲ \leqslant x \leqslant ۱$

حل گزینه‌ی ۱.

$$\text{Arcsin}(\log_۲ x) \geqslant ۰ \Longrightarrow ۰ \leqslant \log_۲ x \leqslant ۱ \Longrightarrow \begin{cases} \log_۲ x \leqslant ۱ \\ \log_۲ x \geqslant ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leqslant ۲ \\ x \geqslant ۱ \end{cases} \Longrightarrow D_f = [۱, ۲]$$

۳ـ۷۱ اگر ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=\text{Arctan}\big(g(x)\big)$ یا $f(x)=\text{Arccot}\big(g(x)\big)$، آنگاه $D_f=D_g$.

مثال دامنه‌ی توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $f(x)=۲\,\text{Arctan}(۵x)$ ۲) $f(x)=\text{Arccot}(\ln x)$

حل

۱) $g(x)=۵x \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

۲) $g(x)=\ln x \Longrightarrow x>۰ \Longrightarrow D_f=(۰,+\infty)$

تست دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\text{Arctan}\sqrt{۱-\sqrt{۲x-۱}}$ کدام است؟

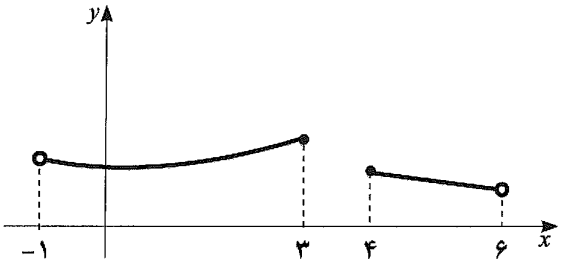
۱) $[\frac{۱}{۲},۱]$ ۲) $[-\frac{۱}{۲},۱]$ ۳) $[-۱,\frac{۱}{۲}]$ ۴) $[-۱,-\frac{۱}{۲}]$

حل گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases}۲x-۱\geqslant ۰\\ ۱-\sqrt{۲x-۱}\geqslant ۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\geqslant \frac{۱}{۲}\\ ۱\geqslant ۲x-۱\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\geqslant \frac{۱}{۲}\\ x\leqslant ۱\end{cases}\Longrightarrow D_f=[\tfrac{۱}{۲},۱]$$

۳ـ۷۲ اگر نمودار تابعی را در دست داشته باشیم، می‌توانیم دامنه‌ی تابع را تعیین کنیم. دامنه‌ی تابع قسمت یا قسمت‌هایی از محور xهاست که اگر از هر نقطه‌ی آن خطی موازی محور yها رسم کنیم، نمودار تابع را قطع کند. مثلاً

$$D_f=(-۱,۳]\cup[۴,۶)$$



نحوه‌ی تعیین بُرد تابع

۳ـ۷۳ برای تعیین بُرد درصورت امکان x را برحسب y حل می‌کنیم و سپس مجموعه‌ی yهایی که به‌ازای آن‌ها برای x مقدار حقیقی به دست می‌آید را به‌عنوان برد تابع معرفی می‌کنیم. به‌عبارت دیگر حدود y یا $f(x)$ را چنان پیدا می‌کنیم که x وجود داشته باشد.

مثال بُرد توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $y=x^۲+۶x+۱$

۲) $y=\dfrac{۲x}{x^۲+۱}$

۳) $y=\dfrac{x^۳+۳x^۲+۲x}{x(x+۱)(x^۲-۴)}$

۴) $y=\sqrt{۴-x^۲}$

۵) $y=۱+\sqrt{۲x-x^۲}$

۶) $y=۲x\sqrt{۱-x^۲}$

۷) $y=\log(\dfrac{x-۲}{x+۲})$

۸) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

حل

۱)

$$y = x^۲ + ۶x + ۱ \Longrightarrow x^۲ + ۶x + (۱ - y) = ۰ \Longrightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a}$$

$$x = -۳ \pm \sqrt{۹ - (۱ - y)} \Longrightarrow x = -۳ \pm \sqrt{۸ + y}$$

لذا

$$۸ + y \geqslant ۰ \Longrightarrow y \geqslant -۸ \Longrightarrow R_f = [-۸, +\infty)$$

۲)

$$y = \frac{۲x}{x^۲ + ۱} \Longrightarrow yx^۲ + y = ۲x \Longrightarrow yx^۲ - ۲x + y = ۰$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a} \Longrightarrow x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ - y^۲}}{y}$$

x وقتی وجود دارد که:

$$۱ - y^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow y^۲ \leqslant ۱ \Longrightarrow -۱ \leqslant y \leqslant ۱$$

آیا $y = ۰$ در برد تابع وجود دارد؟ در معادله‌ی تابع به‌جای y صفر قرار می‌دهیم، اگر xای عضو D_f برای آن به دست آید، لازم نیست $y = ۰$ را از برد تابع برداریم.

$$y = ۰ \Longrightarrow \frac{۲x}{x^۲ + ۱} = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \in D_f \Longrightarrow R_f = [-۱, ۱]$$

۳)

$$D_f = \mathbb{R} - \{-۲, -۱, ۰, ۲\}$$

اکنون با توجه به دامنه‌ی تابع، ضابطه‌ی تابع را تا جای ممکن ساده می‌کنیم.

$$y = \frac{x(x+۱)(x+۲)}{x(x+۱)(x+۲)(x-۲)}$$

با توجه به این‌که $x \neq -۲, x \neq -۱, x \neq ۰$:

$$y = \frac{۱}{x - ۲} \Longrightarrow x = \frac{۱}{y} + ۲$$

برای حقیقی بودن x باید $y \neq ۰$. از طرفی باید عرض هریک از مقادیر $x = ۰$، $x = -۱$ و $x = -۲$ را حساب کنیم و در تعیین بُرد مجموعه‌ی فوق را از $\mathbb{R}$ کم کنیم.

$$f(۰) = \frac{-۱}{۲}\ ,\ f(-۱) = \frac{-۱}{۳}\ ,\ f(-۲) = \frac{-۱}{۴}$$

بنابراین

$$R_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۲}, ۰\right\}$$

۴) داریم $D_f = [-۲, ۲]$. ابتدا از ضابطه‌ی تابع نتیجه می‌شود $y \geqslant ۰$، هم‌چنین:

$$y = \sqrt{۴ - x^۲} \Longrightarrow y^۲ = ۴ - x^۲ \Longrightarrow x = \pm\sqrt{۴ - y^۲}$$

برای حقیقی بودن x باید:

$$\begin{cases} ۴-y^۲ \geqslant ۰ \\ y \geqslant ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۲ \leqslant y \leqslant ۲ \\ y \geqslant ۰ \end{cases} \Longrightarrow R_f = [۰, ۲]$$

۵) کم‌ترین مقدار $\sqrt{۲x-x^۲}$، صفر است، پس کم‌ترین مقدار y برابر ۱ است. بنابراین باید $y \geqslant ۱$.

$$y = ۱ + \sqrt{۲x-x^۲} \Longrightarrow (y-۱)^۲ = -x^۲ + ۲x \Longrightarrow x^۲ - ۲x + (y-۱)^۲ = ۰$$
$$x = ۱ \pm \sqrt{۱-(y-۱)^۲} \Longrightarrow ۱-(y-۱)^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow (y-۱)^۲ \leqslant ۱$$

لذا

$$\begin{cases} y \geqslant ۱ \\ (y-۱)^۲ \leqslant ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y \geqslant ۱ \\ -۱ \leqslant y-۱ \leqslant ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y \geqslant ۱ \\ ۰ \leqslant y \leqslant ۲ \end{cases} \Longrightarrow R_f = [۱, ۲]$$

۶)

$$y = ۲x\sqrt{۱-x^۲} \Longrightarrow \frac{y^۲}{۴} = x^۲(۱-x^۲) \Longrightarrow \frac{y^۲}{۴} - \frac{۱}{۴} = -\frac{۱}{۴} + x^۲ - x^۴ \Longrightarrow$$
$$\frac{y^۲}{۴} - \frac{۱}{۴} = -\left(x^۲ - \frac{۱}{۲}\right)^۲ \Longrightarrow -y^۲ + ۱ = ۴\left(x^۲ - \frac{۱}{۲}\right)^۲ \Longrightarrow \sqrt{۱-y^۲} = ۲\left(x^۲ - \frac{۱}{۲}\right)$$
$$۱-y^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow y^۲ \leqslant ۱ \Longrightarrow -۱ \leqslant y \leqslant ۱ \Longrightarrow R_f = [-۱, ۱]$$

۷) $D_f : x < -۲$ یا $x > ۲$، بنابراین:

$$\frac{x-۲}{x+۲} = ۱۰^y \Longrightarrow x-۲ = x \times ۱۰^y + ۲ \times ۱۰^y \Longrightarrow x = \frac{۲(۱+۱۰^y)}{۱-۱۰^y}$$

چون $x \in D_f$:

$$\frac{۲(۱+۱۰^y)}{۱-۱۰^y} > ۲ \quad \text{یا} \quad \frac{۲(۱+۱۰^y)}{۱-۱۰^y} < -۲$$

لذا

$$\frac{۴ \times ۱۰^y}{۱-۱۰^y} > ۰ \quad \text{یا} \quad \frac{۴}{۱-۱۰^y} < ۰$$

باید

$$۱-۱۰^y \neq ۰ \Longrightarrow ۱۰^y \neq ۱ \Longrightarrow y \neq ۰ \Longrightarrow R_f = \mathbb{R} - \{۰\}$$

۸)

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Longrightarrow y = \frac{e^x - e^{\frac{۱}{x}}}{e^x + \frac{۱}{e^x}} = \frac{e^{۲x}-۱}{e^{۲x}+۱} \Longrightarrow ye^{۲x} + y = e^{۲x} - ۱ \Longrightarrow$$
$$e^{۲x} = \frac{۱+y}{۱-y} \Longrightarrow ۲x = \ln(\frac{۱+y}{۱-y}) \Longrightarrow x = \frac{۱}{۲}\ln(\frac{۱+y}{۱-y})$$

برای حقیقی بودن x باید

$$\frac{۱+y}{۱-y} > ۰ \Longrightarrow -۱ < y < ۱ \Longrightarrow R_f = (-۱, ۱)$$

تست برد تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x}{|x-1|}$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(-1,+\infty)$

حل گزینه‌ی ۴. داریم $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$، پس:

$$y = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x > 1 \Longrightarrow xy - y = x \Longrightarrow x = \frac{y}{y-1} \Longrightarrow \frac{y}{y-1} > 1 \Longrightarrow y > 1 \\ \frac{-x}{x-1} & x < 1 \Longrightarrow xy - y = -x \Longrightarrow x = \frac{y}{y+1} \Longrightarrow \frac{y}{y+1} < 1 \Longrightarrow y > -1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow R_f = (-1,+\infty)$$

تست برد تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۱) $(1,+\infty)$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $(0,1]$ ۴) $[0,1)\cup(1,+\infty)$

حل گزینه‌ی ۱. از $D_f = (1,+\infty)$ و ضابطه‌ی تابع نتیجه می‌شود که $y > 0$.

$$y^2 = \frac{x}{x-1} \Longrightarrow x = \frac{y^2}{y^2-1} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{y^2-1} > 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} y^2 - 1 > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y > 1 \text{ یا } y < -1 \\ y > 0 \end{cases} \Longrightarrow R_f = (1,+\infty)$$

تست برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geqslant -2 \\ 5x & x < -2 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - [-1,-4]$ ۲) $\mathbb{R} - [-10,-4)$ ۳) $\mathbb{R} - [-10,-4]$ ۴) $\mathbb{R} - (-10,-4)$

حل گزینه‌ی ۲. برای هر $x \in \mathbb{R}$ با توجه به ضابطه‌ی تابع داریم:

$$\begin{cases} y = 3x+2 & x \geqslant -2 \\ y = 5x & x < -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{3} - \frac{2}{3} \geqslant -2 \Longrightarrow y \geqslant -4 \\ x = \frac{y}{5} < -2 \Longrightarrow y < -10 \end{cases} \Longrightarrow R_f = \mathbb{R} - [-10,-4)$$

۳ـ۷۴ بُرد توابع شامل جزء صحیح را با استفاده از قانون‌های جزء صحیح به دست می‌آوریم.

مثال بُرد توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y = [7 + x^2]$

۲) $y = 3[x] + 3[-x]$

۳) $y = \frac{2[x] - 2x}{x - [x]}$

۴) $y = \frac{[4-x] + [-x]}{[3-x] + [1-x]}$

حل

۱) بدیهی است که $D_f = \mathbb{R}$، چون به ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$7 + x^2 \geqslant 7 \Longrightarrow R_f = \{7, 8, 9, \dots\}$$

۲)

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}\Longrightarrow y=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -3 & x\notin Z\end{cases}\Longrightarrow R_f=\{-3,0\}$$

۳)

$$y=\frac{-2(x-[x])}{x-[x]}=-2\Longrightarrow R_f=\{-2\}$$

۴)

$$y=\frac{4+[-x]+[-x]}{3+[-x]+1+[-x]}=\frac{[-x]+2}{[-x]+2}=1\Longrightarrow R_f=\{1\}$$

تست برد تابع با ضابطه‌ی $y=(-1)^{[x-2]+[2-x]}$ کدام است؟

۱) $\{-1,0\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\{-1\}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$y=(-1)^{[x]-2+2+[-x]}=(-1)^{[x]+[-x]}\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\neq Z\end{cases}\Longrightarrow y=\begin{cases}(-1)^0=1 & x\in Z\\ (-1)^{-1}=-1 & x\notin Z\end{cases}\Longrightarrow R_f=\{-1,1\}$$

۳ـ۷۵ برد تابع را می‌توان به کمک تشکیل جدول تغییرات تابع محاسبه کرد، بدین‌ترتیب که از معادله‌ی تابع مشتق می‌گیریم و جواب‌های آن را به دست می‌آوریم. سپس جدول تغییرات تابع را رسم می‌کنیم. تغییرات y یا $f(x)$ در سطر سوم جدول تغییرات، بُرد تابع را نشان می‌دهد.

مثال بُرد توابع زیر را حساب کنید.

۱) $f(x)=x^2-3x+2$

۲) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

۳) $f(x)=e^{-x^2}$

۴) $f(x)=\ln(x+1)$

حل

۱)

$$f'(x)=0\Longrightarrow 2x-3=0\Longrightarrow x=\frac{3}{2}\Longrightarrow y=f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^2)=+\infty$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

مشاهده می‌شود که y از $-\frac{1}{4}$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، پس $R_f=[-\frac{1}{4},+\infty)$.

۲)

$$f'(x)=0\Longrightarrow\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=0\Longrightarrow x=-1,x=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

مشاهده می‌شود که y از ۰ تا ۲ تغییر می‌کند، پس $R_f = [0, 2]$.

۳)

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = \frac{e}{+\infty} = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0

مشاهده می‌شود که y از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، پس $R_f = (0, 1]$.

۴)

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{x+1} = 0 \Longrightarrow \text{ریشه ندارد}$$

به‌ازای $x = -1$، مشتق وجود ندارد.

$$\lim_{x \to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$$

x	-1		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

مشاهده می‌شود که y از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، پس $R_f = (-\infty, +\infty)$.

تست بُرد تابع $y = x - \sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲) $[\frac{-1}{4}, +\infty)$ ۳) $(-\infty, \frac{-1}{4})$ ۴) $(-\infty, 0]$

حل گزینه‌ی ۲.

$$D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}\ ,\ y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{4}\ ,\ y = f(\frac{1}{4}) = \frac{-1}{4}$$

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

$$\Longrightarrow R_f = [-\frac{1}{4}, +\infty)$$

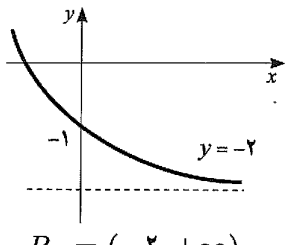
۳ـ۷۶ اگر نمودار تابعی در دست باشد، بُرد تابع قسمت یا قسمت‌هایی از محور yهاست که اگر از هر نقطه‌ی آن خطی موازی محور x رسم کنیم، نمودار تابع را قطع کند.

مثال برد توابع زیر را بیابید.

۱) $y = e^{-x} - 2$ ۲) $y = \sqrt{x-1} + 1$

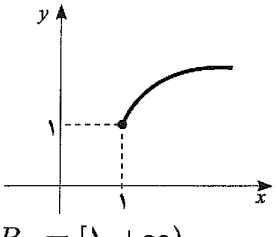
حل

۱)



$R_f = (-2, +\infty)$

۲)



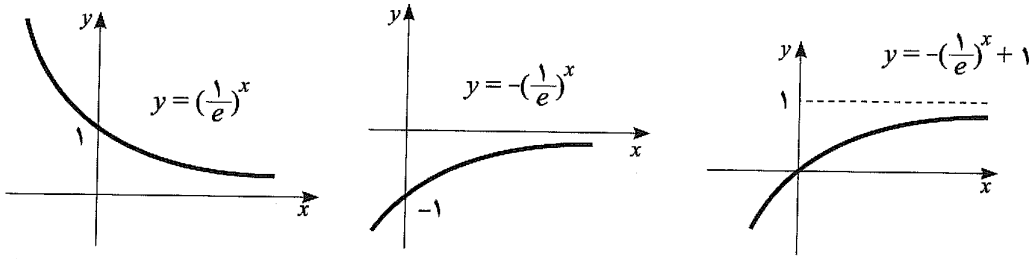
$R_f = [1, +\infty)$

تست بُرد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -e^{-x} + ۱$ کدام است؟

۱) $(-\infty, ۱)$ ۲) $(-\infty, +\infty)$ ۳) $(۰, +\infty)$ ۴) $[۰, +\infty)$

حل گزینه‌ی ۱.

$$y = -e^{-x} + ۱ \Longrightarrow y = -\left(\frac{۱}{e}\right)^{x} + ۱$$



۳ـ۷۷ بُرد تابع را می‌توان به کمک برخی از نامساوی‌ها محاسبه کرد. مثلاً اگر $u > ۰$ باشد، همواره $u + \frac{۱}{u} \geqslant ۲$ است و تساوی وقتی برقرار است که $u = ۱$ باشد. هم‌چنین اگر $u < ۰$ باشد، همواره $u + \frac{۱}{u} \leqslant -۲$ است و تساوی وقتی برقرار است که $u = -۱$ باشد و برخی دیگر از نامساوی‌های موجود.

مثال برد توابع زیر را بیابید.

۱) $y = \dfrac{۳x^{۶}}{x^{۱۲} + ۱}$

۲) $y = \dfrac{|x|}{|x| + ۱}$

۳) $y = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{۴}$

۴) $y = ۲\sin x + ۱$

حل

۱) $D_f = \mathbb{R}$. با توجه به $f(۰) = ۰$، اگر فرض کنیم $x \neq ۰$ باشد

$$y = \frac{۳}{\frac{x^{۱۲}+۱}{x^{۶}}} = \frac{۳}{x^{۶} + \frac{۱}{x^{۶}}}$$

چون $x^{۶} + \frac{۱}{x^{۶}} \geqslant ۲$ و $\frac{۳x^{۶}}{x^{۱۲}+۱} \geqslant ۰$، بنابراین:

$$۰ \leqslant y \leqslant \frac{۳}{۲} \Longrightarrow R_f = [۰, \frac{۳}{۲}]$$

۲) می‌دانیم اگر $u \geqslant ۰$ باشد، آنگاه $۰ \leqslant \frac{u}{u+۱} < ۱$. پس

$$۰ \leqslant \frac{|x|}{|x|+۱} < ۱ \Longrightarrow ۰ \leqslant y < ۱ \Longrightarrow R_f = [۰, ۱)$$

۳)

$$f(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{۴} = \frac{۱}{۴}(e^{x} + \frac{۱}{e^{x}})$$

چون $e^{x} > ۰$، پس $e^{x} + \frac{۱}{e^{x}} \geqslant ۲$، لذا

$$\frac{۱}{۴}(e^{x} + \frac{۱}{e^{x}}) \geqslant \frac{۱}{۴} \times ۲ \Longrightarrow y \geqslant \frac{۱}{۲} \Longrightarrow R_f = [\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

۴)

$$-۱ \leqslant \sin x \leqslant ۱ \Longrightarrow -۲ \leqslant ۲\sin x \leqslant ۲ \Longrightarrow -۲+۱ \leqslant ۲\sin x+۱ \leqslant ۲+۱$$
$$\Longrightarrow -۱ \leqslant ۲\sin x+۱ \leqslant ۳ \Longrightarrow -۱ \leqslant y \leqslant ۳ \Longrightarrow R_f=[-۱,۳]$$

تست بُرد تابع $f(x)=۲^{|x|-۱}$ کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۲) $(۰,+\infty)$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $[۲,+\infty)$

حل گزینه‌ی ۱.

$$|x| \geqslant ۰ \Longrightarrow |x|-۱ \geqslant -۱ \Longrightarrow ۲^{|x|-۱} \geqslant ۲^{-۱} \Longrightarrow f(x) \geqslant \frac{۱}{۲} \Longrightarrow R_f=[\frac{۱}{۲},+\infty)$$

۳ـ۷۸ بُرد توابع مثلثاتی: همان‌طورکه می‌دانیم $-۱ \leqslant \sin x \leqslant ۱$ و $-۱ \leqslant \cos x \leqslant ۱$. حالا می‌خواهیم به برد برخی از توابعی که شامل فقط $\sin x$ یا فقط $\cos x$ باشند، بپردازیم.

مثال بُرد هریک از توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y=۳\sin x-۱$

۲) $y=\frac{۱}{\sqrt{۲\sin x-۱}}$

۳) $y=[\cos x]$

۴) $y=\frac{\cos x-۱}{۲\cos x+۳}$

حل

۱)

$$-۱ \leqslant \sin x \leqslant ۱ \Longrightarrow -۳ \leqslant ۳\sin x \leqslant ۳ \Longrightarrow -۴ \leqslant ۳\sin x-۱ \leqslant ۲$$
$$\Longrightarrow -۴ \leqslant y \leqslant ۲ \Longrightarrow R_y=[-۴,۲]$$

۲)

$$-۱ \leqslant \sin x \leqslant ۱ \Longrightarrow -۲ \leqslant ۲\sin x \leqslant ۲ \Longrightarrow -۳ \leqslant ۲\sin x-۱ \leqslant ۱$$

از قسمت بزرگ‌تر از یا مساوی صفر بالا جذر می‌گیریم، یعنی:

$$۰ \leqslant ۲\sin x-۱ \leqslant ۱ \Longrightarrow ۰ \leqslant \sqrt{۲\sin x-۱} \leqslant ۱ \Longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲\sin x-۱}} \geqslant ۱ \Longrightarrow R_y=[۱,+\infty)$$

۳)

$$-۱ \leqslant \cos x \leqslant ۱ \Longrightarrow \begin{cases} -۱ \leqslant \cos x < ۰ \Longrightarrow [\cos x]=-۱ \\ ۰ \leqslant \cos x < ۱ \Longrightarrow [\cos x]=۰ \Longrightarrow R_y=\{-۱,۰,۱\} \\ \cos x=۱ \Longrightarrow [\cos x]=۱ \end{cases}$$

۴)

$$y=\frac{g-۱}{۲g+۳} \Longrightarrow g-۱=۲gy+۳y \Longrightarrow g=\frac{۱+۳y}{۱-۲y}$$

می‌دانیم $g(x)=\cos x$ و $-۱ \leqslant g(x) \leqslant ۱$، پس:

$$-۱ \leqslant \frac{۱+۳y}{۱-۲y} \leqslant ۱ \Longrightarrow |\frac{۱+۳y}{۱-۲y}| \leqslant ۱ \Longrightarrow \frac{|۱+۳y|}{|۱-۲y|} \leqslant ۱ \Longrightarrow |۱+۳y| \leqslant |۱-۲y|$$
$$\Longrightarrow ۱+۶y+۹y^۲ \leqslant ۱-۴y+۴y^۲ \Longrightarrow ۵y^۲+۱۰y \leqslant ۰ \Longrightarrow ۵y(y+۲) \leqslant ۰$$
$$\Longrightarrow -۲ \leqslant y \leqslant ۰ \Longrightarrow R_y=[-۲,۰]$$

تساوی دو تابع

۳ـ۷۹ دو تابع f و g مساوی‌اند، اگر و فقط اگر

اولاً: دامنه‌ی آن‌ها مساوی باشد: $D_f=D_g$

ثانیاً: به‌ازای هر x از دامنه‌ی آن‌ها $f(x)=g(x)$ باشد.

مثال کدام یک از جفت تابع‌های معرفی‌شده در زیر با هم مساوی‌اند؟

۱) $\begin{cases} f(x)=\frac{x}{x} \\ g(x)=۱ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x)=\log x^۲ \\ g(x)=۲\log x \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=۰ \\ g(x)=[\frac{x^۲}{x^۲+۱}] \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x)=|x^۲-x| \\ g(x)=|x|\,|۱-x| \end{cases}$

حل

۱) $$f(x)=\frac{x}{x} \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\} \ , \ g(x)=۱ \Longrightarrow D_g=\mathbb{R}$$

چون $D_f \neq D_g$، پس f و g مساوی نیستند.

۲) $$f(x)=\log x^۲ : x^۲>۰ \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\} \ , \ g(x)=۲\log x : x>۰ \Longrightarrow D_g=(۰,+\infty)$$

چون $D_f \neq D_g$، پس f و g مساوی نیستند.

۳) $$f(x)=۰ \Longrightarrow D_f=\mathbb{R} \ , \ g(x)=[\frac{x^۲}{x^۲+۱}] \Longrightarrow D_g=\mathbb{R}$$

از طرفی $$۰ \leqslant \frac{x^۲}{x^۲+۱}<۱ \Longrightarrow g(x)=[\frac{x^۲}{x^۲+۱}]=۰=f(x)$$

پس f و g مساوی هستند.

۴) $$f(x)=|x^۲-x| \Longrightarrow D_f=\mathbb{R} \ , \ g(x)=|x|\,|۱-x| \Longrightarrow D_g=\mathbb{R}$$

پس $D_f=D_g$. اما:

$$g(x)=|x|\,|۱-x|=|x(۱-x)|=|x-x^۲| \neq f(x)$$

بنابراین f و g مساوی نیستند.

تست کدام یک از توابع زیر با $f(x)=x+۲$ برابر است؟

۱) $g(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$ ۲) $g(x)=۲+\sqrt{x^۲}$

۳) $g(x)=\dfrac{x^۳+۲x^۲+x+۲}{x^۲+۱}$ ۴) $g(x)=\sqrt{x^۲+۴x+۴}$

حل گزینه‌ی ۳. دامنه‌ی تابع $y=x+۲$ برابر $D_f=\mathbb{R}$ است.

گزینه‌ی ۱: $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}\Longrightarrow D_f\neq D_g$

گزینه‌ی ۲: $D_g=\mathbb{R}, g(x)=۲+|x|\Longrightarrow f(x)\neq g(x)$

گزینه‌ی ۳: $D_g=\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{(x^۲+۱)(x+۲)}{x^۲+۱}=x+۲\Longrightarrow D_f=D_g, f(x)=g(x)$

گزینه‌ی ۴: $D_g=\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{(x+۲)^۲}=|x+۲|\Longrightarrow f(x)\neq g(x)$

تست اگر $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱} & x\neq ۱\\ ۲k-۶ & x=۱\end{cases}$ برابر باشند، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۴.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} & x\neq ۱\\ ۲k-۶ & x=۱\end{cases}\Longrightarrow g(x)=\begin{cases}x+۱ & x\neq ۱\\ ۲k-۶ & x=۱\end{cases}$$

باید $f(۱)=g(۱)$ باشد، لذا:

$$۲k-۶=۱+۱\Longrightarrow k=۴$$

۳ـ۸۰ها $f(x)$

۳ـ۸۰ مسأله‌ی اصلی $f(x)$: یعنی، $f(x)$ معلوم است و $f\big(h(x)\big)$ را می‌خواهیم محاسبه کنیم. $h(x)$ هر عبارتی می‌تواند باشد. بدیهی است برای محاسبه‌ی $f\big(h(x)\big)$ باید در عبارت $f(x)$ به‌جای x مقدار $h(x)$ را قرار دهیم. باید توجه داشت که این عمل، یک عمل جای‌گذاری است و به‌معنی این‌که $h(x)$ با x مساوی است، نیست.

مثال تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲-۳x+۱$ مفروض است. مطلوب است محاسبه‌ی هریک از عبارت‌های زیر:

۱) $f(۲x+۱)$ ۲) $\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$

حل

۱)

$$\begin{aligned}f(۲x+۱)&=(۲x+۱)^۲-۳(۲x+۱)+۱=۴x^۲+۴x+۱-۶x-۳+۱\\&=۴x^۲-۲x-۱\end{aligned}$$

۲)

$$\begin{aligned}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}&=\frac{(۱+h)^۲-۳(۱+h)+۱-(۱-۳+۱)}{h}\\&=\frac{۱+۲h+h^۲-۳-۳h+۱+۱}{h}=\frac{h^۲-h}{h}=\frac{h(h-۱)}{h}=h-۱\end{aligned}$$

مثال در تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$، اگر اتحاد $f(x+۱)-f(x)=۸x+۳$ همواره برقرار باشد، a و b را بیابید.

حل

$$f(x+۱)-f(x)=۸x+۳ \Longrightarrow a(x+۱)^۲+b(x+۱)+c-(ax^۲+bx+c)=۸x+۳$$
$$\Longrightarrow ax^۲+۲ax+a+bx+b+c-ax^۲-bx-c=۸x+۳$$
$$\Longrightarrow ۲ax+(a+b)=۸x+۳$$
$$\begin{cases} ۲a=۸ \Longrightarrow a=۴ \\ a+b=۳ \Longrightarrow b=-۱ \end{cases}$$

تست اگر $f(x)=۳^x$، آنگاه $f(x+۲)-۲f(x+۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $f(x)$ ۳) $۲f(x)$ ۴) $۳f(x)$

حل گزینه‌ی ۴.

$$f(x+۲)-۲f(x+۱)=۳^{x+۲}-۲\times ۳^{x+۱}=(۳^x\times ۳^۲)-۲(۳^x\times ۳^۱)$$
$$=۳^x(۹-۶)=۳\times ۳^x=۳f(x)$$

۳ـ۸۱ مسأله‌ی معکوس $f(x)$: یعنی، $f\big(h(x)\big)$ معلوم است و $f(x)$ را می‌خواهیم محاسبه کنیم.

روش اول) با فرض $h(x)=t$ اگر بتوانیم x را برحسب t به‌دست می‌آوریم در این صورت $f(t)$ را برحسب t تعیین و به‌جای t، x را جایگزین می‌کنیم.

روش دوم) اگر با فرض $h(x)=t$ نتوانیم x را برحسب t به‌دست آوریم $f(h(x))$ را به‌صورت ترکیبی از $h(x)$ درآورده و سپس $f(t)$ را به‌دست می‌آوریم و از آن‌جا $f(x)$ تعیین می‌شود.

مثال اگر $f(۲x-۱)=۴x^۲-۴x+۵$، آنگاه $f(x)$ را بیابید.

حل

$$۲x-۱=t \Longrightarrow x=\frac{۱+t}{۲}$$
$$f(t)=۴\left(\frac{۱+t}{۲}\right)^۲-۴\left(\frac{۱+t}{۲}\right)+۵=t^۲+۴$$

اکنون به‌جای t، x را قرار می‌دهیم.

$$f(x)=x^۲+۴$$

مثال اگر $f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، آنگاه $f(x)$ را بیابید.

حل عبارت سمت راست را برحسب $x+\frac{۱}{x}$ می‌نویسیم، سپس درکل تساوی $\left(x+\frac{۱}{x}\right)$ را به x تبدیل می‌کنیم.

$$x^۲+\frac{۱}{x^۲}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۲x\left(\frac{۱}{x}\right)=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۲$$
$$x+\frac{۱}{x} \xrightarrow{\text{تبدیل}} x \Longrightarrow f(x)=x^۲-۲$$

مثال اگر $f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$، آنگاه $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ را بیابید.

حل عبارت سمت راست را برحسب $x+\frac{۱}{x}$ می‌نویسیم، سپس درکل تساوی $\left(x+\frac{۱}{x}\right)$ را به $\frac{۱}{x}$ تبدیل می‌کنیم:

$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۳-۳x\left(\frac{۱}{x}\right)\left(x+\frac{۱}{x}\right)=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۳-۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)$$

$$x+\frac{۱}{x}\xrightarrow{\text{تبدیل}}\frac{۱}{x}\Longrightarrow f\left(\frac{۱}{x}\right)=\left(\frac{۱}{x}\right)^۳-۳\left(\frac{۱}{x}\right)$$

تست اگر $f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{x^۲}{۱-x^۲}$، آنگاه $f(۱-x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^۲-۱}{x^۲-۲x}$ ۲) $\frac{x^۲-۱}{۲x-x^۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲x-x^۲}$ ۴) $\frac{۱}{x^۲-۲x}$

حل گزینه‌ی ۴. صورت و مخرج کسر را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{\frac{۱}{x^۲}-۱}=\frac{۱}{(\frac{۱}{x})^۲-۱}$$

در سراسر مسأله به‌جای $\frac{۱}{x}$، مقدار $x-۱$ را قرار می‌دهیم.

$$f(۱-x)=\frac{۱}{(۱-x)^۲-۱}=\frac{۱}{x^۲-۲x}$$

تست اگر $f\left(\frac{۴x+۳}{۴x-۳}\right)=\frac{۲۸x-۹}{۴x-۳}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $۲x+۵$ ۲) $۲x+۳$ ۳) $۲x+۱$ ۴) $۲x-۱$

حل گزینه‌ی ۱. راه کوتاه: به x عددی نسبت می‌دهیم، مثلاً: $x=۱$، در نتیجه $f(۷)=۱۹$. جوابی درست است که $f(۷)$ آن ۱۹ شود. پس گزینه‌ی (۱) درست است.

۳ـ۸۲ مسائلی است به صورت $af\big(h(x)\big)+bf\big(t(x)\big)=g(x)$ و می‌خواهیم $f(x)$ را محاسبه کنیم. باید عملی انجام دهیم که $h(x)$ و $t(x)$ به یکدیگر تبدیل شوند. آنگاه دستگاه حاصل را حل و $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

مثال اگر $۳f(x)+۲f(-x)=۱۰x-۱۲$، آنگاه $f(x)$ را بیابید.

حل اگر در رابطه‌ی بالا x را به $-x$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$۳f(-x)+۲f(x)=-۱۰x-۱۲$$

اکنون با رابطه‌ی اولیه یک دستگاه می‌سازیم:

$$\begin{cases}۳f(x)+۲f(-x)=۱۰x-۱۲\\ ۳f(-x)+۲f(x)=-۱۰x-۱۲\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}۹f(x)+۶f(-x)=۳۰x-۳۶\\ -۶f(-x)-۴f(x)=۲۰x+۲۴\end{cases}$$

$$\Longrightarrow ۵f(x)=۵۰x-۱۲\Longrightarrow f(x)=۱۰x-\frac{۱۲}{۵}$$

تست اگر $f(x)+xf(-x)=x^{۲}+۱$، آنگاه $f(۲)$ چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

حل گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases} x=۲ \\ x=-۲ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(۲)+۲f(-۲)=۵ \\ f(-۲)-۲f(۲)=۵ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(۲)+۲f(-۲)=۵ \\ -۲f(-۲)+۴f(۲)=-۱۰ \end{cases} \Longrightarrow f(۲)=-۱$$

اعمال روی توابع (جبر توابع)

۸۳ـ۳ مانند اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم در اعداد حقیقی در توابع نیز می‌توان اعمال ذکرشده را انجام داد و توابع جدیدی ساخت.

۸۴ـ۳ اگر f و g دو تابع حقیقی باشند، برای هر x متعلق به اشتراک دامنه‌های f و g، جمع و تفریق و ضرب و تقسیم توابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{array}{lcl} (f+g)(x)=f(x)+g(x) & ; & D_{f+g}=D_f\cap D_g \\ (f-g)(x)=f(x)-g(x) & ; & D_{f-g}=D_f\cap D_g \\ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) & ; & D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} & ; & D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\} \end{array}$$

۸۵ـ۳ طبق تعریف، اعمال فوق در دامنه‌ی مشترک توابع f و g و روی مقدار آن‌ها (روی yها) انجام می‌شود.

مثال اگر $f=\{(۱,۲),(-۱,۳),(۰,۴),(۵,۱)\}$ و $g=\{(۱,۳),(-۱,۴),(۵,۰),(۳,-۱)\}$ باشد، هریک از توابع $f+g$، $f-g$، $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

حل

$$D_f=\{۱,-۱,۰,۵\}\ ,\ D_g=\{۱,-۱,۵,۳\}\Longrightarrow D_{f\pm g}=D_{f\cdot g}=\{-۱,۱,۵\}$$

بنابراین:

$$f+g=\{(-۱,۳+۴),(۱,۲+۳),(۵,۱+۰)\}=\{(-۱,۷),(۱,۵),(۵,۱)\}$$
$$f-g=\{(-۱,۳-۴),(۱,۲-۳),(۵,۱-۰)\}=\{(-۱,-۱),(۱,-۱),(۵,۱)\}$$
$$f\cdot g=\{(-۱,۳\times۴),(۱,۲\times۳),(۵,۱\times۰)\}=\{(-۱,۱۲),(۱,۶),(۵,۰)\}$$

اما دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ اندکی با دامنه‌ی توابع فوق تفاوت دارد، زیرا اگر در یک مقدار، $g(x)$ صفر شود، $\frac{f}{g}$ قابل‌تعریف نیست.

به‌ازای $x=۵$، داریم $g(۵)=۰$، پس دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ شامل دامنه‌ی مشترک f و g به‌جز ۵ است:

$$D_{\frac{f}{g}}=\{-۱,۱\}\Longrightarrow\frac{f}{g}=\left\{\left(-۱,\frac{۳}{۴}\right),\left(۱,\frac{۲}{۳}\right)\right\}$$

مثال اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$ باشد، دامنه‌ی تابع‌های $f+g$، $f-g$، $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید، سپس حاصل اعمال را بنویسید.

حل

$$x-۱=۰ \Longrightarrow x=۱ \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$
$$x-۲>۰ \Longrightarrow x>۲ \Longrightarrow D_g=(۲,+\infty)$$
$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=(۲,+\infty)$$

چون همواره $g(x)>۰$ و $g(x)\neq ۰$، پس $D_{\frac{f}{g}}$ همان $(۲,+\infty)$ است.

$$(f\pm g)(x)=\frac{۱}{x-۱}\pm\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}\ ,\ (f\,o\,g)(x)=\frac{۱}{x-۱}\times\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}\ ,\ \frac{f}{g}=\frac{\sqrt{x-۲}}{x-۱}$$

مثال اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲-۱ & x\geqslant ۱\\ x+۱ & x<۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x+۳ & x\geqslant ۲\\ -۲x+۱ & x<۲\end{cases}$، مطلوب است محاسبه‌ی $f+g$.

حل

$$D_f=D_g=\mathbb{R}\Longrightarrow D_{f+g}=\mathbb{R}$$

اگر $x\geqslant ۲$، آنگاه:

$$(f+g)(x)=(x^۲-۱)+(x+۳)=x^۲+x+۲$$

اگر $x<۲$، آنگاه:

$$۱\leqslant x<۲ \Longrightarrow (f+g)(x)=(x^۲-۱)+(-۲x+۱)=x^۲-۲x$$
$$x<۱ \Longrightarrow (f+g)(x)=(x+۱)+(-۲x+۱)=-x+۲$$

درنتیجه

$$(f+g)(x)=\begin{cases}x^۲+x+۲ & x\geqslant ۲\\ x^۲-۲x & ۱\leqslant x<۲\\ -x+۲ & x<۱\end{cases}$$

تست اگر $f(x)=\ln(۱-x^۲)$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۱}$، آنگاه دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $\{-۱,۱\}$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) ϕ

حل گزینه‌ی ۴.

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ln(۱-x^۲)}{\sqrt{x^۲-۱}}$$
$$\begin{cases}۱-x^۲>۰\\ x^۲-۱>۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-۱<x<۱\\ x>۱ \text{ یا } x<-۱\end{cases}\Longrightarrow D_{\frac{f}{g}}=\phi$$

تست اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$، مقدار $(۲f-g)(۳)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۲.

$$(۲f-g)(۳)=۲f(۳)-g(۳)=۲\sqrt{۳+۱}-\frac{۳+۱}{۳-۲}=۴-۴=۰$$

ترکیب توابع

۳ـ۸۶ ترکیب دو تابع f و g را که با نماد $f\,o\,g$ و $g\,o\,f$ نمایش می‌دهیم، تابع تابع (تابع مرکب) می‌گوییم.

۳ـ۸۷ نماد $f\,o\,g$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f\,o\,g)(x)=f\big(g(x)\big)$$

دامنه‌ی این تابع به صورت زیر است:

$$D_{f\,o\,g}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$$

یعنی اول باید x در دامنه‌ی g باشد تا $g(x)$ محاسبه شود و $g(x)$ هم در دامنه‌ی f باشد تا $f\big(g(x)\big)$ محاسبه شود.
تابع $f\,o\,g$ در حالت کلی وقتی تعریف می‌شود که $D_f\cap R_g\neq\phi$.

۳ـ۸۸ نماد $g\,o\,f$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(g\,o\,f)(x)=g\big(f(x)\big)$$

دامنه‌ی این تابع به صورت زیر است:

$$D_{g\,o\,f}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}$$

یعنی اول باید x در دامنه‌ی f باشد تا $f(x)$ محاسبه شود و $f(x)$ هم در دامنه‌ی g باشد تا $g\big(f(x)\big)$ محاسبه شود.
تابع $g\,o\,f$ در حالت کلی وقتی تعریف می‌شود که $D_g\cap R_f\neq\phi$.

مثال اگر $f=\{(۱,-۱),(۲,۴),(-۲,۵),(۳,۰),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۲,-۲),(۳,۵),(۰,-۳),(۶,۳)\}$ توابع $f\,o\,g$ و $g\,o\,f$ را مشخص کنید.

حل

$$\left.\begin{array}{l} f\,o\,g(۱) = f\big(g(۱)\big) = f(۲) = ۴ \Longrightarrow (۱, ۴) \\ f\,o\,g(۲) = f\big(g(۲)\big) = f(-۲) = ۵ \Longrightarrow (۲, ۵) \\ f\,o\,g(۳) = f\big(g(۳)\big) = f(۵) = \text{تعریف‌نشده} \\ f\,o\,g(۰) = f\big(g(۰)\big) = f(-۳) = \text{تعریف‌نشده} \\ f\,o\,g(۶) = f\big(g(۶)\big) = f(۳) = ۰ \Longrightarrow (۶, ۰) \end{array}\right\} \Longrightarrow f\,o\,g = \{(۱, ۴), (۲, ۵), (۶, ۰)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} g\,o\,f(۱) = g\big(f(۱)\big) = g(-۱) = \text{تعریف‌نشده} \\ g\,o\,f(۲) = g\big(f(۲)\big) = g(۴) = \text{تعریف‌نشده} \\ g\,o\,f(-۲) = g\big(f(-۲)\big) = g(۵) = \text{تعریف‌نشده} \\ g\,o\,f(۳) = g\big(f(۳)\big) = g(۰) = -۳ \Longrightarrow (۳, -۳) \\ g\,o\,f(۰) = g\big(f(۰)\big) = g(۲) = -۲ \Longrightarrow (۰, -۲) \end{array}\right\} \Longrightarrow g\,o\,f = \{(۳, -۳), (۰, -۲)\}$$

مثال برای تابع‌های f و g در تمرین‌های زیر $f\,o\,g$ و $g\,o\,f$، دامنه و ضابطه‌ی هرکدام از توابع را تعیین کنید.

۱) $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ \ g(x) = \sqrt{۱ - x}$

۲) $f(x) = e^{x-۱}\ ,\ \ g(x) = \ln x$

حل

۱)

$$D_f : x \geqslant ۰,\ D_g : x \leqslant ۱$$

$$D_{f\,o\,g} = \{x \leqslant ۱ | \sqrt{۱ - x} \geqslant ۰\} = \{x \leqslant ۱ | x \leqslant ۱\} = (-\infty, ۱]$$

$$(f\,o\,g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{\sqrt{۱ - x}} = \sqrt[۴]{۱ - x}$$

$$D_{g\,o\,f} = \{x \geqslant ۰ | \sqrt{x} \leqslant ۱\} = \{x \geqslant ۰ | x \leqslant ۱\} = [۰, ۱]$$

$$(g\,o\,f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{۱ - \sqrt{x}}$$

۲)

$$D_f = \mathbb{R}\ ,\ \ D_g : x > ۰$$

$$D_{f\,o\,g} = \{x > ۰ \,|\, \ln x \in \mathbb{R}\} = (۰, +\infty)$$

$$(f\,o\,g)(x) = f\big(g(x)\big) = e^{\ln x - ۱}$$

$$D_{g\,o\,f} = \{x \in \mathbb{R} | e^{x-۱} > ۰\} = (-\infty, +\infty)$$

$$(g\,o\,f)(x) = g\big(f(x)\big) = \ln e^{x-۱} = (x - ۱)\ln e = x - ۱$$

مثال اگر $f(x)=e^{-x}$ و $g(x)=\ln\sqrt{x}$، آنگاه

۱) $g\circ f(x)$ را بیابید.

۲) $g\circ f(۲)$ چه‌قدر است؟

حل

۱) $$g\circ f(x)=g\big(f(x)\big)=\ln\sqrt{e^{-x}}=\ln e^{-\frac{x}{۲}}=-\frac{x}{۲}\ln e=-\frac{x}{۲}$$

۲) $g\circ f(۲)=g\big(f(۲)\big)$، بنابراین ابتدا $f(۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(۲)=e^{-۲}\Longrightarrow g\big(f(۲)\big)=g(e^{-۲})=\ln\sqrt{e^{-۲}}=\ln e^{-\frac{۲}{۲}}=-\ln e=-۱$$

تست اگر $f(x)=x+\sqrt{x^۲+۴}$، $g(x)=x-\frac{۱}{x},x>۰$، ضابطه‌ی تابع $f\circ g(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{x}$ ۲) $-۲x$ ۳) $\frac{۲}{x}$ ۴) $۲x$

حل گزینه‌ی ۴.

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\left(x-\frac{۱}{x}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۲+۴}=(x-\frac{۱}{x})+\sqrt{x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲+۴}$$

$$=(x-\frac{۱}{x})+\sqrt{x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲}=\left(x-\frac{۱}{x}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲}$$

$$=x-\frac{۱}{x}+\underbrace{|x+\frac{۱}{x}|}_{+}=x-\frac{۱}{x}+x+\frac{۱}{x}=۲x$$

تست اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، $g(x)=[x]$، بُرد تابع $(g\circ f)(x)$ کدام است؟

۱) $\{-۱,۰\}$ ۲) $\{-۱,۱\}$ ۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(-۱,۱)$

حل گزینه‌ی ۱.

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\left[\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\right]\Longrightarrow D_{g\circ f}=\mathbb{R}$$

$$x>۰\Longrightarrow ۰<\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}<۱\Longrightarrow\left[\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\right]=۰$$

$$x=۰\Longrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=۰\Longrightarrow\left[\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\right]=۰\qquad\Longrightarrow R_{g\circ f}=\{۰,-۱\}$$

$$x<۰\Longrightarrow -۱<\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}<۰\Longrightarrow\left[\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\right]=-۱$$

تست اگر $f(x)=\ln(۴-x)$ و $g(x)=x^۲-۳x$، دامنه‌ی تابع $f\circ g$ کدام است؟

۱) $[-۱,۴]$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $[-۴,۱]$ ۴) $\mathbb{R}-[۱,۴]$

حل گزینه‌ی ۲. می‌دانیم $D_f:x<۴$ و $D_g=\mathbb{R}$، پس:

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}|x^۲-۳x<۴\}$$

$$x^۲-۳x-۴<۰\Longrightarrow\begin{array}{c|ccccc} x & & -۱ & & ۴ & \\ \hline p & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}\Longrightarrow D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}|-۱<x<۴\}$$

۳ـ۸۹ به‌طورکلی همواره می‌توان دامنه‌ی توابع مرکب را پس از ترکیب دو تابع f و g تعیین کرد، به‌شرط آن‌که قبل از تعیین دامنه هیچ‌گونه عمل ساده کردنی صورت نگیرد.

تست اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $g(x)=\frac{1-x}{x-2}$، آنگاه دامنه‌ی $g\circ f(x)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{-2\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0,-2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-2,-1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,-1\}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$(g\circ f)(x)=\frac{1-\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}-2}=\frac{\frac{x+1-x}{x+1}}{\frac{x-2x-2}{x+1}}=\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{-x-2}{x+1}}$$

بدیهی است که باید $x+1\neq 0$ یا $x\neq -1$ و $-x-2\neq 0$ یا $x\neq -2$، پس $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\{-2,-1\}$.

۳ـ۹۰ مسأله‌ی ترکیبی وقتی $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم و $g(x)$ مجهول است. در این شرایط با توجه به ساخت $f(g(x))$، $g(x)$ به‌راحتی به دست می‌آید.

مثال اگر $f(x)=3x^2-6x$ و $f(g(x))=3x^2-6x$ باشد، $g(x)$ را محاسبه کنید.

$$f(g(x))=3x^2-6x\Longrightarrow 3(g(x))^2-3=3x^2-6x\Longrightarrow$$
$$(g(x))^2=x^2-2x+1\Longrightarrow (g(x))^2=(x-1)^2\Longrightarrow g(x)=\pm(x-1)$$

تست اگر $f(x)=\frac{2}{x}$ و $f(g(x))=2(1-x^2)$، آنگاه $g(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{4}$ ۲) -1 ۳) 2 ۴) $\frac{-1}{3}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$f(g(x))=2(1-x^2)\Longrightarrow \frac{2}{g(x)}=2(1-x^2)\Longrightarrow g(x)=\frac{1}{1-x^2}\Longrightarrow g(2)=\frac{-1}{3}$$

۳ـ۹۱ مسأله‌ی ترکیبی وقتی $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم و $g(x)$ مجهول باشد. با توجه به ساخت $g(f(x))$ و مسأله‌ی معکوس $f(x)$ که قبلاً گفته شد، $g(x)$ محاسبه می‌شود.

مثال اگر $f(x)=\frac{2}{x}$ و $g(f(x))=\frac{x^2}{x^2-4}$ باشد، تابع $g(x)$ را بیابید.

حل

$$g(f(x))=\frac{x^2}{x^2-4}\Longrightarrow g\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{x^2}{x^2-4}$$
$$\frac{2}{x}=t\Longrightarrow x=\frac{2}{t}$$
$$g(t)=\frac{\frac{4}{t^2}}{\frac{4}{t^2}-4}=\frac{\frac{4}{t^2}}{\frac{4-4t^2}{t^2}}=\frac{4}{4(1-t^2)}\Longrightarrow g(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

تست اگر $g(x)=x-\frac{1}{x}$ و $f(g(x))=x^2+\frac{1}{x^2}-4$، دراین‌صورت $f(2)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

حل گزینه‌ی ۲.

$$f(g(x)) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۴ \Longrightarrow f\left(x - \frac{۱}{x}\right) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۴$$

$$x - \frac{۱}{x} = t \Longrightarrow x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۲ = t^۲ \Longrightarrow x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = t^۲ + ۲$$

$$f(t) = t^۲ + ۲ - ۴ \Longrightarrow f(x) = x^۲ - ۲ \Longrightarrow f(۲) = ۴ - ۲ = ۲$$

یا

$$x - \frac{۱}{x} = ۲ \Longrightarrow x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۲ = ۴ \Longrightarrow x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = ۶$$

$$f(۲) = ۶ - ۴ = ۲$$

۹۲ـ۳ توابع خاصیت شرکت‌پذیری دارند، یعنی:

$$(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g) \circ h(x) = f \circ (g \circ h)(x)$$

مثال اگر $f(x) = \frac{۱}{x}$ و $g(x) = x - ۱$ و $h(x) = \sqrt{x^۲}$، آنگاه $(f \circ h \circ g)(x)$ را به دست آورید. $(x > ۱)$

حل

$$(h \circ g)(x) = \sqrt{(x-۱)^۲} = |x-۱| \overset{x>۱}{=\!=} x - ۱$$

$$(f \circ h \circ g)(x) = f(x-۱) = \frac{۱}{x-۱}$$

تابع زوج و تابع فرد

۹۳ـ۳ تابعی مانند f را درنظر بگیرید. فرض کنید $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ (یعنی دامنه‌ی تعریف تابع متقارن باشد و هیچ عضوی بدون قرینه‌ی خود نباشد)، آنگاه:

۱) تابع f زوج است، اگر $f(-x) = f(x)$

۲) تابع f فرد است، اگر $f(-x) = -f(x)$

۹۴ـ۳ بدیهی است که ممکن است تابعی نه زوج باشد و نه فرد. هم‌چنین اگر شرط اول، یعنی متقارن بودن دامنه‌ی تابع وجود نداشته باشد، بدون انجام آزمون، می‌گوییم تابع نه زوج است و نه فرد. مثلاً: تابع $f(x) = x^۲$ با $D_f = [-۱, ۲]$، نه زوج و نه فرد است، زیرا $۱/۵ \in D_f$ ولی $-۱/۵ \notin D_f$.

مثال کدام یک از تابع‌های زیر زوج، کدام فرد و کدام نه زوج و نه فرد است؟

۱) $f(x) = \dfrac{|x| \sin x - \tan x}{x^۲ - \cos x}$

۲) $f(x) = \cos(\sin x) + \sin(\cos x)$

۳) $f(x) = |x+۲| + |x-۲|$

۴) $f(x) = \dfrac{۲^x - ۱}{۲^x + ۱}$

۵) $f(x) = \ln\left(\dfrac{۱-x}{۱+x}\right)$

۶) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

۷) $\begin{cases} f : Z \to \mathbb{R} \\ f(x) = x|x| - [x] \end{cases}$

۸) $f(x) = \left[\dfrac{۱}{۲-x}\right] + \left[\dfrac{۲x+۵}{۲+x}\right]$

حل

۱)

$$f(-x) = \frac{|-x|\sin(-x) - \tan(-x)}{(-x)^۲ - \cos(-x)} = \frac{-|x|\sin x + \tan x}{x^۲ - \cos x}$$
$$= -\frac{|x|\sin x - \tan x}{x^۲ - \cos x} = -f(x) \Longrightarrow f \text{ فرد است.}$$

۲)

$$f(-x) = \cos(\sin(-x)) + \sin(\cos(-x)) = \cos(-\sin x) + \sin(\cos x)$$
$$= \cos(\sin x) + \sin(\cos x) = f(x) \Longrightarrow f \text{ زوج است.}$$

۳)

$$f(-x) = |-x+۲| + |-x-۲| = |-(x-۲)| + |-(x+۲)|$$
$$= |x-۲| + |x+۲| = f(x) \Longrightarrow f \text{ زوج است}$$

۴)

$$f(-x) = \frac{۲^{-x} - ۱}{۲^{-x} + ۱} = \frac{\frac{۱}{۲^x} - ۱}{\frac{۱}{۲^x} + ۱} = \frac{\frac{۱-۲^x}{۲^x}}{\frac{۱+۲^x}{۲^x}} = \frac{۱ - ۲^x}{۱ + ۲^x}$$
$$= -\frac{۲^x - ۱}{۲^x + ۱} = -f(x) \Longrightarrow f \text{ فرد است.}$$

۵)

$$f(-x) = \ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right) = \ln\left(\frac{۱-x}{۱+x}\right)^{-۱} = -\ln\left(\frac{۱-x}{۱+x}\right) = -f(x) \Longrightarrow f \text{ فرد است}$$

۶)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow f(-x) = \begin{cases} ۱ & -x > ۰ \\ ۰ & -x = ۰ \\ -۱ & -x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(-x) = \begin{cases} ۱ & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x > ۰ \end{cases} \Longrightarrow f(-x) + f(x) = ۰ \Longrightarrow f \text{ فرد است.}$$

۷) چون دامنه‌ی تابع اعداد صحیح نسبی است، پس $x = [x]$، بنابراین:

$$f(x) = x|x| - x = x(|x| - ۱)$$
$$f(-x) = -x(|-x| - ۱) = -x(|x| - ۱) = -f(x) \Longrightarrow f \text{ فرد است.}$$

۸) $\left[\frac{۲x+۵}{۲+x}\right] = \left[\frac{۲(۲+x)+۱}{۲+x}\right] = \left[۲+\frac{۱}{۲+x}\right] = ۲+\left[\frac{۱}{۲+x}\right]$

پس:

$$f(x) = \left[\frac{۱}{۲-x}\right] + \left[\frac{۱}{۲+x}\right] + ۲ \Longrightarrow f(-x) = \left[\frac{۱}{۲+x}\right] + \left[\frac{۱}{۲-x}\right] + ۲ = f(x)$$

f زوج است.

مثال مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=(a-۲)x+۳a-۴$
۱) زوج باشد. ۲) فرد باشد.

حل

۱) فرض کنید f زوج باشد، دراین‌صورت $f(-۱)=f(۱)$، یعنی

$$-(a-۲)+۳a-۴ = a-۲+۳a-۴ \Longrightarrow a=۲$$

۲) فرض کنید f فرد باشد، دراین‌صورت $f(-۱)=-f(۱)$، یعنی

$$-(a-۲)+۳a-۴ = -(a-۲)-(۳a-۴) \Longrightarrow a=\frac{۴}{۳}$$

مثال اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد، آیا تابع‌های $f\circ g$ و $g\circ f$ و $f\times g$ زوج هستند؟ کدام یک فرد است؟

حل f تابعی زوج است، پس $f(-x)=f(x)$. g تابعی فرد است، پس $g(-x)=-g(x)$.

$$h(x)=(f\circ g)(x) \Longrightarrow h(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))=h(x)$$

بنابراین $f\circ g$ تابعی زوج است.

$$h(x)=(g\circ f)(x) \Longrightarrow h(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=h(x)$$

بنابراین $g\circ f$ تابعی زوج است.

$$h(x)=f(x)\cdot g(x) \Longrightarrow h(-x)=f(-x)\times g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-h(x)$$

بنابراین $f\times g$ تابعی فرد است.

تست تابع با کدام ضابطه‌ی زیر فرد است؟

۱) $f(x)=\frac{e^{۲x}+۱}{e^{x}}$ ۲) $f(x)=xe^{-x}$ ۳) $f(x)=x\ln x$ ۴) $f(x)=\frac{e^{۲x}-۱}{e^{x}}$

حل گزینه‌ی ۴.

گزینه‌ی ۱: f زوج $\Longrightarrow f(-x)=\frac{e^{-۲x}+۱}{e^{-x}}=\frac{\frac{۱}{e^{۲x}}+۱}{\frac{۱}{e^{x}}}=\frac{۱+e^{۲x}}{e^{x}}=f(x)$

گزینه‌ی ۲: f نه زوج و نه فرد $\Longrightarrow f(-x)=-xe^{x}\neq f(x)$ و $-f(x)$

گزینه‌ی ۳: $۱\in D_f$ ولی $-۱\notin D_f$، پس f نه زوج و نه فرد است.

گزینه‌ی ۴: f فرد $\Longrightarrow f(-x)=\frac{e^{-۲x}-۱}{e^{-x}}=\frac{\frac{۱}{e^{۲x}}-۱}{\frac{۱}{e^{x}}}=\frac{۱-e^{۲x}}{e^{x}}=-\frac{e^{۲x}-۱}{e^{x}}=-f(x)$

تست اگر تابع $f(x)=ax\sin x+(b-۲)x$ زوج و تابع $g(x)=(a+۱)\cos x+bx^{۳}$ فرد باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

حل گزینه‌ی ۲.

$$\begin{aligned}
f \text{ تابعی زوج} &\Longrightarrow f(-x)=f(x)\\
&\Longrightarrow a(-x)\sin(-x)+(b-۲)(-x)=ax\sin x+(b-۲)x\\
&\Longrightarrow ax\sin x-(b-۲)x=ax\sin x+(b-۲)x\\
&\Longrightarrow ۲(b-۲)x=۰\Longrightarrow b=۲\\
g \text{ تابعی فرد} &\Longrightarrow g(-x)=-g(x)\\
&\Longrightarrow (a+۱)\cos(-x)+b(-x)^{۳}=-(a+۱)\cos x-bx^{۳}\\
&\Longrightarrow (a+۱)\cos x-bx^{۳}=-(a+۱)\cos x-bx^{۳}\\
&\Longrightarrow ۲(a+۱)\cos x=۰\Longrightarrow a=-۱
\end{aligned}$$

درنتیجه $a+b=۱$.

۹۵ـ۳ تنها و تنها یک تابع هم زوج و هم فرد وجود دارد و آن، تابع ثابت با ضابطه‌ی $f(x)=۰$ است، زیرا

$$\begin{cases} f(-x)=-f(x)\\ f(-x)=f(x)\end{cases}\Longrightarrow f(x)=-f(x)\Longrightarrow ۲f(x)=۰\Longrightarrow f(x)=۰$$

سایر توابع ثابت با ضابطه‌ی $f(x)=c$، $c\neq ۰$، زوج هستند.

مثال زوج یا فرد بودن تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\left[\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}\right]$ را بررسی کنید.

حل اگر $f(-x)$ را تشکیل دهیم، داریم

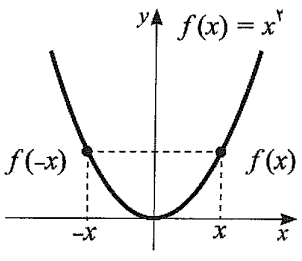
$$f(-x)=\left[\frac{(-x)^{۲}}{(-x)^{۲}+۱}\right]=\left[\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}\right]$$

و ممکن است گمان کنیم این تابع فقط زوج است، ولی با کمی دقت درمی‌یابیم که این تابع همان تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۰$ است، زیرا:

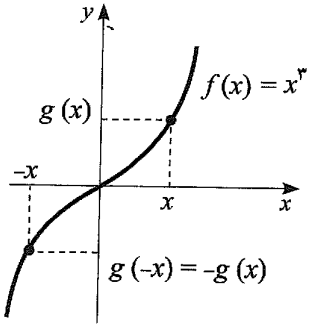
$$۰\leqslant\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}<۱\Longrightarrow\left[\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}\right]=۰\Longrightarrow f(x)=۰$$

پس f هم زوج و هم فرد است.

۹۶ـ۳ نمودار هر تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است. هم‌چنین، هر تابعی که نمودارش نسبت به محور yها متقارن باشد، زوج است.



۳ـ۹۷ نمودار هر تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. هم‌چنین، هر تابعی که نمودارش نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد، فرد است.



مثال اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع $f(x)=\log(ax+\sqrt{۹x^۲+۱})$ باشد، a چه‌قدر است؟

حل اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع $f(x)$ باشد، آنگاه تابع f فرد است.

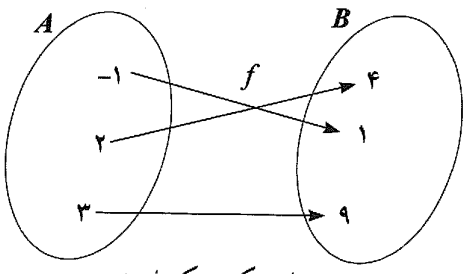
$$\begin{aligned} f(-x)=-f(x) &\Longrightarrow f(-x)+f(x)=۰ \\ &\Longrightarrow \log(-ax+\sqrt{۹x^۲+۱})+\log(ax+\sqrt{۹x^۲+۱})=۰ \\ &\Longrightarrow \log(۹x^۲+۱-a^۲x^۲)=۰ \Longrightarrow \log\left((۹-a^۲)x^۲+۱\right)=۰ \\ &\Longrightarrow ۹-a^۲=۰ \Longrightarrow a=\pm ۳ \end{aligned}$$

۳ـ۹۸ اگر f تابعی فرد باشد و $۰ \in D_f$ دراین‌صورت همواره $f(۰)=۰$. البته عکس این مطلب صادق نیست، یعنی اگر در تابعی $f(۰)=۰$، همواره نمی‌توان نتیجه گرفت که تابع f فرد است.

تابع یک‌به‌یک

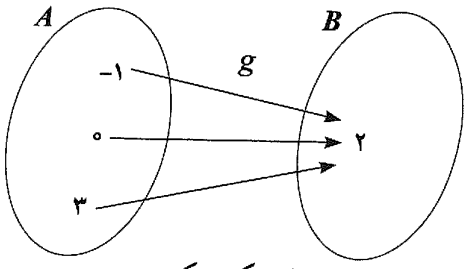
۳ـ۹۹ تابع $f: A \to B$ با ضابطه‌ی $y=f(x)$ یک‌به‌یک است هرگاه هر عضو از بُرد f فقط و فقط با یک عضو از دامنه‌ی تابع متناظر باشد.

مثال توابع f و g را که با نمودارهای زیر تعریف شده‌اند درنظر بگیرید.



تابع یک‌به‌یک است.

$$f=\{(-۱,۱),(۲,۴),(۳,۹)\}$$



تابع یک‌به‌یک نیست.

$$g=\{(-۱,۲),(۰,۲),(۳,۲)\}$$

۳ـ۱۰۰ تابع $f: A \to B$ یک‌به‌یک است هرگاه هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های دوم برابر در آن یافت نشود.

تست اگر تابع $f = \{(-۲, ۲), (m, ۳), (-۱, ۳), (۲m, a)\}$ یک‌به‌یک باشد، a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۴. باید داشته باشیم

$$(m, ۳) = (-۱, ۳) \Longrightarrow m = -۱, (-۲, ۲) = (۲m, a) \Longrightarrow a = ۲$$

۱۰۱ـ۳ تابع حقیقی f را یک‌به‌یک می‌گوییم اگر و تنها اگر از $f(x_۱) = f(x_۲)$ نتیجه شود $x_۱ = x_۲$.

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f : f(x_۱) = f(x_۲) \Longrightarrow x_۱ = x_۲$$

مثال خاصیت یک‌به‌یکی را برای هریک از تابع‌های زیر بررسی کنید.

۱) $f(x) = \dfrac{x + ۳}{۲x - ۱}$ ۲) $f(x) = ۳x^۲ - ۱$

(۱

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Longrightarrow \frac{x_۱ + ۳}{۲x_۱ - ۱} = \frac{x_۲ + ۳}{۲x_۲ - ۱}$$
$$\Longrightarrow ۲x_۱x_۲ - x_۱ + ۶x_۲ - ۳ = ۲x_۱x_۲ + ۶x_۱ - x_۲ - ۳$$
$$\Longrightarrow ۷x_۱ = ۷x_۲ \Longrightarrow x_۱ = x_۲ \Longrightarrow f \text{ یک‌به‌یک است}$$

(۲

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Longrightarrow ۳x_۱^۲ - ۱ = ۳x_۲^۲ - ۱ \Longrightarrow ۳x_۱^۲ = ۳x_۲^۲$$
$$x_۱^۲ = x_۲^۲ \Longrightarrow x_۱ = \pm x_۲ \Longrightarrow f \text{ یک‌به‌یک نیست}$$

۱۰۲ـ۳ در این نوع مسائل توجه داریم که اگر نتوانستیم ثابت کنیم که دقیقاً $x_۲ = x_۱$، دلیل بر یک‌به‌یک بودن تابع نمی‌باشد و برای رد خاصیت یک‌به‌یکی حتماً باید با یک مثال نقض این عمل انجام شود، که البته آخرین رابطه‌ای که برحسب $x_۱$ و $x_۲$ به دست می‌آوریم به این‌که چگونه مثال نقض را بیابیم کمک می‌کند. در مثال بالا چون داریم $x_۱ = \pm x_۲$، اگر قرار دهیم

$$x_۱ = ۲ \ , \ x_۲ = -۲$$

خواهیم داشت:

$$f(x_۱) = f(۲) = ۱۲ - ۱ = ۱۱ \ , \ f(x_۲) = f(-۲) = ۱۲ - ۱ = ۱۱$$

یعنی $x_۱$ و $x_۲$ای در D_f یافتیم که $x_۱ \neq x_۲$ ولی $f(x_۱) = f(x_۲)$ و لذا تابع f یک‌به‌یک نیست.

مثال آیا تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x]$ یک‌به‌یک است؟

حل

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f = \mathbb{R} : f(x_۱) = f(x_۲) \Longrightarrow [x_۱] = [x_۲] \not\Longrightarrow x_۱ = x_۲$$

برای نمونه:

$$\begin{cases} x_1 = 1/8 \\ x_2 = 1/3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x_1) = [1/8] = 1 \\ f(x_2) = [1/3] = 1 \end{cases} \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2$$

پس طبق تعریف تابع f یک‌به‌یک نیست.

۱۰۳ـ۳ اگر f تابعی اکیداً صعودی ($f' > 0$) یا اکیداً نزولی ($f' < 0$) باشد، آنگاه تابع f یک‌به‌یک است.

تست کدام یک از توابع زیر یک‌به‌یک نیست؟

۱) $f(x) = e^x$

۲) $f(x) = \frac{1}{x}$

۳) $f(x) = -x^3 + 3x^2$

۴) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

حل گزینه‌ی ۳.

$f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x > 0 \Longrightarrow$ اکیداً صعودی

$f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \Longrightarrow$ اکیداً نزولی

$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0 \Longrightarrow$ اکیداً نزولی

$f(x) = -x^3 + 3x^2 \Longrightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x \lessgtr 0 \Longrightarrow$ یک‌به‌یک نیست

۱۰۴ـ۳ تابع $y = f(x)$ اگر تابعی با چند ضابطه باشد، درصورتی یک‌به‌یک است که

اولاً، ضابطه‌اش یک‌به‌یک باشد،

ثانیاً، بُردهای هیچ دو ضابطه‌ای از ضابطه‌های آن نقطه اشتراک نداشته باشند.

مثال تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 2 \\ x - 1 & 0 < x \leqslant 2 \\ x + 1 & x \leqslant 0 \end{cases}$ آیا یک‌به‌یک است؟

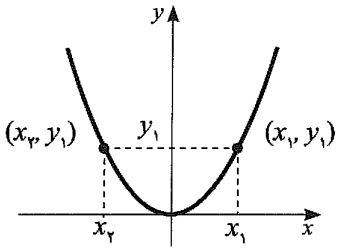
حل

$f_1(x) = x^2 + 1\ ,\ f_2(x) = x - 1\ ,\ f_3(x) = x + 1$

$R_{f_1} = \{y \in \mathbb{R} | y > 5\}\ ,\ R_{f_2} = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leqslant y \leqslant 1\}\ ,\ R_{f_3} = \{y = \mathbb{R} | y \leqslant 1\}$

و همان‌طورکه مشاهده می‌شود، $R_{f_3} \cap R_{f_2} \neq \phi$. بنابراین چون بُردهای دو ضابطه‌ی f_2 و f_3 اشتراک دارند، لذا تابع f یک‌به‌یک نیست.

۱۰۵ـ۳ از نظر نموداری یک تابع یک‌به‌یک است اگر هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. توجه داشته باشید که در یک‌به‌یک بودن یک تابع دامنه نقش اساسی دارد.



همان‌طورکه مشاهده می‌کنید، تابع f یک‌به‌یک نیست.

تست کدام یک‌از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

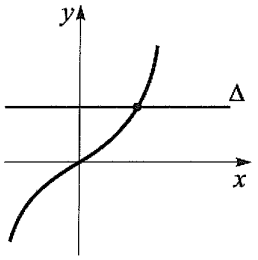
۱) $f(x) = x^3|x|$

۲) $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x^2 & x \leqslant 0 \end{cases}$

۳) $f(x) = (x-1)^6$

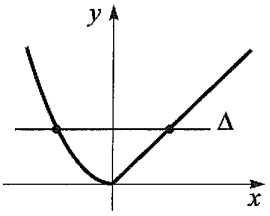
۴) $f(x) = \sin x \, , \, x \in [0, 2\pi]$

حل گزینه‌ی ۱.

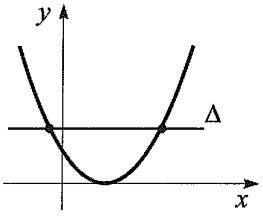


$$f(x) = x^3|x| = \begin{cases} x^4 & x \geqslant 0 \\ -x^4 & x < 0 \end{cases}$$

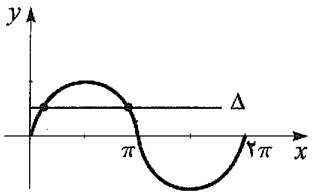
$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x^2 & x \leqslant 0 \end{cases}$$



$$f(x) = (x-1)^6$$



$$f(x) = \sin x$$



در نمودارگزینه‌ی (۱) چون هر خطی موازی با محور xها نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند، پس تابع f یک‌به‌یک است.

تابع معکوس

۱۰۶ـ۳ تابعی حقیقی مانند f را درنظر بگیرید. می‌گوییم تابع g معکوس f است اگر

اولاً: به‌ازای هر $x : x \in D_g$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$

ثانیاً: به‌ازای هر $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x : x \in D_f$

دراین‌صورت g را با f^{-1} (بخوانید وارون یا معکوس f) نمایش می‌دهیم.

۱۰۷_۳ بنابه تعریف، اگر تابع g معکوس تابع f باشد، تابع f هم معکوس تابع g است.

مثال نشان دهید که دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ معکوس یکدیگرند.

حل

$$(f \circ g)(x) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$
$$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{(x^3+1)-1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

پس طبق تعریف f و g وارون یکدیگرند.

۱۰۸_۳ وارون یا معکوس تابع f، رابطه‌ای است که از جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم همه‌ی زوج‌های مرتب f به دست آمده باشد:

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

بنابراین لزومی ندارد که وارون یک تابع نیز تابع باشد، اما اگر وارون یا معکوس یک تابع نیز تابع باشد، آن را تابع وارون یا تابع معکوس می‌خوانیم و تابع فوق را معکوس‌پذیر (وارون‌پذیر) می‌نامیم.

مثال معکوس تابع $f = \{(1,3), (0,2), (5,4)\}$ به صورت $f^{-1} = \{(3,1), (2,0), (4,5)\}$ است، که f^{-1} نیز یک تابع است. بنابراین تابع f معکوس‌پذیر است.

مثال معکوس تابع $f = \{(0,0), (1,2), (3,0)\}$ به صورت $f^{-1} = \{(0,0), (2,1), (0,3)\}$ می‌باشد، اما f^{-1} یک تابع نیست.

تست اگر دو تابع $f = \{(a-1, 4), (2, b+3)\}$ و $g = \{(2a, 1), (a+2, 2)\}$ معکوس یکدیگر باشند، آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۲. اگر f و g معکوس یکدیگر باشند، باید:

$$\begin{matrix} a - 1 = 1 \Longrightarrow a = 2 \\ b + 3 = a + 2 \Longrightarrow b = 1 \end{matrix} \Longrightarrow a + b = 2 + 1 = 3$$

۱۰۹_۳ کدام دسته از توابع معکوس‌پذیرند؟ شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع f معکوس‌پذیر باشد، آن است که f یک‌به‌یک باشد.

مثال کدام یک از توابع زیر در دامنه‌ی تعریفشان معکوس‌پذیر است؟

۱) $f(x) = x^3 + x + 1$ ۲) $f(x) = x^4 - 2x^2$

حل

۱) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Longrightarrow$ اکیداً صعودی $\Rightarrow$ یک‌به‌یک $\Rightarrow$ معکوس‌پذیر است

۲) $D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = x^4 - 2x^2 = f(x) \Longrightarrow$ تابع زوج $\Rightarrow$ غیر یک‌به‌یک $\Rightarrow$ معکوس‌پذیر نیست

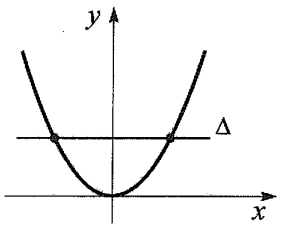
تست تابع معکوس‌پذیر f با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. تابع با ضابطه‌ی $f(x)+f(-x)$ چگونه است؟

۱) یک‌به‌یک ۲) معکوس‌ناپذیر ۳) صعودی ۴) فرد

حل گزینه‌ی ۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)+f(-x)$ زوج است. زیرا داریم:

$$g(x)=f(x)+f(-x)\Longrightarrow g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$$

از زوج بودن تابع نتیجه می‌گیریم تابع نسبت به محور yها متقارن است. مثلاً شکل زیر:



همان‌طورکه از شکل پیداست، تابع نمی‌تواند یک‌به‌یک باشد، زیرا خط Δ نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند و تابع نمی‌تواند معکوس‌پذیر باشد.

۳ـ۱۱۰ برای به دست آوردن معکوس تابع $f(f^{-1})$ از ضابطه‌ی $y=f(x)$ مقدار x را برحسب y تعیین می‌کنیم تا $x=f^{-1}(y)$ به دست آید. در تابع اخیر y متغیر مستقل و x متغیر وابسته است و چون معمولاً x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌گیرند، y و x را عوض می‌کنیم تا $y=f^{-1}(x)$ به دست آید.

مثال معکوس هریک از توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=\dfrac{2x-1}{1+x}$

۲) $f(x)=x\sqrt{x}+1$

۳) $f(x)=x^2-2x\ ,\ x>1$

۴) $f(x)=\ln(x-2)$

حل

۱)

$$y=\frac{2x-1}{1+x}\Longrightarrow y+yx=2x-1\Longrightarrow 2x-yx=y+1$$
$$\Longrightarrow (2-y)x=y+1\Longrightarrow x=\frac{y+1}{2-y}\Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2-x}$$

۲)

$$y=x\sqrt{x}+1\Longrightarrow y-1=x\sqrt{x}\Longrightarrow (y-1)^2=x^3$$
$$\Longrightarrow x=\sqrt[3]{(y-1)^2}\Longrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

۳)

$$y=x^2-2x\Longrightarrow x^2-2x-y=0\Longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Longrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+4y}}{2}=1\pm\sqrt{1+y}$$
$$x>1\Longrightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{1+x}$$

۴)

$$y = \ln(x-۲) \Longrightarrow x-۲ = e^y \Longrightarrow x = e^y + ۲ \Longrightarrow f^{-۱}(x) = e^x + ۲$$

مثال تابع f در $\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ تعریف شده است. تابع معکوس f را بیابید.

حل

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}\sqrt{x} & x > ۰ \\ \frac{-x}{x}\sqrt{-x} & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > ۰ \\ -\sqrt{-x} & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x} \Longrightarrow y^۲ = x \Longrightarrow f^{-۱}(x) = x^۲$$
$$y = -\sqrt{-x} \Longrightarrow y^۲ = -x \Longrightarrow f^{-۱}(x) = -x^۲ \Longrightarrow f^{-۱}(x) = x|x|$$

تست معکوس تابع $y = (۲^۵)^x$ کدام است؟

۱) $y = \frac{۱}{۵}\log_x^۲$ ۲) $y = \log_۲ x^۵$ ۳) $y = \log_۲ \sqrt[۵]{x}$ ۴) $y = \frac{۱}{۵}\log_۲ \sqrt{x}$

حل گزینه‌ی ۳. راه کوتاه: نقطه‌ای دلخواه روی تابع اصلی پیدا می‌کنیم، مثلاً

$$x = ۱ \Longrightarrow y = (۲^۵)^۱ = ۳۲ \Longrightarrow A(۱, ۳۲)$$

سپس جای x و y را عوض می‌کنیم، یعنی $A'(۳۲, ۱)$. اکنون در هرگزینه‌ای که مختصات نقطه‌ی A' صدق می‌کند، تابع معکوس تابع اصلی است.

۱) $y = \frac{۱}{۵}\log_{۳۲}^۲ = \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵}\log_۲^۲ = \frac{۱}{۲۵}$ نادرست

۲) $y = \log_۲^{۳۲^۵} = \log_۲^{۲^{۲۵}} = ۲۵\log_۲^۲ = ۲۵$ نادرست

۳) $y = \log_۲^{\sqrt[۵]{۳۲}} = \log_۲^۲ = ۱$ درست

۴) $y = \frac{۱}{۵}\log_۲^{\sqrt{۳۲}} = \frac{۱}{۵} \times \frac{۵}{۲۵}\log_۲^۲ = \frac{۱}{۲}$ نادرست

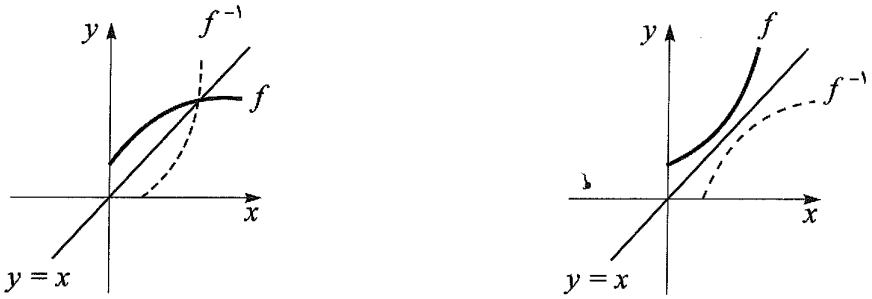
تست اگر $f(x) = \frac{e^x}{۱+e^x}$ و $g(x) = \sin^۲ x$، تابع $f^{-۱}(g(x))$ کدام است؟

۱) $\ln\tan x$ ۲) $\ln\cot x$ ۳) $۲\ln\tan x$ ۴) $۲\ln\cot x$

حل گزینه‌ی ۳.

$$y = \frac{e^x}{۱+e^x} \Longrightarrow y + ye^x = e^x \Longrightarrow (۱-y)e^x = y$$
$$\Longrightarrow e^x = \frac{y}{۱-y} \Longrightarrow x = \ln(\frac{y}{۱-y}) \Longrightarrow f^{-۱}(x) = \ln(\frac{x}{۱-x})$$
$$f^{-۱}(g(x)) = \ln(\frac{\sin^۲ x}{۱-\sin^۲ x}) = \ln(\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}) = \ln\tan^۲ x = ۲\ln\tan x$$

۳ـ۱۱۱ نمودار تابع وارون (f^{-1}) و تابع اصلی (f) نسبت به نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم (خط $y = x$) قرینه‌ی محوری یکدیگرند. اگر نمودارهای f و f^{-1} متقاطع باشند، نقطه‌ی تقاطع آنها روی خط $y = x$ است.



۳ـ۱۱۲ اگر $f \in (a, b)$ یا $f(a) = b$، با توجه به تعریف f^{-1} واضح است که $f^{-1} \in (b, a)$ یا $f^{-1}(b) = a$.

مثال آیا تابع معکوس $f(x) = x^3 + x + 1$ از نقطه‌ی $(-2, -9)$ می‌گذرد؟

حل اگر $f \in (-2, -9)$ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود $f^{-1} \in (-9, -2)$.

$$-9 = (-2)^3 + (-2) + 1 \Longrightarrow -9 = -9$$

پس معکوس f از نقطه‌ی $(-2, -9)$ می‌گذرد.

مثال در معکوس تابع $f(x) = \log(x - 2)$ مقدار $f^{-1}(0)$ را بیابید.

حل

$$(a, b) \in f \Longrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

$$\log(x - 2) = 0 \Longrightarrow x - 2 = 10^0 \Longrightarrow x - 2 = 1 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow f^{-1}(0) = 3$$

تست اگر $f(x) = \frac{5^x - 1}{5^x + 1}$، آنگاه $f^{-1}(\frac{2}{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\frac{5^x - 1}{5^x + 1} = \frac{2}{3} \Longrightarrow 3(5^x) - 3 = 2(5^x) + 2 \Longrightarrow 5^x = 5 \Longrightarrow x = 1$$

$$\Longrightarrow f^{-1}(\frac{2}{3}) = 1$$

۳ـ۱۱۳ ویژگی‌های تابع معکوس

۱) دامنه‌ی تابع معکوس، مساوی بُرد تابع اصلی و بُرد تابع معکوس مساوی دامنه‌ی تابع اصلی است:

$$D_f = R_{f^{-1}} \ , \ R_f = D_{f^{-1}}$$

۲) وارون وارون یک تابع معکوس‌پذیر مساوی خود آن تابع است:

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

۳) ترکیب هر تابع وارون‌پذیر با وارون آن از دو طرف مساوی تابع همانی است:

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$$

۴) وارون تابع $f \circ g$ مساوی است با $g^{-1} \circ f^{-1}$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$$

مثال دامنه‌ی تابع معکوس تابع $y = \sqrt{۳ - \sqrt{x-۱}}$ را بیابید.

حل می‌دانیم $D_{f^{-1}} = R_f$، لذا

$$\begin{cases} ۳ - \sqrt{x-۱} \geqslant ۰ \\ x - ۱ \geqslant ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leqslant ۱۰ \\ x \geqslant ۱ \end{cases} \Longrightarrow D_f = [۱, ۱۰]$$

$$۱ \leqslant x \leqslant ۱۰ \Longrightarrow ۰ \leqslant x - ۱ \leqslant ۹ \Rightarrow ۰ \leqslant \sqrt{x-۱} \leqslant ۳ \Longrightarrow -۳ \leqslant -\sqrt{x-۱} \leqslant ۰$$
$$\Longrightarrow ۰ \leqslant ۳ - \sqrt{x-۱} \leqslant ۳ \Longrightarrow ۰ \leqslant \sqrt{۳ - \sqrt{x-۱}} \leqslant \sqrt{۳}$$
$$\Longrightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [۰, \sqrt{۳}]$$

مثال اگر $f(x) = ۴g(x+۳) + ۲$ تعریف شود و f و g معکوس‌پذیر باشند، معکوس تابع f را به دست آورید.

حل با فرض $y = f(x)$، x را برحسب y به دست می‌آوریم

$$y = ۴g(x+۳) + ۲ \Longrightarrow \frac{y-۲}{۴} = g(x+۳)$$

g معکوس‌پذیر است، پس:

$$g^{-1}(\frac{y-۲}{۴}) = g^{-1}(g(x+۳)) \Longrightarrow g^{-1}(\frac{y-۲}{۴}) = x + ۳ \Longrightarrow$$
$$x = g^{-1}(\frac{y-۲}{۴}) - ۳$$

حالا به‌جای x، $f^{-1}(y)$ را قرار می‌دهیم:

$$f^{-1}(y) = g^{-1}(\frac{y-۲}{۴}) - ۳ \Longrightarrow f^{-1}(x) = g^{-1}(\frac{x-۲}{۴}) - ۳$$

تست بُرد تابع معکوس $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+۴} - ۲}$ کدام است؟

۱) $[-۴, +\infty]$
۲) $[-۴, +\infty) - \{۰\}$
۳) $[۲, +\infty) - \{۴\}$
۴) $[۲, +\infty)$

حل گزینه‌ی ۲. می‌دانیم $R_{f^{-1}} = D_f$، پس کافی است دامنه‌ی تابع f را پیدا کنیم

$$\begin{cases} x+۴ \geqslant ۰ \Longrightarrow x \geqslant -۴ \\ \sqrt{x+۴} - ۲ \neq ۰ \Longrightarrow x \neq ۰ \end{cases} \Longrightarrow D_f = R_{f^{-1}} = [-۴, +\infty) - \{۰\}$$

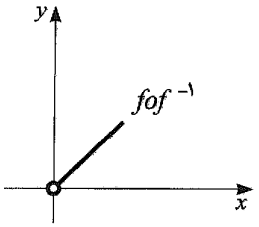
۳ـ۱۱۴ هرگاه f و f^{-1} معکوس هم باشند، داریم:

$$D_{f^{-1} o f} = D_f \ , \ D_{f o f^{-1}} = D_{f^{-1}}$$

مثال اگر تابع $f(x) = ۳^x$ تعریف شود، نمودار $f o f^{-1}$ را رسم کنید.

$$D_{f o f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$$

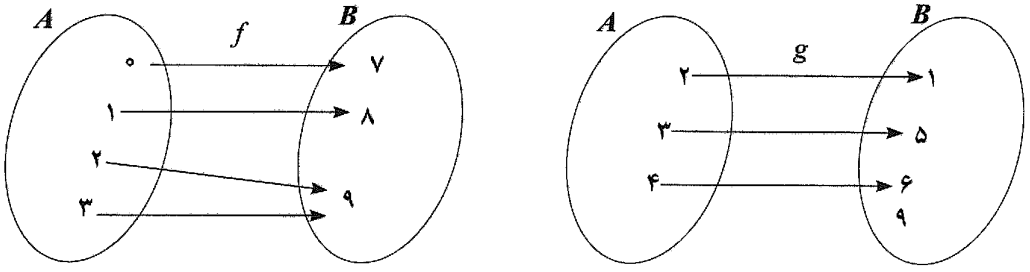
پس ابتدا بُرد f را پیدا می‌کنیم. می‌دانیم بُرد تابع $f(x) = ۳^x$ به صورت $(۰, +\infty)$ است، پس $D_{f^{-1}} = (۰, +\infty)$، بنابراین $D_{f o f^{-1}} = (۰, +\infty)$. ازطرفی می‌دانیم $f o f^{-1}(x) = x$، درنتیجه باید خط $y = x$ را روی فاصله‌ی $(۰, +\infty)$ رسم کنیم.



تابع پوشا

۳ـ۱۱۵ تابع $f : A \to B$ با ضابطه‌ی $y = f(x)$ را وقتی پوشا می‌گوییم که برای هر $y_۰$ متعلق به مجموعه‌ی B، $x_۰$ای متعلق به مجموعه‌ی A موجود باشد، به‌طوری‌که $y_۰ = f(x_۰)$.

مثال توابع f و g را که با نمودارهای زیر تعریف شده‌اند، درنظر بگیرید.



تابع f پوشاست، زیرا به‌ازای هر عضو B عضوی در A وجود دارد که به آن نظیر شده است. تابع g پوشا نیست، زیرا $۹ \in B$ و ۹ توسط هیچ عضوی از A پوشیده نشده است.

۳ـ۱۱۶ برای تشخیص پوشا بودن یک تابع از A به B، ابتدا بُرد تابع را به دست می‌آوریم. اگر $B \subseteq R_f$ باشد، دراین‌صورت f پوشاست.

مثال تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^۲ + ۱$ تعریف شده است. آیا این تابع پوشاست؟

حل

$$x^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow x^۲ + ۱ \geqslant ۱ \Longrightarrow y \geqslant ۱ \Longrightarrow R_f = [۱, +\infty)$$

چون $\mathbb{R} \not\subseteq [۱, \infty)$ پس f پوشا نیست.

مثال تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geqslant ۰ \\ ۲ + x & x < ۰ \end{cases}$ تعریف شده است. آیا این تابع پوشاست؟

حل

$$\begin{cases} x \geqslant ۰ \Longrightarrow \sqrt{x} \geqslant ۰ \Longrightarrow R_{f_۱} = [۰, +\infty) \\ x < ۰ \Longrightarrow ۲ + x < ۲ \Longrightarrow R_{f_۲} \Longrightarrow R_{f_۲} = (-\infty, ۲) \end{cases}$$

چون $R_{f_۱} \cup R_{f_۲} = \mathbb{R}$، پس f پوشاست.

تست اگر تابع $f : \mathbb{R} - \{۱\} \to B$ با ضابطه‌ی $y = \frac{۲x + ۱}{x - ۱}$ پوشا باشد، مجموعه‌ی B کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R} - \{۱\}$ ۳) $\mathbb{R} - \{۲\}$ ۴) $[۲, +\infty)$

حل گزینه‌ی ۳. بُرد تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{۲x + ۱}{x - ۱} \Longrightarrow yx - y = ۲x + ۱ \Longrightarrow x = \frac{-۱ - y}{۲ - y}$$

درنتیجه $R_f = \mathbb{R} - \{۲\}$. پس اگر $B = \mathbb{R} - \{۲\}$ یا $B \subset \mathbb{R} - \{۲\}$ باشد، f پوشاست.

۱۱۷ـ۳ برای بررسی این‌که تابع پوشاست یا خیر، به طریق زیر عمل می‌کنیم.

۱) yای دلخواه از مجموعه‌ی دوم انتخاب می‌کنیم و مساوی با ضابطه‌ی تابع قرار می‌دهیم $(y = f(x))$.

۲) ضابطه‌ی x برحسب y را به دست می‌آوریم $(x = f(y))$.

۳) به بحث روی وجود x به‌ازای yهای دلخواه واقع در مجموعه‌ی دوم می‌پردازیم که نیاز است دو شرط زیر بررسی می‌شود:

شرط اول، به‌ازای هر y در مجموعه‌ی دوم، x همواره تعریف‌شده باشد.

شرط دوم، x در دامنه‌ی تعریف تابع باشد.

نقص هریک از دو شرط بالا، پوشایی تابع را نقض می‌کند.

مثال تحقیق کنید تابع $f : N \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = ۲x + ۱$ پوشاست یا خیر.

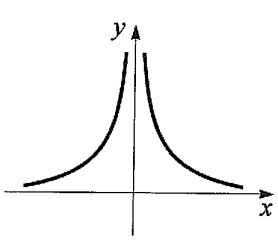
حل

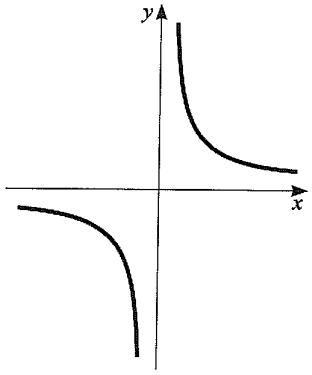
$$y = ۲x + ۱ \Longrightarrow ۲x = y - ۱ \Longrightarrow x = \frac{y - ۱}{۲}$$

به‌ازای هر y در $\mathbb{R}$ همواره x تعریف شده است (یعنی شرط اول برقرار است)، اما اگر قرار دهیم $y = ۲$، دراین‌صورت $x = \frac{۱}{۲} \notin N$ که $\frac{۱}{۲}$ (یعنی شرط دوم برقرار نیست)، لذا تابع پوشا نیست.

۱۱۸ـ۳ نمودار تابع $f : A \to B$ با ضابطه‌ی $y = f(x)$ پوشاست هرگاه به‌ازای هر مقدار $k \in B$ خط افقی $y = k$ نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع کند.

مثال تعیین کنید کدام یک از نمودارهای زیر در دامنه‌ی خود یک تابع پوشاست.





$$g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\} \qquad f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$$

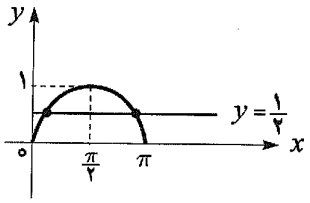
حل در تابع f به‌ازای $-1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ خط افقی $y = -1$ نمودار تابع را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند، پس این تابع پوشا نیست. در تابع g به‌ازای هر مقدار $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ خط افقی $y = \frac{1}{2}$ نمودار تابع را همواره در یک نقطه قطع می‌کند، پس این تابع پوشاست.

تست تابع به معادله‌ی $\begin{cases} f : [0, \pi] \to [0, 1] \\ f(x) = \sin x \end{cases}$

۱) یک‌به‌یک و پوشاست.
۲) یک‌به‌یک است، ولی پوشا نیست.
۳) پوشاست، ولی یک‌به‌یک نیست.
۴) نه یک‌به‌یک است، نه پوشا.

حل گزینه‌ی ۳.

در تابع f به‌ازای هر مقدار $k \in [0, 1]$ خط افقی $y = k$ نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند، پس این تابع پوشاست، اما یک‌به‌یک نیست، زیرا خط $y = \frac{1}{2}$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع کرده است.



۳ـ۱۱۹ برای بررسی پوشایی توابع چند ضابطه‌ای به طریق زیر عمل می‌کنیم. بُرد هر ضابطه را جداگانه حساب می‌کنیم و اجتماع این بُردها را محاسبه می‌کنیم. اگر اجتماع این بُردها با مجموعه‌ی دوم برابر باشد، تابع پوشاست و در غیر این‌صورت پوشا نیست.

مثال تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ 2x - 3 & x < 1 \end{cases}$ آیا پوشاست؟

حل اگر قرار دهیم $f_1(x) = x - 1$ و $f_2(x) = 1$ و $f_3(x) = 2x - 3$، دراین‌صورت

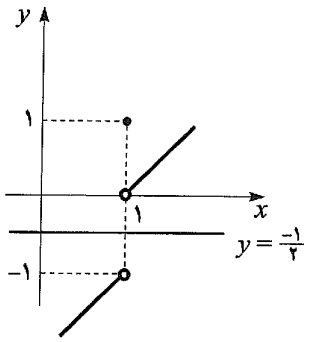
$$R_{f_1} = (0, +\infty)\ ,\ R_{f_2} = \{1\}\ ,\ R_{f_3} = (-\infty, -1)$$

مجموعه‌ی اعداد بین ۰ و ۱− پوشیده نمی‌شود، پس:

$$R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup R_{f_3} \neq \mathbb{R}$$

بنابراین تابع f پوشا نیست. ازطریق نمودار هم می‌توانیم پاسخ دهیم.

در تابع f به‌ازای $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ خط افقی $y = -\frac{1}{2}$ نمودار تابع را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند، پس این تابع پوشا نیست.



توابع معکوس مثلثاتی

۳ـ۱۲۰ $\operatorname{Arcsin} x$ (آرک سینوس x): تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sin x$ در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی است. بنابراین، تابع f یک‌به‌یک است، پس معکوس‌پذیر است.

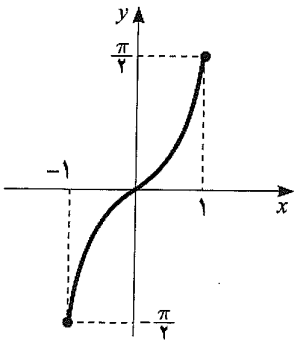
$$\begin{cases} f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \\ f(x) = \sin x \end{cases}$$

معکوس تابع f را به صورت $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x = \operatorname{Arcsin} x$ تعریف می‌کنیم. این تابع هر عددی در فاصله‌ی $[-1, 1]$ را به یک زاویه در فاصله‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ وصل می‌کند، بنابراین

$$\begin{cases} f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ f^{-1}(x) = \operatorname{Arcsin} x \end{cases}$$

۳ـ۱۲۱ ویژگی‌های تابع $y = \operatorname{Arcsin} x$

۱) نمودار $y = \operatorname{Arcsin} x$ قرینه‌ی نمودار $y = \sin x$ نسبت به خط $y = x$ است.



۲) محاسبه‌ی مقدار عددی تابع $y = \text{Arcsin}\, x$: اگر $0 \leqslant x \leqslant 1$ باشد، کمان $\text{Arcsin}\, x$ زاویه‌ای در فاصله‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ است، و اگر $-1 \leqslant x \leqslant 0$ باشد، کمان $\text{Arcsin}\, x$ زاویه‌ای در فاصله‌ی $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ است.

۳) چون $f(f^{-1}(x)) = x \ , \ f^{-1}(f(x)) = x$، پس:

$$\begin{aligned} &\sin(\text{Arcsin}\, x) = x && -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ &\text{Arcsin}(\sin x) = x && -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

۴) تابع $y = \text{Arcsin}\, x$ یک تابع فرد است. بنابراین داریم:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow \text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}\, x$$

۵) بُرد تابع $f(x) = \text{Arcsin}\, u(x)$: ابتدا بُرد $u(x)$ را به دست می‌آوریم و اشتراک آن را با بازه‌ی $[-1, 1]$ حساب می‌کنیم، سپس از محدوده‌ی به دست‌آمده (Arcsin) می‌گیریم، بدین‌ترتیب محدوده‌ی $\text{Arcsin}\, u(x)$ به دست می‌آید.

نکته: هنگامی که از طرفین یک نامساوی Arcsin می‌گیریم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

مثال حاصل $P = \text{Arcsin}\, 0 + \text{Arcsin}\, 1 + \text{Arcsin}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ را بیابید.

حل

$$P = 0 + \frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

مثال بُرد تابع با ضابطه‌ی $y = 2\, \text{Arcsin}\, \sqrt{x}$ را بیابید.

حل

$$u(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow u \geqslant 0 \Longrightarrow u \in [0, +\infty)$$

حالا از دو فاصله‌ی $(0, +\infty)$ و $[-1, 1]$ اشتراک می‌گیریم

$$[-1, 1] \cap [0, +\infty) = [0, 1] \Longrightarrow 0 \leqslant u \leqslant 1 \Longrightarrow \text{Arcsin}\, 0 \leqslant \text{Arcsin}\, u \leqslant \text{Arcsin}\, 1$$
$$\Longrightarrow 0 \leqslant \text{Arcsin}\, u \leqslant \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < \text{Arcsin}\, \sqrt{x} \leqslant \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 \leqslant 2\, \text{Arcsin}\, \sqrt{x} \leqslant \pi$$
$$\Longrightarrow 0 \leqslant y \leqslant \pi \Longrightarrow R_f = [0, \pi]$$

۱۲۲ـ۳ $\text{Arccos}\, x$ (آرک کسینوس x): تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos x$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع یک‌به‌یک است، پس معکوس‌پذیر است.

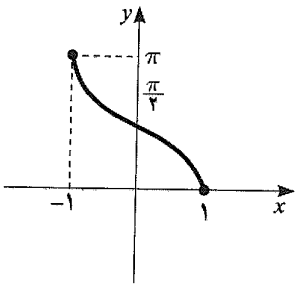
$$\begin{cases} f : [0, \pi] \to [-1, 1] \\ f(x) = \cos x \end{cases}$$

معکوس تابع f را به صورت $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x = \text{Arccos}\, x$ تعریف می‌کنیم: این تابع هر عددی در فاصله‌ی $[-1, 1]$ را به یک زاویه در فاصله‌ی $[0, \pi]$ وصل می‌کند، بنابراین:

$$\begin{cases} f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi] \\ f^{-1}(x) = \text{Arccos}\, x \end{cases}$$

۳ـ۱۲۳ | ویژگی‌های تابع $y = \text{Arccos}\, x$:

۱) نمودار $y = \text{Arccos}\, x$ قرینه‌ی نمودار $y = \cos x$ نسبت به خط $y = x$ است.



۲) محاسبه‌ی مقدار عددی تابع $y = \text{Arccos}\, x$: اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ باشد، کمان $\text{Arccos}\, x$ زاویه‌ای در فاصله‌ی $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ است، و اگر $-۱ \leqslant x \leqslant ۰$ باشد، کمان $\text{Arccos}\, x$ زاویه‌ای در فاصله‌ی $[\frac{\pi}{۲}, \pi]$ است.

۳) چون $f(f^{-۱}(x)) = x$ و $f^{-۱}(f(x)) = x$، پس:

$$\cos(\text{Arccos}\, x) = x \qquad -۱ \leqslant x \leqslant ۱$$
$$\text{Arccos}(\cos x) = x \qquad ۰ \leqslant x \leqslant \pi$$

۴) تابع $y = \text{Arccos}\, x$ نه زوج و نه فرد است، داریم:

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۱ \Longrightarrow \text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}\, x$$

۵) بُرد تابع $f(x) = \text{Arccos}\, u(x)$: ابتدا بُرد $u(x)$ را به دست می‌آوریم و اشتراک آن را با بازه‌ی $[-۱, ۱]$ حساب می‌کنیم، سپس از محدوده‌ی به دست‌آمده (Arccos) می‌گیریم، بدین‌ترتیب محدوده‌ی $\text{Arccos}\, u(x)$ به دست می‌آید.

نکته: هنگامی که از طرفین یک نامساوی Arccos می‌گیریم جهت نامساوی تغییر می‌کند.

مثال حاصل $P = \text{Arccos}\, ۰ + \text{Arccos}(-۱) + \text{Arcsin}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ را بیابید.

حل

$$P = \frac{\pi}{۲} + \pi + \frac{\pi}{۴} = \frac{۷\pi}{۴}$$

مثال معکوس تابع $y = \text{Arccos}(x - ۱)$ را بیابید.

حل

$$y = \text{Arccos}(x - ۱) \Longrightarrow \cos y = \cos(\text{Arccos}(x - ۱)) \Longrightarrow$$
$$\cos y = x - ۱ \Longrightarrow x = \cos y + ۱ \Longrightarrow f^{-۱}(x) = \cos x + ۱$$

مثال بُرد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲\,\text{Arccos}(\sqrt{x} - ۱)$ را به دست آورید.

حل

$$u(x)=\sqrt{x}-۱\ ,\ \sqrt{x}\geqslant ۰ \Longrightarrow \sqrt{x}-۱\geqslant -۱ \Longrightarrow u\geqslant -۱ \Longrightarrow u\in[-۱,+\infty)$$

حالا از دو فاصله‌ی $[-۱,+\infty)$ و $[-۱,۱]$ اشتراک می‌گیریم.

$$[-۱,+\infty)\cap[-۱,۱]=[-۱,۱] \Longrightarrow -۱\leqslant u\leqslant ۱ \Longrightarrow \operatorname{Arccos}(۱)\leqslant \operatorname{Arccos} u\leqslant \operatorname{Arccos}(-۱)$$
$$\Longrightarrow ۰\leqslant \operatorname{Arccos}(\sqrt{x}-۱)\leqslant \pi \Longrightarrow ۰\leqslant ۲\operatorname{Arccos}(\sqrt{x}-۱)\leqslant ۲\pi \Longrightarrow$$
$$۰\leqslant y\leqslant ۲\pi \Longrightarrow R_f=[۰,۲\pi]$$

۳ـ۱۲۴ $\operatorname{Arctan} x$ (آرک تانژانت x): تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\tan x$ در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است. بنابراین تابع یک‌به‌یک است، پس معکوس‌پذیر است.

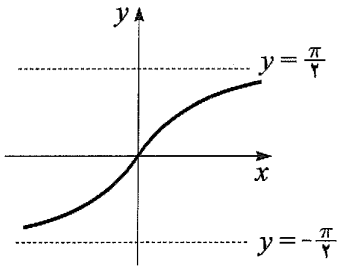
$$\begin{cases} f:(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})\to\mathbb{R} \\ f(x)=\tan x \end{cases}$$

معکوس تابع f را به صورت $f^{-۱}(x)=\tan^{-۱}x=\operatorname{Arctan} x$ تعریف می‌کنیم. این تابع هر عدد حقیقی در فاصله‌ی $(-\infty,\infty)$ را به یک زاویه در فاصله‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ وصل می‌کند، بنابراین:

$$\begin{cases} f^{-۱}:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}) \\ f^{-۱}(x)=\operatorname{Arctan} x \end{cases}$$

۳ـ۱۲۵ ویژگی‌های تابع $y=\operatorname{Arctan} x$:

۱) نمودار $y=\operatorname{Arctan} x$ قرینه‌ی نمودار $y=\tan x$ نسبت به خط $y=x$ است.



۲) محاسبه‌ی مقدار عددی تابع $y=\operatorname{Arctan} x$: اگر $x\geqslant ۰$ باشد، کمان $\operatorname{Arctan} x$ زاویه‌ای در فاصله‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲})$ است، و اگر $x\leqslant ۰$ باشد، کمان $\operatorname{Arctan} x$ زاویه‌ای در فاصله‌ی $(-\frac{\pi}{۲},۰]$ است.

۳) چون $f(f^{-۱}(x))=x$ و $f^{-۱}(f(x))=x$، پس:

$$\begin{aligned} &\tan(\operatorname{Arctan} x)=x && x\in\mathbb{R} \\ &\operatorname{Arctan}(\tan x)=x && -\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

۴) تابع $y = \operatorname{Arctan} x$ یک تابع فرد است، بنابراین

$$x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{Arctan}(-x) = -\operatorname{Arctan} x$$

۵) بُرد تابع $f(x) = \operatorname{Arctan} u$: ابتدا برد تابع $u(x)$ را محاسبه می‌کنیم، سپس از طرفین (Arctan) می‌گیریم، بدین‌ترتیب بُرد f را محاسبه می‌کنیم.
نکته: اگر از طرفین یک نامساوی (Arctan) بگیریم، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

مثال حاصل $P = \operatorname{Arctan}\sqrt{۳} - \operatorname{Arctan}(-۱)$ را بیابید.

حل

$$P = \frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۱۲}$$

مثال بُرد تابع $f(x) = \operatorname{Arctan}(\sin x)$ را به دست آورید.

حل

$$u(x) = \sin x\ ,\ -۱ \leqslant \sin x \leqslant ۱ \Longrightarrow -۱ \leqslant u(x) \leqslant ۱ \Longrightarrow$$
$$\operatorname{Arctan}(-۱) \leqslant \operatorname{Arctan} u(x) \leqslant \operatorname{Arctan}(۱) \Longrightarrow -\frac{\pi}{۴} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{۴} \Longrightarrow$$
$$R_f = [-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}]$$

۱۲۶ـ۳ $\operatorname{Arccot} x$ (آرک کتانژانت x): تابع با ضابطه‌ی $f(x) \cot x$ در بازه‌ی $(۰, \pi)$ اکیداً نزولی است. بنابراین، تابع یک‌به‌یک است، پس معکوس‌پذیر است.

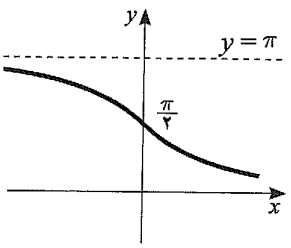
$$\begin{cases} f : (۰, \pi) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \cot x \end{cases}$$

معکوس تابع f را به صورت $f^{-۱}(x) = \cot^{-۱} x = \operatorname{Arccot} x$ تعریف می‌کنیم. این تابع هر عددی حقیقی را به یک زاویه در فاصله‌ی $(۰, \pi)$ وصل می‌کند، بنابراین:

$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to (۰, \pi) \\ f^{-۱}(x) = \operatorname{Arccot} x \end{cases}$$

۱۲۷ـ۳ ویژگی‌های تابع $y = \operatorname{Arccot} x$:

۱) نمودار $y = \operatorname{Arccot} x$ قرینه‌ی نمودار $y = \cot x$ نسبت به خط $y = x$ است.



۲) محاسبه‌ی مقدار عددی تابع $y = \text{Arccot}\, x$: اگر $x \geqslant ۰$ باشد، کمان $\text{Arccot}\, x$ زاویه‌ای در فاصله‌ی $(۰, \frac{\pi}{۲}]$ است، و اگر $x \leqslant ۰$ باشد، کمان $\text{Arccot}\, x$ زاویه‌ای در فاصله‌ی $[\frac{\pi}{۲}, \pi)$ است.

۳) چون $f(f^{-۱}(x)) = x$ و $f^{-۱}(f(x)) = x$، پس:

$$\cot(\text{Arccot}\, x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\text{Arccot}(\cot x) = x \qquad ۰ < x < \pi$$

۴) تابع $y = \text{Arccot}\, x$ نه زوج و نه فرد است، داریم:

$$x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \text{Arccot}(-x) = \pi - \text{Arccot}\, x$$

۵) بُرد تابع $f(x) = \text{Arccot}\, u(x)$: ابتدا بُرد تابع $u(x)$ را محاسبه می‌کنیم، سپس از طرفین (Arccot) می‌گیریم، بدین‌ترتیب بُرد تابع f را محاسبه می‌کنیم.

نکته: اگر از طرفین یک نامساوی (Arccot) بگیریم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.

مثال حاصل $P = ۲\,\text{Arccot}(۱) - \text{Arccot}(\sqrt{۳})$ را بیابید.

حل

$$P = (۲ \times \frac{\pi}{۴}) - \frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۳}$$

مثال بُرد تابع $f(x) = \text{Arccot}\, \frac{۲x}{۱+x^۲}$ را به دست آورید.

حل

$$u = \frac{۲x}{۱+x^۲} \Longrightarrow ux^۲ - ۲x + u = ۰ \Longrightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac \geqslant ۰ \Longrightarrow$$
$$۴ - ۴u^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow u^۲ \leqslant ۱ \Longrightarrow -۱ \leqslant u \leqslant ۱ \Longrightarrow \text{Arccot}(۱) \leqslant \text{Arccot}\, u \leqslant \text{Arccot}(-۱)$$
$$\Longrightarrow \frac{\pi}{۴} \leqslant y \leqslant \pi - \frac{\pi}{۴} \Longrightarrow \frac{\pi}{۴} \leqslant y \leqslant \frac{۳\pi}{۴} \Longrightarrow R_f = \left[\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}\right]$$

توابع هیپربولیک (هذلولی)

۱۲۸ـ۳ توابعی که در ارتباط با وضعیت هندسی مقطع مخروط، یعنی هذلولی هستند، توابع هیپربولیک یا هذلولی نامیده می‌شوند. تعاریف توابع هیپربولیک در زیر آمده است:

۱) سینوس هیپربولیک x[۱]: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$

۲) کسینوس هیپربولیک x[۲]: $\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$

۳) تانژانت هیپربولیک x: $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

۴) کتانژانت هیپربولیک x: $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

۱. «$\sinh x$» را اغلب به صورت اختصاری «$\text{sh}\ x$» می‌نویسند.

۲. «$\cosh x$» را اغلب به صورت «$\text{ch}\ x$» می‌نویسند.

تست اگر $f(x)=\sinh x$، مقدار $f(\ln ۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

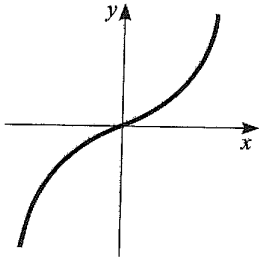
حل گزینه‌ی ۲.

$$f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$$

$$f(\ln ۲)=\frac{e^{\ln ۲}-e^{-\ln ۲}}{۲}=\frac{۲-\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

منحنی‌ها و برخی از خواص توابع هیپربولیک

۱۲۹_۳ منحنی $y=\sinh x$ به‌شکل زیر است:

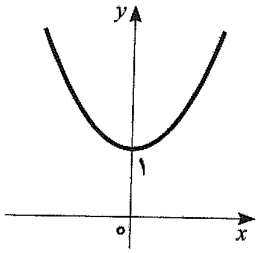


۱) $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\mathbb{R}$

۲) $\sinh x$ تابعی فرد است.

۳) $\sinh x$ تابعی یک‌به‌یک و پوشاست.

۱۳۰_۳ منحنی $y=\cosh x$ به‌شکل زیر است:

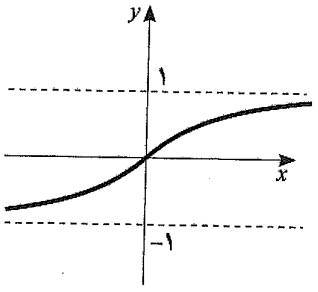


۱) $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=[۱,+\infty)$

۲) $\cosh x$ تابعی زوج است.

۳) $\cosh x$ تابعی یک‌به‌یک نیست، ولی پوشاست.

۱۳۱_۳ منحنی $y=\tanh x$ به‌شکل زیر است:

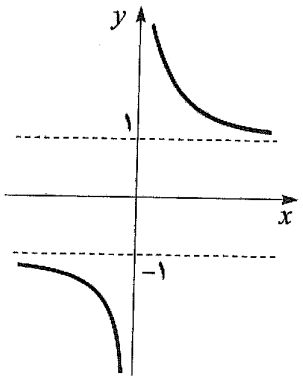


۱) $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=(-۱,۱)$

۲) $\tanh x$ تابعی فرد است.

۳) $\tanh x$ تابعی یک‌به‌یک و پوشاست.

۱۳۲_۳ منحنی $y=\coth x$ به‌شکل زیر است:



۱) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ,\ R_f=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

۲) $\coth x$ تابعی فرد است.

۳) $\coth x$ تابعی یک‌به‌یک و پوشاست.

۳ـ۱۳۳ اتحادهایی وجود دارند که توابع هیپربولیک در آن‌ها صدق می‌کند و شبیه اتحادهایی هستند که توابع مثلثاتی در آن‌ها صادقند.

۱) $\sinh x + \cosh x = e^x$	۲) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
۳) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	۴) $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
۵) $1 - \coth^2 x = \frac{1}{\sinh^2 x}$	۶) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$
۷) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\sinh^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1$	
۸) $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$	۹) $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$
۱۰) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$	۱۱) $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

مثال اگر $\sinh x = \frac{3}{4}$، آنگاه $\tanh x$ را بیابید.

حل

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Longrightarrow \cosh^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Longrightarrow \cosh x = \frac{5}{4}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

۳ـ۱۳۴ توابع معکوس هیپربولیک برحسب لگاریتم‌های طبیعی

$y = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$	$x \geqslant 1$
$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\lvert x\rvert < 1$
$y = \coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$\lvert x\rvert > 1$

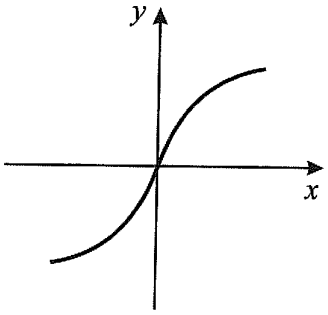
تست اگر $f(x) = \sinh x$، مقدار $f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\ln\sqrt{2}$ ۴) $\ln 2$

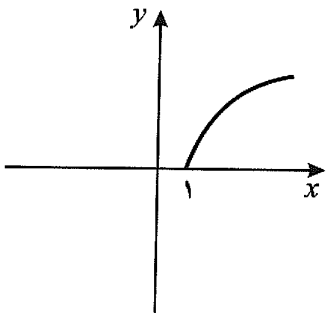
حل گزینه‌ی ۴.

$$f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \Longrightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 1}\right) = \ln 2$$

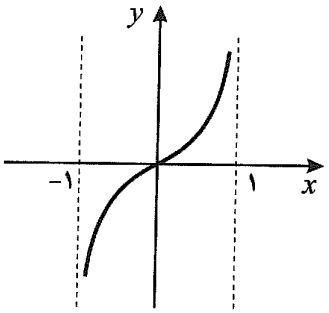
۳ـ۱۳۵ | نمودار توابع معکوس هیپربولیک



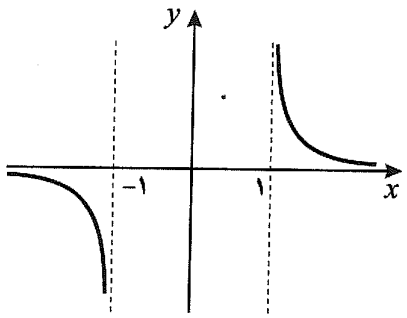
$y = \sinh^{-1} x$



$y = \cosh^{-1} x$



$y = \tanh^{-1} x$



$y = \coth^{-1} x$

تست‌های فصل ۳

۱. کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است؟

۱) $f=\{(x,y)|x=۱\}$
۲) $f=\{(x,y)|y^۲=۴x+۱\}$
۳) $f=\{(x,y)|x+y>۴\}$
۴) $f=\{(x,y)|y^۳=x\}$

۲. کدام یک از توابع زیر کراندار است؟

۱) $f(x)=x^۲+۱\ ,\ x\leqslant ۰$
۲) $f(x)=x^۲+۱\ ,\ ۰\leqslant x\leqslant ۱$
۳) $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<-۱\\ ۰ & x>۰\end{cases}$
۴) $f(x)=\begin{cases}\frac{x+۱}{x-۱} & x\neq ۱\\ ۰ & x=۱\end{cases}$

۳. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲}{|x|-[x]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-Z^+$
۲) $\mathbb{R}-Z$
۳) $\mathbb{R}$
۴) Z^+

۴. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\log\left(\frac{x^۲-۱}{x-۱}\right)$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)\cup(۱,+\infty)$
۲) $(-۱,۱]\cup(۲,+\infty)$
۳) $(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$
۴) $\mathbb{R}-\{۱\}$

۵. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{x^۲}{x}\right)\right)$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$
۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $\{\ \}$

۶. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{[۴-x]+[-x]}{[۳-x]+[۱-x]}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۱]\cup(۲,+\infty)$
۲) $(۱,۲)\cup(۲,+\infty)$
۳) $(-\infty,۱)\cup[۲,+\infty)$
۴) $(-\infty,+\infty)$

۷. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{۵x-x^۲}{۴}\right)}$ کدام است؟

۱) $(۱,۴)$
۲) $(۱,۴]$
۳) $[۱,۴]$
۴) ϕ

۸. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=\mathrm{Arcsin}(۱-x)+\log(\log x)$ کدام است؟

۱) $(۱,۲]$
۲) $(۰,۱)$
۳) $(۱,۲)$
۴) $[۱,۲)$

۹. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=\mathrm{Arccos}\left(\log\frac{x}{۱۰}\right)$ کدام است؟

۱) $[۱,۱۰۰]$
۲) $[۰/۱,۱۰]$
۳) $[۱,۱۰]$
۴) $[۱۰,۱۰۰]$

۱۰. اگر $f(x)=\frac{x^۲}{۱+x^۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-x}}$، آنگاه دامنه‌ی تعریف تابع gof کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ ۲) ϕ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $(-۱,+\infty)$

۱۱. اگر $f\left(\frac{x-۱}{x}\right)=\sqrt{۲x-۱}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $[۰,۱)$ ۲) $[-۱,۱)$ ۳) $(-۱,+\infty)$ ۴) $[-۱,۰)$

۱۲. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\log(۲+۳x)-\log(۳-۲x)$ کدام است؟

۱) $\{x|x<-\frac{۳}{۲}\}$ ۲) $\{x|x>\frac{۲}{۳}\}$

۳) $\{x|-\frac{۳}{۲}<x<\frac{۲}{۳}\}$ ۴) $\{x|-\frac{۲}{۳}<x<\frac{۳}{۲}\}$

۱۳. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{x^۲-۲x}{x-۲}}+\sqrt{\frac{x^۲-۴x}{x-۴}}$ کدام است؟

۱) $[۰,۲)\cup(۴,+\infty)$ ۲) $(۲,۴)\cup(۴,+\infty)$

۳) $(۰,۲)\cup(۸,+\infty)$ ۴) $[۰,۲)\cup(۲,۴)\cup(۴,+\infty)$

۱۴. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\log_۲\log_۳\log_۴^x$ کدام است؟

۱) $[۴,+\infty)$ ۲) $(۴,+\infty)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) ϕ

۱۵. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x+۱|-۴}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۵)\cup(۳,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۵)$

۳) $(-\infty,۳)\cup(۵,+\infty)$ ۴) $(-\infty,+\infty)$

۱۶. توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند. دامنه‌ی تعریف تابع $(f+g)of$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۱,۰)$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۷. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=\text{Arcsin}\frac{x-۳}{۲}-\ln(۴-x)$ کدام است؟

۱) $[۱,۵]$ ۲) $[۱,۴)$ ۳) $(۱,۴]$ ۴) $\mathbb{R}-[۱,۵)$

۱۸. توابع $f(x)=\frac{x}{۱-|x|}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند، دامنه‌ی تعریف تابع gof کدام است؟

۱) $(-\infty,-۱)\cup[۰,۱)$ ۲) $[-۱,۰)\cup(۱,+\infty)$

۳) $(-\infty,+\infty)-\{۱\}$ ۴) $(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$

۱۹. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\log(\sin x)}$ کدام است؟

۱) $\left\{۲k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in Z\right\}$ ۲) $\{۲k\pi+\pi,k\in Z\}$

۳) $\{\}$ ۴) $\left\{۲k\pi-\frac{\pi}{۲},k\in Z\right\}$

۲۰. اگر $f(x)=۲^x+۲^{-x}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $[۲,+\infty)$

۲۱. برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲^{-x^۲}$ کدام است؟

۱) $(۰, +\infty)$ ۲) $(۰, ۱)$ ۳) $[۰, ۱)$ ۴) $(۰, ۱]$

۲۲. توابع $f(x) = x + ۱$ و $(f \circ g)(x) = \frac{۲}{x - ۱}$ مفروضند، حوزه‌ی مقادیر تابع gof کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \{۰\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{-۱\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}^+$

۲۳. برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲x - ۲[x] + ۱$ کدام است؟

۱) $(-\infty, ۲]$ ۲) $[۱, ۳)$ ۳) $[۰, ۲)$ ۴) $[۰, ۳]$

۲۴. برد تابع با ضابطه‌ی $y = f(x) = \frac{x^۷ - x^۶}{x^۶ + x^۷}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \{۰, -۱\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{-۱, ۱\}$ ۳) $\mathbb{R} - \{۰, ۱\}$ ۴) $\{\}$

۲۵. برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{[x - ۱] + [۱ - x]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - Z$ ۲) Z ۳) $\mathbb{R} - \{۱\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۲۶. برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^{۱۰۰} - ۱۰۰x + ۹۹$ کدام است؟

۱) $[۰, +\infty)$ ۲) $(۰, +\infty)$ ۳) $(-\infty, ۰]$ ۴) $(-\infty, ۰)$

۲۷. حوزه‌ی مقادیر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۲x^۲ + ۱}{x^۲ + ۱}$ کدام است؟

۱) $[۱, ۲)$ ۲) $[۱, ۲]$ ۳) $(۱, ۲]$ ۴) $(۱, ۲)$

۲۸. برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲\cos(\log(\log x))$ کدام است؟

۱) $(۲, +\infty)$ ۲) $[-۲, ۲]$ ۳) $\mathbb{R}^+$ ۴) $(۰, ۲]$

۲۹. حوزه‌ی مقادیر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^۴ + ۲}{\sqrt{x^۴ + ۱}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[۲, +\infty)$ ۳) $\mathbb{R}^+$ ۴) $[۰, +\infty)$

۳۰. برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x + ۱| + |x| + |x - ۱|$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $[۲, +\infty)$ ۳) $[۳, +\infty)$ ۴) $(۰, ۳)$

۳۱. اگر $g(x) = ۱ + \frac{۱}{x}$ و $(g \circ f)(x) = x$ باشد، $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

۱) x ۲) $\frac{۱}{x}$ ۳) $۱ - x$ ۴) $\frac{۲}{x}$

۳۲. اگر $f(x) = x^۲$ و $g(x) = \sin x$ و $h(x) = \cos x$ باشد، $(f \circ h)(x) - (f \circ g)(x)$ برابر است با:

۱) $۲h(x)$ ۲) $h(۲x)$ ۳) ۱ ۴) $(h(x))^۲$

۳۳. مقدار $\left[\frac{۲x^۲ + ۳}{x^۲ + ۳}\right]$ به‌ازای جمیع مقادیر x برابر است با:

۱) ۰ ۲) x ۳) -۱ ۴) ۱

۳۴. اگر $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \text{ گویا} \\ -۱ & x \text{ گنگ} \end{cases}$ باشد، تابع $f^۴$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-۱, ۱$ ۴) صفر

۳۵. اگر $f(x)=\frac{۲+x}{x-۳}$ و $(g\,o\,f)(x)=\frac{۱}{x}$ باشد، $g(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x-۱}{x-۳}$ ۲) $\frac{۲+۳x}{x-۱}$ ۳) $\frac{۱-x}{۲-۳x}$ ۴) $\frac{x-۱}{۳x+۲}$

۳۶. اگر $f\left(\frac{e^x+۱}{۲e^x-۱}\right)=x$ باشد، $f(۲)$ کدام است؟

۱) $e^{-۱}$ ۲) e ۳) ۱ ۴) صفر

۳۷. فرض کنید $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{۲}$، $a>۰$ در این‌صورت حاصل $f(x+y)+f(x-y)$ برحسب $f(x)$ و $f(y)$ کدام است؟

۱) $۴f(x)\cdot f(y)$ ۲) $۲f(x)\cdot f(y)$ ۳) $\frac{۱}{۲}f(x)\cdot f(y)$ ۴) $f(x)-f(y)$

۳۸. اگر $f(x)=\ln x^۹$، $g(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$ و $h(x)=e^x$ باشد، ضابطه‌ی $(f\,o\,g\,o\,h)(x)$ کدام است؟

۱) $۶x$ ۲) $۹x$ ۳) $۱۰x$ ۴) $e^{۹x}$

۳۹. اگر $f(x)=ax+b$ و $fff(x)=۲-x$ باشد، a و b کدامند؟

۱) $b=۲, a=-۱$ ۲) $b=-۲, a=۱$ ۳) $a=b=۱$ ۴) $a=b=۲$

۴۰. در صورتی که $f(x)=۲[x]+۲[-x]$ باشد، آنگاه $f\,o\,f\,o\,f(x)$ کدام است؟

۱) $\{۲\}$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $\{۰,۴\}$ ۴) $\{۰,-۲\}$

۴۱. اگر $f(x)=۲x-|x|$ و $g(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geqslant ۰\\ x & x<۰\end{cases}$ باشد، تابع $f\,o\,g$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x^۲ & x\geqslant ۰\\ ۳x & x<۰\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x^۲ & x\geqslant ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x^۲ & x\geqslant ۰\\ \frac{۱}{۲} & x<۰\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x^۲ & x\geqslant ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$

۴۲. برد تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ به صورت $R_f=[-۱,۲]$ می‌باشد، برد تابع $y=-۳f(\frac{x}{۲})+۱$ کدام است؟

۱) $[-۴,۴]$ ۲) $[-۵,۴]$ ۳) $[-۴,۵]$ ۴) $[-۵,۵]$

۴۳. اگر $f(x)=\frac{x}{۱-x}$، آنگاه $\frac{f(x)+f(-x)}{۲}$ برابر است با:

۱) $f(x^۲)$ ۲) $f(-x^۲)$ ۳) $۲f(x)$ ۴) $\frac{۱}{۲}f(x)$

۴۴. اگر $f(x-۴)+۲f(۴-x)=۳x$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $۳x-۴$ ۲) $۴x-۱$ ۳) $۳x+۴$ ۴) $۴x+۵$

۴۵. اگر $f(x)=\frac{x+|x|}{۲}$ و $g(x)=\begin{cases}x & x<۰\\ x^۲ & x\geqslant ۰\end{cases}$ باشد، $(f\,o\,g)(x)$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}۰ & x<۰\\ x^۲ & x\geqslant ۰\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x & x<۰\\ x^۲ & x\geqslant ۰\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}۱ & x<۰\\ x^۲ & x\geqslant ۰\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}۰ & x<۰\\ x & x\geqslant ۰\end{cases}$

۴۶. اگر $f\left(\frac{x}{x^۲+x+۱}\right)=\frac{x^۲}{x^۴+x^۲+۱}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^۲}{۱-۲x}$ ۲) $\frac{x}{۱-x^۲}$ ۳) $\frac{x}{۱+۲x}$ ۴) $\frac{x^۲}{۱+x^۲}$

۴۷. $f(x)$ تابعی از درجه‌ی اول نسبت به x بوده و $(f\,o\,f)(x)=x+۲$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۸. تابع $f(x)=|x-۲|$ با کدام یک از توابع زیر مساوی است؟

۱) $g(x)=\frac{|x^۲-۳x+۲|}{|x-۱|}$ ۲) $h(x)=\frac{|x^۲-۴|}{|x+۲|}$

۳) $S(x)=\frac{x^۲-۴}{|x-۲|}$ ۴) $t(x)=\frac{|۶x-۱۲|}{۶}$

۴۹. تابع $f(x)=۲x-\sin(x-۲)$ مفروض است، حاصل $f^{-۱}(۴)+f(۲)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۵۰. اگر $f(x)=\log(x+\sqrt{x^۲+۱})$ باشد، $f(-x)$ برابر است با:

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $\frac{۱}{f(x)}$ ۴) $f\left(\frac{۱}{x}\right)$

۵۱. عبارت $\tanh^{-۱}\left(-\frac{۴}{۵}\right)$ برحسب لگاریتم طبیعی کدام است؟

۱) $e^{\frac{۱}{۴}}$ ۲) $\ln\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\ln ۳$ ۴) $\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱}{۳}$

۵۲. اگر $\sinh x=۲$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\ln(\sqrt{۵}+۲)$ ۲) $\ln\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\ln(\sqrt{۵}-۲)$ ۴) $\ln(۲-\sqrt{۵})$

۵۳. اگر $x=\ln ۲$ باشد، $\sinh x$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۲

۵۴. تابع $\tanh x$ برابر است با:

۱) $\frac{e^{۲x}-۱}{e^{۲x}+۱}$ ۲) $\frac{e^{۲x}+۱}{e^{۲x}-۱}$ ۳) $\frac{e^{x}-۱}{e^{x}+۱}$ ۴) $\frac{e^{x}+۱}{e^{x}-۱}$

۵۵. اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $f\,o\,g(x)=-f(x)$ باشد، آنگاه $g(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵۶. اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x>۰\\ ۱ & x\leqslant ۰\end{cases}$ باشد، مقدار $f(-f(x))$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $x+۱$ ۳) $x^۲+۱$ ۴) $(x^۲+۱)^۲+۱$

۵۷. تابع با ضابطه $f(x)=\frac{(۱+۲^x)^۲}{۲^x}$:

۱) فرد است
۲) زوج است
۳) نه فرد است و نه زوج است
۴) هم فرد و هم زوج است

۵۸. تابع $f(x)$ در دامنه‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف شده است، توابع $h(x)=f(x)+f(-x)$ و $g(x)=f(x)-f(-x)$ چگونه‌اند؟

۱) $g(x)$ فرد و $h(x)$ زوج است
۲) $g(x)$ زوج و $h(x)$ فرد است
۳) $g(x)$ و $h(x)$ فرد می‌باشند
۴) $g(x)$ و $h(x)$ زوج می‌باشند

۵۹. کدام تابع فرد است؟

۱) $f(x)=\sqrt{۱+x+x^۲}-\sqrt{۱-x+x^۲}$
۲) $f(x)=|۲-x|+|۲+x|$
۳) $f(x)=\frac{x^۳-x\cos x+\sin x}{\tan x+\cot x-۲x}$
۴) $f(x)=\sqrt[۳]{(۲-x)^۲}+\sqrt[۳]{(۲+x)^۲}$

۶۰. تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲-۲x+۲y+۲xy$:

۱) فرد است
۲) زوج است
۳) نه فرد و نه زوج است
۴) هم فرد و هم زوج

۶۱. تابع $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x\geqslant ۰\end{cases}$:

۱) زوج است
۲) فرد است
۳) نه زوج و نه فرد است
۴) هم فرد و هم زوج

۶۲. کدام تابع نه فرد و نه زوج است؟

۱) $y=\left[\frac{x^۴}{x^۴+۱}\right]$
۲) $y=\sqrt{[x]+[-x]}$
۳) $y=\sqrt{-\sin^۲\pi x}$
۴) $y=(x^۲-۲x)^۲$

۶۳. توابع $f(x)=\frac{[x]+[-x]}{x^۲+۱}$ و $g(x)=\frac{x^۲\sin x}{[x]+[-x]}$ به ترتیب:

۱) زوج و فرد می‌باشند.
۲) فرد و زوج می‌باشند.
۳) فرد و فرد می‌باشند.
۴) زوج و زوج می‌باشند.

۶۴. تابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ با ضابطه $f(x)=x^۲+۲x$:

۱) یک‌به‌یک و غیرپوششی است.
۲) یک‌به‌یک و پوششی است.
۳) غیر یک‌به‌یک و غیر پوششی است.
۴) غیر یک‌به‌یک ولی پوششی است.

۶۵. تابع $\begin{cases}f:\mathbb{R}\longrightarrow Z\\ x\longmapsto[x]\end{cases}$:

۱) هم پوشا و هم یک‌به‌یک است.
۲) یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست.
۳) نه پوشا و نه یک‌به‌یک است.
۴) پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.

۶۶. معکوس تابع $f(x)=۲^{x-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\log_۲^x-۱$
۲) $f^{-۱}(x)=\log^{x^۲}$
۳) $f^{-۱}(x)=\log_۲^x+۱$
۴) $f^{-۱}(x)=\log_۲^x$

۶۷. معکوس تابع $f(x) = \ln \ln x$ کدام است؟

۱) e^{-x} ۲) e^{x} ۳) $e^{e^{x}}$ ۴) $\left(\frac{۱}{e}\right)^{e^{x}}$

۶۸. اگر $f(x+۱) = ۲x+۱$ باشد، $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x-۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲x+۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲x-۱}{۲}$ ۴) $\frac{x+۱}{۲}$

۶۹. به ازای چه مقدار از a، وارون تابع $f(x) = \frac{x-۱}{x-a}$ برابر خودش است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۷۰. اگر $f(x) = \begin{cases} x-۲ & x \geqslant ۱ \\ ۲x-۴ & x < ۱ \end{cases}$ ، آنگاه $f^{-۱}(-۶)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۴ ۴) -۴

۷۱. معکوس تابع f با ضابطه‌ی $y = \sqrt{۲ - \sqrt{x-۲}}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x) = x^{۴} - ۴x^{۲} + ۶$
۲) $f^{-۱}(x) = x^{۴} - ۲x^{۲} + ۴$
۳) $f^{-۱}(x) = ۱ + (۲ - x^{۲})^{۲}$
۴) $f^{-۱}(x) = ۱ - (۲ - x^{۲})^{۲}$
۱) $f^{-۱}(x) = \sqrt{۲ - \sqrt{۲ + x}}$
۲) $f^{-۱}(x) = \sqrt{۲ + \sqrt{۲ + x}}$
۳) $f^{-۱}(x) = -\sqrt{۲ - \sqrt{۲ + x}}$
۴) $f^{-۱}(x) = -\sqrt{۲ + \sqrt{۲ + x}}$

۷۲. معکوس تابع $f(x) = \sin \frac{x+۱}{x}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{\text{Arcsin}\, x + ۱}$
۲) $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{\text{Arcsin}\, x - ۱}$
۳) $f^{-۱}(x) = \text{Arcsin}\, x - ۱$
۴) $f^{-۱}(x) = \text{Arcsin}\, x + ۱$

۷۳. معکوس تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲(۸)^{\frac{x}{۳}}$ در نقطه $x = ۸$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) نامعین

۷۴. اگر $f(x) = e^{x} - ۱$، آنگاه $f \circ f^{-۱}(۰)$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۷۵. مختصات نقطه تقاطع نمودار تابع $f(x) = x^{۳} + x + ۲۷$ با نمودار تابع معکوس آن کدام است؟

۱) $(-۳, -۳)$ ۲) $(۱, ۱)$ ۳) $(۳, ۳)$ ۴) $(-۱, -۱)$

۷۶. وارون تابع $y = \sin(\cos x)$ کدام است؟

۱) $\text{Arccos}\cos x$ ۲) $\text{Arcsin}\, x$ ۳) $\text{Arccos}\,\text{Arcsin}\, x$ ۴) $\text{Arcsin}\,\text{Arccos}\, x$

۷۷. کدام یک از توابع زیر در دامنه‌ی تعریفش معکوس‌پذیر است؟

۱) $f(x) = \sqrt{x-۱} + \sqrt{x^{۲}}$
۲) $f(x) = |x^{۳}|$
۳) $f(x) = ۲x - \sqrt{x-۱}$
۴) $f(x) = x - \sqrt{x^{۲}+۹}$

۷۸. تابع $f(x) = -x^۳ + ۱۲x + ۴$ در کدام یک از فواصل زیر وارون‌پذیر است؟

۱) $[۱, +\infty)$ ۲) $(-\infty, ۰]$ ۳) $[-۳, ۲]$ ۴) $[-۲, ۲]$

۷۹. معکوس تابع $f(x) = \text{Arcsin}\left(\ln \frac{x}{۱۰}\right)$ کدام است؟

۱) $e^{\sin x}$ ۲) $۱۰ \ln e^{\sin x}$ ۳) $۱۰ e^{\sin x}$ ۴) $e^{۱۰} \sin x$

۸۰. وارون تابع $f(x) = \cot hx$ کدام است؟

۱) $\ln\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^۲$ ۲) $\ln\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}$ ۳) $\ln\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)^۲$ ۴) $\ln\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}$

۸۱. معکوس تابع $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(e^{-x} - e^{x})$ ۲) $e^{x} - e^{-x}$ ۳) $\frac{۱}{۲}(e^{x} - ۱)$ ۴) $\frac{۱}{۲}(e^{x} - e^{-x})$

۸۲. در تابع $y = x + |x - ۱|$ حدود تغییرات y کدام است؟

۱) $y \geqslant ۰$ ۲) $y \geqslant ۱$ ۳) $y \geqslant -۱$ ۴) $۰ \leqslant y \leqslant ۳$

۸۳. تابع f و g بر $\mathbb{R}$ با ضابطه‌های زیر مفروضند، کدام یک از این دو تابع با هم مساویند؟

۱) $g(x) = \frac{۳x^۴ - ۳x}{۳x}, f(x) = x^۳ - ۱$ ۲) $g(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱}, f(x) = x - ۱$

۳) $g(x) = \frac{x}{x}, f(x) = ۱$ ۴) $g(x) = \frac{۲x^۲ + ۲}{x^۲ + ۱}, f(x) = ۲$

۸۴. برد تابع $f(x) = \sqrt{\log(۲x - x^۲)}$، کدام بازه است؟

۱) $\{۱\}$ ۲) $[۰, ۱]$ ۳) $[۰, ۲]$ ۴) $\{۰\}$

۸۵. تابع $\begin{cases} f : [-۲, ۳] \to [۰, ۴] \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$:

۱) پوشا و یک‌به‌یک است.
۲) نه پوشا و نه یک‌به‌یک است.
۳) پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.
۴) پوشا نیست ولی یک‌به‌یک است.

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۳

۱. گزینه‌ی ۴. زیرا به‌ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید.

۲. گزینه‌ی ۲.

$$۰ \leqslant x \leqslant ۱ \Longrightarrow ۰ \leqslant x^۲ \leqslant ۱ \Longrightarrow ۱ \leqslant x^۲ + ۱ \leqslant ۲ \Longrightarrow ۱ \leqslant f(x) \leqslant ۲$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$|x| - [x] = ۰ \Longrightarrow |x| = [x] \Longrightarrow x \in Z^+ \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - Z^+$$

۴. گزینه‌ی ۱.

$$y = \log\left(\frac{x^۲ - ۱}{x - ۱}\right) = \log\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)} \xrightarrow{x \neq ۱} y = \log(x+۱) \Longrightarrow x + ۱ > ۰ \Longrightarrow x > -۱$$

$$D_f = (-۱, ۱) \cup (۱, +\infty)$$

۵. گزینه‌ی ۲.

$$y = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{x^۲}{x}\right)\right) \xrightarrow{x\neq ۰} y = \text{Arcsin}(\sin x) \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$$

۶. گزینه‌ی ۱.

$$f(x) = \frac{۴ + [-x] + [-x]}{۳ + [-x] + ۱ + [-x]} = \frac{۴ + ۲[-x]}{۴ + ۲[-x]} = \frac{۲ + [-x]}{۲ + [-x]}$$
$$\Longrightarrow [-x] = -۲ \Longrightarrow -۲ \leqslant -x < -۱ \Longrightarrow ۱ < x \leqslant ۲ \Longrightarrow D_f = (-\infty, ۱] \cup (۲, +\infty)$$

۷. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases} \dfrac{۵x - x^۲}{۴} > ۰ \Longrightarrow ۵x - x^۲ > ۰ \Longrightarrow ۰ < x < ۵ & (۱) \\ \ln \dfrac{۵x - x^۲}{۴} \geqslant ۰ \Longrightarrow \dfrac{۵x - x^۲}{۴} \geqslant ۱ \Longrightarrow -x^۲ + ۵x - ۴ \geqslant ۰ \Longrightarrow ۱ \leqslant x \leqslant ۴ & (۲) \end{cases}$$
$$(۱), (۲) \Longrightarrow D_f = [۱, ۴]$$

۸. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} \log x > ۰ \Longrightarrow x > ۱ \\ -۱ \leqslant ۱ - x \leqslant ۱ \Longrightarrow ۰ \leqslant x \leqslant ۲ \end{cases} \Longrightarrow D_f = (۱, ۲]$$

۹. گزینه‌ی ۱.

$$-۱ \leqslant \log \frac{x}{۱۰} \leqslant ۱ \Longrightarrow \log \frac{۱}{۱۰} \leqslant \log \frac{x}{۱۰} \leqslant \log ۱۰ \Longrightarrow \frac{۱}{۱۰} \leqslant \frac{x}{۱۰} \leqslant ۱۰$$
$$۱ \leqslant x \leqslant ۱۰۰ \Longrightarrow D_f = \{x | ۱ \leqslant x \leqslant ۱۰۰\}$$

۱۰. گزینه‌ی ۲. زیرا رادیکال همواره منفی است بنابراین

$$g \circ f(x) = \frac{۱}{\sqrt{\dfrac{x^۲}{۱ + x^۲}\left(\dfrac{x^۲}{۱ + x^۲} - ۱\right)}} = \frac{۱ + x^۲}{\sqrt{-x^۲}} \Longrightarrow D_{g \circ f} = \phi$$

۱۱. گزینه‌ی ۲.

$$t = \frac{x - ۱}{x} \Longrightarrow x = \frac{-۱}{t - ۱} \Longrightarrow f(t) = \sqrt{\frac{-۲}{t - ۱} - ۱} = \sqrt{\frac{-(t + ۱)}{t - ۱}} \Longrightarrow f(x) = \sqrt{\frac{-(x + ۱)}{x - ۱}}$$
$$\frac{-(x + ۱)}{x - ۱} \geqslant ۰ \Longrightarrow D_f = [-۱, ۱)$$

۱۲. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} ۲ + ۳x > ۰ \Longrightarrow x > -\dfrac{۲}{۳} \\ ۳ - ۲x > ۰ \Longrightarrow x < \dfrac{۳}{۲} \end{cases} \Longrightarrow D_f = \left\{-\frac{۲}{۳} < x < \frac{۳}{۲}\right\}$$

۱۳. گزینه‌ی ۴.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x(x-۲)}{x-۲}}+\sqrt{\frac{x(x-۴)}{x-۴}} \xrightarrow{x\neq ۲, x\neq ۴} f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x}=۲\sqrt{x}\ ,\ x\geqslant ۰$$
$$D_f=[۰,۲)\cup(۲,۴)\cup(۴,+\infty)$$

۱۴. گزینه‌ی ۲. $x>۰\ ،\ \log_۳\log_۴^x>۰\Longrightarrow \log_۴^x>۳^۰\Longrightarrow x>۴\Longrightarrow D_f=(۴,+\infty)$

۱۵. گزینه‌ی ۱.

$$|x+۱|-۴>۰\Longrightarrow |x+۱|>۴\Longrightarrow x+۱>۴ \text{ یا } x+۱<-۴$$
$$\Longrightarrow x>۳ \text{ یا } x<-۵\Longrightarrow D_f=(-\infty,-۵)\cup(۳,+\infty)$$

۱۶. گزینه‌ی ۱.

$$D_f=[-۱,۱]\ ,\ D_g=[۰,+\infty)\Longrightarrow D_{f+g}=[۰,۱]$$
$$D_{(f+g)\circ f}=\{-۱\leqslant x\leqslant ۱|\sqrt{۱-x^۲}\in D_{f+g}\}=\{-۱\leqslant x\leqslant ۱|۰\leqslant\sqrt{۱-x^۲}\leqslant ۱\}=[-۱,۱]$$

۱۷. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases}۴-x>۰\\ -۱\leqslant\dfrac{x-۳}{۲}\leqslant ۱\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x<۴\\ ۱\leqslant x\leqslant ۵\end{cases}\Longrightarrow D_f=[۱,۴)$$

۱۸. گزینه‌ی ۱.

$$D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۱\}, D_g=[۰,+\infty)$$
$$D_{g\circ f}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\left\{x\neq\pm۱|\frac{x}{۱-|x|}\geqslant ۰\right\}$$
$$۱-|x|=\begin{cases}۱+x & x<۰\\ ۱-x & x>۰\end{cases}\ ،\ D_{g\circ f}=(-\infty,-۱)\cup[۰,۱)$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
x		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$۱-\|x\|$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
$f(x)$		$+$		$-$	۰	$+$		$-$	

۱۹. گزینه‌ی ۱. می‌دانیم $-۱\leqslant\sin x\leqslant ۱$، در بازه $[-۱,۰]$ تابع لگاریتم تعریف نشده است و برای $x\in(۰,۱)$، $\log x$ منفی است. پس دامنه تعریف تابع، تنها شامل نقاطی است که در آن‌ها $\sin x=۱$، یعنی:

$$D_f=\left\{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in Z\right\}$$

۲۰. گزینه‌ی ۱.

$$g\,o\,f(x)=\sqrt{۲-۲^x-۲^{-x}}=\sqrt{۲-۲^x-\frac{۱}{۲^x}}=\sqrt{\frac{-(۲^x-۱)^۲}{۲^x}}$$
$$\frac{-(۲^x-۱)^۲}{۲^x}\geqslant ۰\Longrightarrow -(۲^x-۱)^۲\geqslant ۰\Longrightarrow (۲^x-۱)^۲\leqslant ۰\Longrightarrow ۲^x-۱=۰\Longrightarrow x=۰$$

۲۱. گزینه‌ی ۴.

$$D_f = \mathbb{R}, y = ۲^{-x^۲} \Longrightarrow -x^۲ = \log_۲^y \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-\log_۲^y}$$
$$-\log_۲^y \geqslant ۰ \Longrightarrow \log_۲^y \leqslant ۰ \Longrightarrow ۰ < y \leqslant ۲^۰ \Longrightarrow ۰ < y \leqslant ۱ \Longrightarrow R_f = (۰, ۱]$$

۲۲. گزینه‌ی ۲.

$$(f\,o\,g)(x) = \frac{۲}{x-۱} \Longrightarrow g(x)+۱ = \frac{۲}{x-۱} \Longrightarrow g(x) = \frac{۳-x}{x-۱}$$
$$(g\,o\,f)(x) = \frac{۲-x}{x} \Longrightarrow y = \frac{۲-x}{x} \Longrightarrow x(y+۱) = ۲ \Longrightarrow x = \frac{۲}{y+۱}$$
$$R_{g\,o\,f} = \mathbb{R} - \{-۱\}$$

۲۳. گزینه‌ی ۲.

$$۰ \leqslant x - [x] < ۱ \Longrightarrow ۰ \leqslant ۲x - ۲[x] < ۲ \Longrightarrow ۱ \leqslant ۲x - ۲[x] + ۱ < ۳$$

۲۴. گزینه‌ی ۲.

$$x^۶ + x^۷ \neq ۰ \Longrightarrow x^۶(x+۱) \neq ۰ \Longrightarrow x \neq ۰, x \neq -۱ \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۰, -۱\}$$
$$y = \frac{x^۶(x-۱)}{x^۶(۱+x)} \xrightarrow{x \neq ۰} y = \frac{x-۱}{۱+x} \Longrightarrow y(۱+x) = x-۱ \Longrightarrow x = \frac{۱+y}{۱-y} \neq ۰$$
$$\Longrightarrow y \neq -۱, y \neq ۱ \Longrightarrow R_f = \mathbb{R} - \{۱, -۱\}$$

۲۵. گزینه‌ی ۱.

$$y = \frac{x}{[x]+[-x]}, [x]+[-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases} \Longrightarrow x \in (\mathbb{R} - Z) \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - Z$$
$$y = \frac{x}{-۱} = -x \Longrightarrow R_f = \mathbb{R} - Z$$

۲۶. گزینه‌ی ۱.

$$f'(x) = ۱۰۰x^{۹۹} - ۱۰۰\ ,\ f'(x) = ۰ \Longrightarrow x = ۱\ ,\ f(۱) = ۰ \quad \text{مینیمم مطلق}$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty\ ,\ R_f = [۰, +\infty)$$

۲۷. گزینه‌ی ۱.

$$y = \frac{x^۲+x^۲+۱}{x^۲+۱} = ۱ + \frac{x^۲}{x^۲+۱}\ ,\ ۰ \leqslant \frac{x^۲}{x^۲+۱} < ۱ \Longrightarrow ۱+۰ \leqslant ۱ + \frac{x^۲}{x^۲+۱} < ۱+۱$$
$$۱ \leqslant y < ۲ \Longrightarrow R_f = [۱, ۲)$$

۲۸. گزینه‌ی ۲.

$$\log x > ۰ \Longrightarrow x > ۱۰^۰ \Longrightarrow x > ۱\ ,\ D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > ۱\}$$
$$x \in D_f : -۱ \leqslant \cos(\log(\log x)) \leqslant ۱ \Longrightarrow -۲ \leqslant ۲\cos(\log(\log x)) \leqslant ۲ \Longrightarrow -۲ \leqslant y \leqslant ۲$$

۲۹. گزینه‌ی ۲.

$$y=\frac{x^۴+۱+۱}{\sqrt{x^۴+۱}}=\frac{x^۴+۱}{\sqrt{x^۴+۱}}+\frac{۱}{\sqrt{x^۴+۱}}=\sqrt{x^۴+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^۴+۱}}$$
$$y=\sqrt{x^۴+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^۴+۱}}\geqslant ۲\Longrightarrow R_f=[۲,+\infty)$$

۳۰. گزینه‌ی ۲.

$$|x-۱|=۰\Longrightarrow x=۱\ ,\ \ |x|=۰\Longrightarrow x=۰\ ,\ \ |x+۱|=۰\Longrightarrow x=-۱$$

مقدار تابع را به‌ازای هر یک از ریشه‌ها به دست می‌آوریم:

$$f(۱)=۳\ ,\ \ f(۰)=۲\ ,\ \ f(-۱)=۳$$

اکنون از مقادیر به دست آمده مینیمم مطلق تابع را معین می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty\quad ,\quad y>۰$$

چون کمترین مقدار تابع $f(۰)=۲$ می‌باشد، در نتیجه: $R_f=[۲,+\infty)$.

۳۱. گزینه‌ی ۱.

$$g\,o\,f=x\Longrightarrow ۱+\frac{۱}{f(x)}=x\Longrightarrow f(x)=\frac{۱}{x-۱}\Longrightarrow f\,o\,g=x$$

۳۲. گزینه‌ی ۲.

$$f\,o\,h-f\,o\,g=\cos^۲x-\sin^۲x=\cos ۲x=h(۲x)$$

۳۳. گزینه‌ی ۴.

$$\left[\frac{x^۲+۳+x^۲}{x^۲+۳}\right]=\left[۱+\frac{x^۲}{x^۲+۳}\right]=۱+\left[\frac{x^۲}{x^۲+۳}\right]=۱+۰=۱$$

۳۴. گزینه‌ی ۲. اگر x گویا باشد، در این‌صورت $f(x)=۱$ و در نتیجه:

$$f^۴=f\cdot f\cdot f\cdot f=۱\times ۱\times ۱\times ۱=۱$$

اگر x گنگ باشد، در این‌صورت $f(x)=-۱$ و در نتیجه:

$$f^۴=f\cdot f\cdot f\cdot f=(-۱)(-۱)(-۱)(-۱)=۱$$

۳۵. گزینه‌ی ۴.

$$g\left(\frac{۲+x}{x-۳}\right)=\frac{۱}{x}\ ,\ \ \frac{۲+x}{x-۳}=t\Longrightarrow x=\frac{۲+۳t}{t-۱}\Longrightarrow g(t)=\frac{t-۱}{۲+۳t}$$

۳۶. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{e^x+۱}{۲e^x-۱}=۲\Longrightarrow e^x+۱=۴e^x-۲\Longrightarrow e^x=۱\Longrightarrow x=۰\Longrightarrow f(۲)=۰$$

۳۷. گزینه‌ی ۲.

$$f(x+y)+f(x-y)=\frac{a^{x+y}+a^{-(x+y)}}{۲}+\frac{a^{x-y}+a^{-(x-y)}}{۲}$$
$$=\frac{۱}{۲}a^{x}(a^{y}+a^{-y})+\frac{۱}{۲}a^{-x}(a^{y}+a^{-y})$$
$$=\frac{۱}{۲}(a^{y}+a^{-y})(a^{x}+a^{-x})=۲f(x)f(y)$$

۳۸. گزینه‌ی ۱.

$$(g\,o\,h)(x)=g(h(x))=\sqrt[۳]{e^{۲x}}=e^{\frac{۲x}{۳}}$$
$$(f\,o\,g\,o\,h)(x)=f(g(h(x)))=\ln(e^{\frac{۲x}{۳}})^{۹}=\ln e^{۶x}=۶x$$

۳۹. گزینه‌ی ۱.

$$f(f(x))=a^{۲}x+ab+b\Longrightarrow fff(x)=a^{۳}x+a^{۲}b+ab+b=۲-x\Longrightarrow$$
$$a^{۳}=-۱\Longrightarrow a=-۱,(a^{۲}+a+۱)b=۲\Longrightarrow b=۲$$

۴۰. گزینه‌ی ۲.

$$f(x)=۲[x]+۲[-x]=۲([x]+[-x])=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۲ & x\notin Z\end{cases}$$

$$f\,o\,f(x)=f(f(x))=\begin{cases}f(۰)=۰\\ f(-۲)=۰\end{cases}\Longrightarrow f\,o\,f\,o\,f(x)=f(f\,o\,f(x))=f(۰)=۰$$

۴۱. گزینه‌ی ۱.

$$f\,o\,g=\begin{cases}۲x^{۲}-x^{۲} & x\geqslant ۰\\ ۲x-(-x) & x<۰\end{cases}\Longrightarrow f\,o\,g=\begin{cases}x^{۲} & x\geqslant ۰\\ ۳x & x<۰\end{cases}$$

۴۲. گزینه‌ی ۲.

$$-۱\leqslant f(x)\leqslant ۲\Longrightarrow -۱\leqslant f(\frac{x}{۲})\leqslant ۲\Longrightarrow -۶\leqslant -۳f(\frac{x}{۳})\leqslant ۳$$
$$\Longrightarrow -۵\leqslant -۳f(\frac{x}{۲})+۱\leqslant ۴\Rightarrow R_y=[-۵,۴]$$

۴۳. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{۱-x}-\frac{x}{۱+x}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲x^{۲}}{۱-x^{۲}}\right)=\frac{x^{۲}}{۱-x^{۲}}\Longrightarrow\frac{۱}{۲}(f(x)-f(-x))=f(x^{۲})$$

۴۴. گزینه‌ی ۳. با فرض $x=t$ داریم $x=۴-t$ در نتیجه:

$$\begin{cases}f(t)+۲f(-t)=۱۲-۳t\\ f(-t)+۲f(t)=۱۲+۳t\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}f(t)+۲f(-t)=۱۲-۳t\\ -۲f(-t)-۴f(t)=-۲۴-۶t\end{cases}$$
$$-۳f(t)=-۹t-۱۲\Longrightarrow f(t)=۳t+۴$$

۴۵. گزینه‌ی ۱.

$$f(x)=\begin{cases}۰ & x<۰\\ x & x\geqslant ۰\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}x & x<۰\\ x^۲ & x\geqslant ۰\end{cases}\Longrightarrow f\,o\,g(x)=\begin{cases}۰ & x<۰\\ x^۲ & x\geqslant ۰\end{cases}$$

۴۶. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{x}{x^۲+x+۱}=t\Longrightarrow\frac{x^۲+x+۱}{x}=\frac{۱}{t}\Longrightarrow x+\frac{۱}{x}+۱=\frac{۱}{t}\Longrightarrow x+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{t}-۱$$

$$\frac{x^۲}{x^۴+x^۲+۱}=\frac{۱}{\frac{x^۴+x^۲+۱}{x^۲}}=\frac{۱}{x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۱}=\frac{۱}{\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۲+۱}=\frac{۱}{\left(\frac{۱}{t}-۱\right)^۲-۱}$$

$$=\frac{۱}{\frac{۱}{t^۲}-\frac{۲}{t}+۱-۱}=\frac{۱}{\frac{۱-۲t}{t^۲}}=\frac{t^۲}{۱-۲t}\Longrightarrow f(t)=\frac{t^۲}{۱-۲t}\Longrightarrow f(x)=\frac{x^۲}{۱-۲x}$$

۴۷. گزینه‌ی ۴.

$$f(x)=ax+b, f(f(x))=x+۲\Longrightarrow a^۲x+ab+b=x+۲\Longrightarrow$$
$$a^۲=۱, ab+b=۲\Longrightarrow a=b=۱\Longrightarrow f(x)=x+۱\Longrightarrow f(۳)=۴$$

۴۸. گزینه‌ی ۴.

$$t(x)=\frac{|۶(x-۲)|}{۶}=\frac{۶|x-۲|}{۶}=|x-۲|$$
$$D_f=D_t=\mathbb{R}$$

۴۹. گزینه‌ی ۱.

$$M(۲,۴)\in f\Longrightarrow M'(۴,۲)\in f^{-۱}$$
$$f(۲)=۴\ ,\ \ f^{-۱}(۴)=۲\Longrightarrow f(۲)+f^{-۱}(۴)=۶$$

۵۰. گزینه‌ی ۲.

$$f(-x)=\log(-x+\sqrt{x^۲+۱})=\log\left(\frac{۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}\right)=\log(x+\sqrt{x^۲+۱})^{-۱}$$
$$f(-x)=-\log(x+\sqrt{x^۲+۱})\Longrightarrow f(-x)=-f(x)$$

۵۱. گزینه‌ی ۲.

$$\tanh^{-۱}x=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+x}{۱-x},\tanh^{-۱}\left(-\frac{۴}{۵}\right)=\frac{۱}{۲}\ln\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۹}{۵}}=\frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲=\ln\left(\frac{۱}{۳}\right)$$

۵۲. گزینه‌ی ۱.

$$\cos hx+\sinh x=e^x,\cosh^۲x-\sinh^۲x=۱\Longrightarrow\cosh^۲x=۵$$
$$\sqrt{۵}+۲=e^x\Longrightarrow x=\ln(\sqrt{۵}+۲)$$

۵۳. گزینه‌ی ۳.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = \frac{e^{\ln ۲} - e^{-\ln ۲}}{۲} = \frac{۲ - \frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

۵۴. گزینه‌ی ۱.

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{۲x} - ۱)}{e^{-x}(e^{۲x} + ۱)} = \frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱}$$

۵۵. گزینه‌ی ۱.

$$f \circ g(x) = \frac{g(x) + ۱}{g(x) - ۱} \Longrightarrow \frac{g(x) + ۱}{g(x) - ۱} = -\frac{x + ۱}{x - ۱} \Longrightarrow g(x) = \frac{۱}{x} \Longrightarrow g(۲) = \frac{۱}{۲}$$

۵۶. گزینه‌ی ۱.

$f(x) =$ مقداری مثبت ، $-f(x) =$ مقداری منفی، $f[-f(x)] = f($مقداری منفی$) = ۱$

۵۷. گزینه‌ی ۲.

$$f(x) = ۲^{-x}(۱ + ۲^{x+۱} + ۲^{۲x}) = ۲^{-x} + ۲ + ۲^x$$
$$f(-x) = ۲^x + ۲ + ۲^{-x} = f(x)$$

۵۸. گزینه‌ی ۱.

$$h(-x) = f(-x) + f(x) = h(x), g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x)$$

۵۹. گزینه‌ی ۱.

$$f(-x) = \sqrt{۱ - x + x^۲} - \sqrt{۱ + x + x^۲} = -(\sqrt{۱ + x + x^۲} - \sqrt{۱ - x + x^۲}) = -f(x)$$

۶۰. گزینه‌ی ۳.

$$f(-x, y) = x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y - ۲xy \neq f(x, y)$$
$$f(-x, -y) = x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y + ۲xy \neq -f(x, y)$$

۶۱. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} x \geqslant ۰ \Longrightarrow -x < ۰, f(-x) = -۱ = -f(x) \\ x < ۰ \Longrightarrow -x > ۰, f(-x) = ۱ = -(-۱) = -f(x) \end{cases}$$

۶۲. گزینه‌ی ۴.

$$f(-x) = \Big((-x)^۲ - ۲(-x)\Big)^۲ = (x^۲ + ۲x)^۲ \neq f(x), -f(x)$$

۶۳. گزینه‌ی ۱.

$$f(-x) = \frac{[-x] + [x]}{(-x)^۲ + ۱} = \frac{[x] + [-x]}{x^۲ + ۱} = f(x) \quad \text{زوج}$$
$$g(-x) = \frac{(-x)^۲ \sin(-x)}{[-x] + [x]} = -\frac{x^۲ \sin x}{[x] + [-x]} = -g(x) \quad \text{فرد}$$

۶۴. گزینه‌ی ۲. اگر خطی موازی محور x ها با توجه به دامنه و برد تابع رسم کنیم، نمودار آن را در یک نقطه قطع می‌کند.

۶۵. گزینه‌ی ۴. تابع f یک به یک نمی‌باشد، زیرا $[۱/۱] = [۱/۲]$ ولی $۱/۱ \neq ۱/۲$، تابع f پوشا است زیرا به‌ازای هر عدد صحیح، xی در R وجود دارد که قسمت صحیح آن عدد مزبور گردد.

۶۶. گزینه‌ی ۳.

$$y = ۲^{x-۱}, x = ۲^{y-۱} \Longrightarrow \log x = \log ۲^{y-۱} \Longrightarrow \log x = (y-۱)\log ۲$$
$$\Longrightarrow y - ۱ = \frac{\log x}{\log ۲} \Longrightarrow y = \log_۲^x + ۱ \Longrightarrow f^{-۱}(x) = \log_۲^x + ۱$$

۶۷. گزینه‌ی ۳.

$$x = \ln \ln y \Longrightarrow e^x = \ln y \Longrightarrow e^{e^x} = y \Longrightarrow f^{-۱}(x) = e^{e^x}$$

۶۸. گزینه‌ی ۴.

$$f(x+۱) = ۲x + ۱, x + ۱ = t \Longrightarrow x = t - ۱, f(t) = ۲(t-۱) + ۱ = ۲t - ۱$$
$$f(x) = ۲x - ۱, x = ۲y - ۱ \Longrightarrow y = \frac{x+۱}{۲} \Longrightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{۲}$$

۶۹. گزینه‌ی ۲.

$$y = \frac{x-۱}{x-a} \Longrightarrow xy - ay = x - ۱ \Longrightarrow x(y-۱) = ay - ۱ \Longrightarrow$$
$$x = \frac{ay-۱}{y-۱} \Longrightarrow \frac{ax-۱}{x-۱} = \frac{x-۱}{x-a} \Longrightarrow a = ۱$$

۷۰. گزینه‌ی ۲.

$$y = ۲x - ۴ \ ، \ x = ۲y - ۴ \Longrightarrow y = \frac{x+۴}{۲} \Longrightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x+۴}{۲} \Longrightarrow f^{-۱}(-۶) = -۱$$

۷۱. گزینه‌ی ۱.

$$y = \sqrt{۲ - \sqrt{x-۲}} \Longrightarrow y^۲ = ۲ - \sqrt{x-۲} \Longrightarrow ۲ - y^۲ = \sqrt{x-۲} \Longrightarrow$$
$$(۲-y^۲)^۲ = x - ۲ \Longrightarrow x = (۲-y^۲)^۲ + ۲ \Longrightarrow f^{-۱}(x) = x^۴ - ۴x^۲ + ۶$$

۷۲. گزینه‌ی ۲.

$$x = \sin \frac{y+۱}{y} \Longrightarrow \operatorname{Arcsin} x = \frac{y+۱}{y} \Longrightarrow y = \frac{۱}{\operatorname{Arcsin} x - ۱}$$

۷۳. گزینه‌ی ۳.

$$۲ \times ۸^{\frac{x}{۳}} = ۸ \Longrightarrow ۸^{\frac{x}{۳}} = ۴ \Longrightarrow ۲^x = ۲^۲ \Longrightarrow x = ۲ \Longrightarrow f^{-۱}(۸) = ۲$$

۷۴. گزینه‌ی ۱.

$$f \circ f^{-۱} = x \Longrightarrow f \circ f^{-۱}(۰) = ۰$$

۷۵. گزینه‌ی ۱. نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1} روی خط $y=x$ است، بنابراین:

$$x = x^3 + x + 27 \Longrightarrow x^3 = -27 \Longrightarrow x = -3 \Longrightarrow y = -3$$

۷۶. گزینه‌ی ۳.

$$y = \sin(\cos x) \Rightarrow \operatorname{Arcsin} y = \cos x \Rightarrow x = \operatorname{Arccos}\operatorname{Arcsin} y \Rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{Arccos}\operatorname{Arcsin} x$$

۷۷. گزینه‌ی ۱. $f(x) = \sqrt{x-1} + |x|$، $x \geqslant 1$ پس $D_f = [1, +\infty)$ و ضابطه تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + x$ است و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 1 > 0$ پس تابع اکیداً صعودی و در نتیجه، یک به یک است.

۷۸. گزینه‌ی ۴. تابع f در فاصله $[-2, 2]$ اکیداً صعودی است، لذا وارون‌پذیر است.

$$f'(x) = -3x^2 + 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

۷۹. گزینه‌ی ۳.

$$\operatorname{Arcsin}\left(\ln\frac{x_1}{10}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\ln\frac{x_2}{10}\right) \Longrightarrow \ln\frac{x_1}{10} = \ln\frac{x_2}{10} \Longrightarrow x_1 = x_2$$

تابع f یک به‌یک و بنابراین وارون‌پذیر است.

$$y = \operatorname{Arcsin}\left(\ln\frac{x}{10}\right) \Longrightarrow \ln\left(\frac{x}{10}\right) = \sin y \Longrightarrow \frac{x}{10} = e^{\sin y}$$
$$\Longrightarrow x = 10e^{\sin y} \Longrightarrow y = 10e^{\sin x} \Longrightarrow f^{-1}(x) = 10e^{\sin x}$$

۸۰. گزینه‌ی ۲.

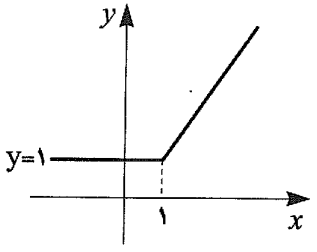
$$y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$
$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \Longrightarrow e^y(x-1) = e^{-y}(x+1) \Longrightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

۸۱. گزینه‌ی ۴.

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \Longrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Longrightarrow \sqrt{y^2+1} = e^x - y \Longrightarrow$$
$$y^2 + 1 = e^{2x} - 2ye^x + y^2 \Longrightarrow y = \frac{e^{2x}}{2e^x} - \frac{1}{2e^x} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

۸۲. گزینه‌ی ۲. با توجه به شکل تابع $y \geqslant 1$ حدود تغییرات y است.

$$y = \begin{cases} 2x-1 & x \geqslant 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$$



۸۳. گزینه‌ی ۴.

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{x^۲ + ۲}{x^۲ + ۱} = \frac{۲(x^۲ + ۱)}{x^۲ + ۱} = ۲ = f(x)$$

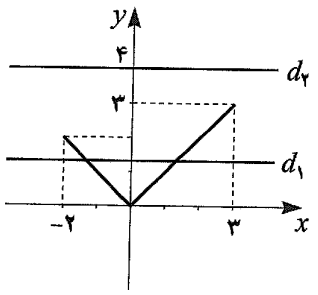
۸۴. گزینه‌ی ۴. ابتدا دامنه‌ی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \log(۲x - x^۲) \geqslant ۰ \Longrightarrow ۲x - x^۲ \geqslant ۱ \Longrightarrow x^۲ - ۲x + ۱ \leqslant ۰ \Longrightarrow (x-۱)^۲ \leqslant ۰ \Longrightarrow x = ۱ \\ ۲x - x^۲ > ۰ \Longrightarrow x \in (۰, ۲) \end{cases}$$

پس $D_f = \{۱\}$، لذا

$$y = f(۱) = \sqrt{\log ۱} = ۰ \Longrightarrow R_f = \{۰\}$$

۸۵. گزینه‌ی ۲. خط $d_۱$ نمودار تابع را در دونقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک نیست.
خط $d_۲$ نمودار تابع را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند، پس پوشا نیست.



مدیریت

۱. معکوس تابع $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ کدام است؟ آیا این معکوس یک تابع است؟ [۱۳۷۰]

۱) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. بلی ۲) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. خیر ۳) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. بلی ۴) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. خیر

۲. اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = \frac{2x}{x+1}$ باشد، $f \circ g(x)$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) $\frac{2x^2}{x^2-1}$ ۲) $\frac{2x}{2x-1}$ ۳) $\frac{2x}{x-1}$ ۴) $\frac{2x}{x+1}$

۳. دامنه‌ی تابع $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2+1}}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\mathbb{R} - \{1\}$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ ۴) $x \geqslant 1$

۴. برد یا حوزه مقادیر تابع $y = \frac{x}{x+1}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\mathbb{R} - \{1\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{-1\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}^+$

۵. اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$ باشد، مقدار $f \circ f(x)$ در $x = 1$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۶. اگر $f(x) = [3x - 1] + 2$ باشد (عبارت $[\cdots]$ جزء صحیح است)، $f(-1/5)$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) -3 ۲) -2 ۳) -4 ۴) $-3/5$

۷. معکوس تابع $y = e^x + 2$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $y = e^x + 2$ ۲) $y = \ln(x-2)$ ۳) $y = \ln(x+2)$ ۴) $y = e^x - 2$

۸. برد یا حوزه مقادیر تابع f در مجموعه اعداد حقیقی $f = \{(x,y) | y = \frac{x+4}{x}, x, y \in \mathbb{R}\}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $\mathbb{R} - \{1\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{0\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) -3

۹. در معکوس تابع $f(x) = \ln(x+4)$ مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۳ ۲) -4 ۳) ۰ ۴) -3

۱۰. برد تابع $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $[0, 1)$ ۲) $[-1, 0)$ ۳) $\mathbb{R}^+$ ۴) $(-1, 1)$

۱۱. اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^2$ باشد، $f \circ g(7)$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

۱۲. کدام یک از توابع زیر زوج است؟ [۱۳۷۳]

۱) $y = \sin x$ ۲) $y = \sin x + \cos x$ ۳) $y = |x|(x^۲ + ۱)$ ۴) $y = x^۳ + x$

۱۳. دامنه‌ی تابع $y = \ln(x^۲ - ۴)$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $|x| > ۲$ ۲) $|x| \geqslant ۲$ ۳) $-۲ < x < ۲$ ۴) $|x| > ۰$

۱۴. از توابع زیر کدام یک فرد است؟ [۱۳۷۴]

۱) $f(x) = x^۳ - x$ ۲) $f(x) = x^۲ + x$

۳) $f(x) = \sin x + \cos x$ ۴) $f(x) = \cos x$

۱۵. اگر دو تابع $f(x) = \frac{x}{x+۱}$ و $g(x) = \frac{x-۱}{x+۱}$ مفروض باشند، مقدار $(f\,o\,g)(x)$ به‌ازای $x = ۲$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۶. اگر تابع $f(x) = \frac{۲x}{x-۲}$ مفروض باشد، مقدار $f^{-۱}(-۲)$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۰

۱۷. دامنه‌ی (Domain) تابع $y = \frac{x}{\ln x - ۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $\mathbb{R}^+ - \{۱\}$ ۴) $\mathbb{R}^+ - \{e\}$

۱۸. معکوس تابع $y = \frac{x}{x+۱}$ در کدام نقطه با نیمساز ناحیه‌ی اول نقطه‌ی مشترک دارد؟

۱) $x = ۰$ ۲) $x = ۱$ ۳) $x = ۲$ ۴) $x = ۳$

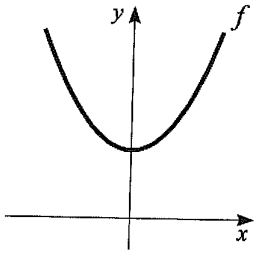
۱۹. اگر $f(x) = ۲\sin x + ۱$ و $g(x) = \frac{\pi x}{۵x+۱}$ باشد، $(f\,o\,g)(۱)$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲۰. تابع $\sqrt[۳]{(x+۱)^۲} + \sqrt[۳]{(x-۱)^۲} = f(x)$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) همگن و فرد ۲) نه زوج و نه فرد ۳) زوج ۴) فرد

۲۱. در مورد تابع f با شکل زیر، کدام مورد صحیح است؟ [۱۳۷۶]



۱) زوج
۲) فرد
۳) نه فرد و نه زوج
۴) یک‌به‌یک

۲۲. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۲x+۱}{|x|-۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $\mathbb{R}^۲$ ۲) $\mathbb{R} - \{-۱\}$ ۳) $\mathbb{R} - \{۱\}$ ۴) $\mathbb{R} - \{-۱, ۱\}$

۲۳. برد تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{e^x + ۱}{e^x - ۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R} - [۱, -۱]$ ۳) $\mathbb{R} - \{۰\}$ ۴) $\mathbb{R} - \{-۱, ۱\}$

۲۴. اگر $f(x) = \frac{۲e^x - e^{-x}}{۲}$ و $g(x) = \ln x$ باشد، مقدار $f\,o\,g(۱)$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۵. اگر $f(۲x-۱)=x^۲-۱$ باشد، $f(۳)$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

۲۶. برد یا حوزه‌ی مقادیر تابع f به معادله‌ی $y=e^{-\frac{۱}{۲x^۲}}$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۰,۱]$

۲۷. اگر $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x+۲}{x}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $f\,o\,g(x)$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۱,۰\}$

۲۸. اگر $f(x)=\frac{x}{x+۱}$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ باشد، مقدار $f\,o\,g(۳)$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۳

۲۹. برد (Range) تابع حقیقی f به معادله $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲+۴}$، کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $[۰,۱]$ ۲) R ۳) R^+ ۴) $[۰,۱)$

۳۰. دامنه تعریف (Domain) تابع حقیقی f به معادله $y=\frac{\ln(x+۱)}{x}$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $x\neq ۰, R$ ۲) $x\neq ۰,(-۱,\infty)$ ۳) $R-\{۰,۱\}$ ۴) R^+

۳۱. اگر $f(x)=\ln\left(\frac{x+۱}{x}\right)$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۱)$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $\frac{۱}{e-۱}$ ۲) $\ln\frac{۱}{۲}$ ۳) $e-۱$ ۴) $\ln ۲$

۳۲. کدامین تابع زوج نیست؟ [۱۳۷۸]

۱) $y=e^{x^۲}+۱$ ۲) $y=e^{۲x}-x$ ۳) $y=x^۴$ ۴) $y=\cos x$

۳۳. دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{۲}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) ϕ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}^-$

۳۴. دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\ln(x+۱)}{۵^x-۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$

۳) $\mathbb{R}^+$ ۴) $(-۱,+\infty)-\{۰\}$

۳۵. $f(x)=\frac{e^x}{e^x+۱}$، برای معکوس تابع، $f^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{e}+۱}{۲}$

۳۶. در فاصله‌ی $[-۱,۳]$ کدام یک از توابع زیر زوج‌اند؟ [۱۳۷۹]

۱) $y=\cos x$ ۲) $y=x^۳-۱$ ۳) $y=x^۲+۱$ ۴) هیچکدام

۳۷. اگر f تابعی حقیقی به معادله‌ی $y=۲-e^{-x+۱}$ باشد، آنگاه بُرد (Range) این تابع برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^-$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $(-\infty,۲)$

۳۸. اگر $f(x)=e^{x-۱}$ و $g(x)=\ln(x+۱)$ باشد، آنگاه ضابطه‌ی $f\,o\,g(x)$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $\frac{۱}{e}x$ ۲) $\ln(e^{x-۱}+۱)$ ۳) $\frac{۱}{e}(x+۱)$ ۴) $\ln(e^x+۱)$

۳۹. کدام موارد برای تابع حقیقی f به معادله‌ی $f(x) = ۲|x| + ۱$ نادرست است؟ [۱۳۸۰]

۱) یک به یک ۲) همواره پیوسته ۳) زوج ۴) دارای حدّ در صفر

۴۰. اگر $x > ۱$، $f(x) = x^۲ - ۲x + ۴$، آنگاه معادله‌ی $f^{-۱}$، کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) $Y = ۱ + \sqrt{X - ۳}$ ۲) $Y = ۱ + \sqrt{X + ۳}$

۳) $Y = ۱ \pm \sqrt{X - ۳}$ ۴) $Y = -۱ + \sqrt{X - ۳}$

۴۱. دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{۴ - x^۲}}{\ln(x - ۱)}$، کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) $[۱, ۲)$ ۲) $[۱, ۲]$ ۳) $(۱, ۲]$ ۴) $(۱, ۲)$

۴۲. برد تابع حقیقی f به معادله $y = \ln(x^۲ + ۱)$، کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(۰, ۱)$ ۳) $(\frac{۱}{۲}, \infty)$ ۴) $[۰, \infty)$

۴۳. دامنه‌ی تابع حقیقی f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\ln(۲x + ۱)}{\sqrt{x(x + ۱)}}$ کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) $(-\infty, ۰)$ ۲) $(۰, +\infty)$ ۳) $(-۱, +\infty)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲}, ۰)$

۴۴. برد تابع حقیقی f با ضابطه $y = \frac{e^{۲x} - e^x}{۲}$ کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) $[۰, e]$ ۲) $[-\frac{۱}{۸}, +\infty)$ ۳) $\mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ ۴) $[-\frac{۱}{۲}, +\infty)$

۴۵. برد تابع حقیقی $y = \ln(\frac{۱ - e^x}{۱ + e^x})$، برابر است با: [۱۳۸۳]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $(-\infty, ۰)$ ۴) $(-۱, ۱)$

۴۶. اگر $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$ معادله تابع $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲)$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $\ln ۲$ ۲) $\ln \frac{۱}{۲}$ ۳) $\ln(۲ - \sqrt{۵})$ ۴) $\ln(۲ + \sqrt{۵})$

۴۷. اگر $f(x) = \frac{e^x - ۱}{e^x + ۱}$ و $g(x) = \ln x$، آنگاه $f \circ g(۳)$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۸. اگر $f(x) = e^{-x^۲}$، $g(x) = \sqrt{\frac{۱ - x}{x}}$ باشد دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟ [۱۳۸۴]

۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲) $(۰, +\infty)$ ۳) $(۰, ۱]$ ۴) $[-۱, ۱]$

۴۹. برد تابع با ضابطه $f(x) = \ln \frac{x^۲}{x^۲ + ۴}$ درکدام بازه است؟ [۱۳۸۴]

۱) $(۰, +\infty)$ ۲) $(-\infty, ۰)$ ۳) $(-۱, ۰)$ ۴) $(۰, ۱)$

۵۰. معکوس تابع $f(x) = e^x - e^{-x}$ ازکدام نقطه می‌گذرد؟ [۱۳۸۴]

۱) $(\ln ۲, ۱)$ ۲) $(\frac{۱}{۲}, \ln ۲)$ ۳) $(\frac{۳}{۲}, \ln ۲)$ ۴) $(\frac{۲}{۳}, \ln ۳)$

۵۱. کدام تابع بر روی دامنه خودش نه زوج است و نه فرد؟ [۱۳۸۴]

۱) $f(x) = x[x]$ ۲) $f(x) = |x| \cos x$ ۳) $f(x) = x - \frac{۱}{x}$ ۴) $f(x) = \log \frac{۱ + x}{۱ - x}$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۱.

$$x=\sqrt{\frac{۱-y}{۱+y}} \Longrightarrow x^۲=\frac{۱-y}{۱+y} \Longrightarrow x^۲+yx^۲=۱-y \Longrightarrow$$
$$y(x^۲+۱)=۱-x^۲ \Longrightarrow y=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲} \Longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$$

$f^{-۱}(x)$ یک تابع است، زیرا به‌ازای هر x تنها یک مقدار برای y وجود دارد.

۲. گزینه‌ی ۳.

$$f(g(x))=\frac{\frac{۲x}{x+۱}}{\frac{۲x}{x+۱}-۱}=\frac{\frac{۲x}{x+۱}}{\frac{۲x-x-۱}{x+۱}}=\frac{۲x}{x-۱}$$

۳. گزینه‌ی ۲.کافی است دامنهٔ عبارت زیر رادیکال را پیدا کنیم. از آنجا که مخرج کسر یعنی $x^۲+۱$ همیشه مثبت است در نتیجه $D_f=\mathbb{R}$.

۴. گزینه‌ی ۱.

$$y=\frac{x}{x+۱} \Longrightarrow yx+y=x \Longrightarrow x(y-۱)=-y \Longrightarrow x=\frac{-y}{y-۱}$$
$$y-۱\neq ۰ \Longrightarrow y\neq ۱ \Longrightarrow R_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$

۵. گزینه‌ی ۳.

$$(f\,o\,f)(۱)=f(f(۱)), f(۱)=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{۱}{۳}$$

۶. گزینه‌ی ۳.

$$f(-\frac{۱}{۵})=[۳(-۱/۵)-۱]+۲=[-۵/۵]+۲=-۶+۲=-۴$$

۷. گزینه‌ی ۲.

$$x=e^y+۲ \Longrightarrow e^y=x-۲ \Longrightarrow y=\ln(x-۲) \Longrightarrow f^{-۱}(x)=\ln(x-۲)$$

۸. گزینه‌ی ۱.

$$y=\frac{x+۴}{x} \Longrightarrow yx=x+۴ \Longrightarrow x(y-۱)=۴ \Longrightarrow x=\frac{۴}{y-۱}$$
$$y-۱\neq ۰ \Longrightarrow y\neq ۱ \Longrightarrow R_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$

۹. گزینه‌ی ۴.

$$x = \ln(y+۴) \Longrightarrow e^x = y+۴ \Longrightarrow y = e^x - ۴ \Longrightarrow$$
$$f^{-۱}(x) = e^x - ۴ \Longrightarrow f^{-۱}(۰) = e^۰ - ۴ = -۳$$

راه حل دوم:

$$۰ = \ln(x+۴) \Longrightarrow e^۰ = x+۴ \Longrightarrow x = -۳$$

۱۰. گزینه‌ی ۴.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} \Longrightarrow y^۲ = \frac{x^۲}{x^۲+۱} \Longrightarrow y^۲x^۲ + y^۲ = x^۲ \Longrightarrow x^۲ = \frac{-y^۲}{y^۲-۱}$$
$$\Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-y^۲}{y^۲-۱}}, \frac{-y^۲}{y^۲-۱} \geqslant ۰ \Longrightarrow -y^۲ < ۰, y^۲ - ۱ = ۰ \Longrightarrow y = \pm ۱$$

y	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$\frac{-y^۲}{y^۲-۱}$		$-$	∞	$+$	∞	$-$	

$$\Longrightarrow R_f = \{y \mid -۱ < y < ۱\} \equiv (-۱, ۱)$$

۱۱. گزینه‌ی ۲.

$$(f \circ g)(۷) = f(g(۷)), g(۷) = ۴۹ \Longrightarrow f(۴۹) = \sqrt{۴۹+۱} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

۱۲. گزینه‌ی ۳.

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \rightarrow$ فرد

$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \rightarrow$ نه فرد و نه زوج

$f(-x) = |-x|((-x)^۲+۱) = |x|(x^۲+۱) = f(x) \rightarrow$ زوج

$f(-x) = (-x)^۳ + (-x) = -x^۳ - x = -(x^۳+x) = -f(x) \rightarrow$ فرد

۱۳. گزینه‌ی ۱.

$$x^۲ - ۴ > ۰ \Longrightarrow x^۲ > ۴ \Longrightarrow |x| > ۲$$

۱۴. گزینه‌ی ۱.

$f(-x) = (-x)^۳ - (-x) = -x^۳ + x = -(x^۳ - x) = -f(x) \rightarrow$ فرد

$f(-x) = (-x)^۲ + (-x) = x^۲ - x \rightarrow$ نه فرد و نه زوج

$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \rightarrow$ نه فرد و نه زوج

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x) \rightarrow$ زوج

۱۵. گزینه‌ی ۳.

$$(f \circ g)(۲) = f(g(۲)), g(۲) = \frac{۲-۱}{۲+۱} = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow f\left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}+۱} = \frac{۱}{۴}$$

۱۶. گزینه‌ی ۲.

$$x=\frac{۲y}{y-۲}\Longrightarrow xy-۲x=۲y\Longrightarrow y=\frac{۲x}{x-۲}\Longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x}{x-۲}$$
$$\Longrightarrow f^{-۱}(-۲)=\frac{-۴}{-۲-۲}=۱$$

راه حل دوم:

$$-۲=\frac{۲x}{x-۲}\Longrightarrow -۲x+۴=۲x\Longrightarrow ۴x=۴\Longrightarrow x=۱$$

۱۷. گزینه‌ی ۴.

$$x>۰,\ \ln x-۱\neq ۰\Longrightarrow \ln x\neq ۱\Longrightarrow x\neq e\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}^{+}-\{e\}$$

۱۸. گزینه‌ی ۱.نقاط تقاطع دو تابع f و $f^{-۱}$ روی خط $y=x$ واقع است.

$$\begin{cases} y=x \\ y=\dfrac{x}{x+۱} \end{cases}\Longrightarrow \frac{x}{x+۱}=x\Longrightarrow x^{۲}+x=x\Longrightarrow x=۰$$

۱۹. گزینه‌ی ۲.

$$(f\circ g)(۱)=f(g(۱))\ ,\ g(۱)=\frac{\pi}{۶}\Longrightarrow f\left(\frac{\pi}{۶}\right)=۲\sin\frac{\pi}{۶}+۱=۲\times\frac{۱}{۲}+۱=۲$$

۲۰. گزینه‌ی ۳.

$$f(-x)=\sqrt[۳]{(-x+۱)^{۲}}+\sqrt[۳]{(-x-۱)^{۲}}=\sqrt[۳]{[-(x-۱)]^{۲}}+\sqrt[۳]{[-(x+۱)]^{۲}}$$
$$=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}+\sqrt[۳]{(x+۱)^{۲}}=f(x)\quad \text{تابع زوج است}$$

۲۱. گزینه‌ی ۱.محور yها، محور تقارن نمودار تابع است. پس تابع f زوج است.

۲۲. گزینه‌ی ۴.

$$|x|-۱\neq ۰\Longrightarrow |x|\neq ۱\Longrightarrow x\neq \pm ۱\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$$

۲۳. گزینه‌ی ۲.

$$y=\frac{e^{x}+۱}{e^{x}-۱}\Longrightarrow ye^{x}-y=e^{x}+۱\Longrightarrow e^{x}(y-۱)=y+۱\Longrightarrow$$
$$e^{x}=\frac{y+۱}{y-۱}\Longrightarrow x=\ln\frac{y+۱}{y-۱},\ \frac{y+۱}{y-۱}>۰\Longrightarrow y=-۱, y=۱$$

y	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$\dfrac{y+۱}{y-۱}$		$+$	۰	$-$	∞	$+$	

$$\Longrightarrow R_f=\mathbb{R}-[-۱,۱]$$

۲۴. گزینه‌ی ۲.

$$(f\circ g)(۱)=f(g(۱))\ ,\ g(۱)=\ln ۱=۰\Longrightarrow f(۰)=\frac{۲e^{۰}-e^{۰}}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۲۵. گزینه‌ی ۱.

$$۲x-۱=۳\Longrightarrow x=۲\xrightarrow{\text{جاگذاری}}=(۲)^{۲}-۱=۳$$

۲۶. گزینه‌ی ۳.

$$y=e^{-\frac{۱}{۲x^{۲}}}\Longrightarrow \ln y=-\frac{۱}{۲x^{۲}}\Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-۱}{۲\ln y}}$$

$$\begin{cases}y>۰\\ ۲\ln y\neq ۰\\ \dfrac{-۱}{۲\ln y}\geqslant ۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}y>۰\\ y\neq ۱\\ y<۱\end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}}R_f=(۰,۱)$$

۲۷. گزینه‌ی ۳.

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\frac{\frac{x+۲}{x}}{\frac{x+۲}{x}-۱}=\frac{\frac{x+۲}{x}}{\frac{۲}{x}}\Longrightarrow x\neq ۰\Longrightarrow D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

۲۸. گزینه‌ی ۱.

$$f\circ g(۳)=f(g(۳))\quad ،\quad g(۳)=\sqrt{۳+۱}=۲\Longrightarrow f(g(۳))=f(۲)=\frac{۲}{۲+۱}=\frac{۲}{۳}$$

۲۹. گزینه‌ی ۴.

$$y=\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۴}\Longrightarrow yx^{۲}+۴y=x^{۲}\Longrightarrow x^{۲}-yx^{۲}=۴y$$

$$\Longrightarrow x^{۲}=\frac{۴y}{۱-y}\Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۴y}{۱-y}}\Longrightarrow R_f=[۰,۱)\ .$$

۳۰. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases}x+۱>۰\\ x\neq ۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x>-۱\\ x\neq ۰\end{cases}\Longrightarrow x\neq ۰,(-۱,\infty)$$

۳۱. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{x+۱}{x}=e\Longrightarrow x+۱=ex\Longrightarrow ex-x=۱$$

$$\Longrightarrow (e-۱)x=۱\Longrightarrow x=\frac{۱}{e-۱}=f^{-۱}(۱)$$

۳۲. گزینه‌ی ۲.

$$f(-x)=e^{۲(-x)}-(-x)=e^{-۲x}+x\ \rightarrow\ \text{نه زوج و نه فرد}$$

۳۳. گزینه‌ی ۱.

$$x - |x| > ۰ \Longrightarrow x > |x| \Longrightarrow D_f = \phi$$

۳۴. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} x + ۱ > ۰ \\ ۵^x - ۱ \neq ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > -۱ \\ x \neq ۰ \end{cases} \Longrightarrow D_f = (-۱, +\infty) - \{۰\}$$

۳۵. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{e^x}{e^x + ۱} = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow ۲e^x = e^x + ۱ \Longrightarrow e^x = ۱ \Longrightarrow x = ۰ = f^{-۱}(\frac{۱}{۲})$$

۳۶. گزینه‌ی ۱.دامنه‌ی تابع متقارن نیست.

۳۷. گزینه‌ی ۴.

$$y = ۲ - e^{-x+۱} \Longrightarrow e^{-x+۱} = ۲ - y \Longrightarrow -x + ۱ = \ln(۲ - y) \Longrightarrow$$
$$x = ۱ - \ln(۲ - y) \Longrightarrow ۲ - y > ۰ \Longrightarrow y < ۲$$
$$R_f = \{y | y < ۲\} = (-\infty, ۲)$$

۳۸. گزینه‌ی ۳.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = e^{\ln(x+۱)-۱} = e^{\ln(x+۱)}.e^{-۱} = \frac{۱}{e}(x + ۱)$$

۳۹. گزینه‌ی ۱.

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Longrightarrow ۲|x_۱| + ۱ = ۲|x_۲| + ۱ \Longrightarrow |x_۱| = |x_۲|$$
$$\Longrightarrow x_۱ = \pm x_۲ \Longrightarrow \text{بنابراین تابع یک به یک نیست.}$$

۴۰. گزینه‌ی ۱.

$$x = y^۲ - ۲y + ۴ \Longrightarrow y^۲ - ۲y + ۴ - x = ۰$$
$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a} \Longrightarrow y = ۱ \pm \sqrt{۱ - (۴ - x)} = ۱ \pm \sqrt{x - ۳}$$

چون $x > ۱$، پس $y = ۱ + \sqrt{x - ۳}$.

۴۱. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} ۴ - x^۲ \geqslant ۰ \\ x - ۱ > ۰ \\ \ln(x - ۱) \neq ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۲ \leqslant x \leqslant ۲ \\ x > ۱ \\ x \neq ۲ \end{cases} \Longrightarrow D_f = (۱, ۲)$$

۴۲. گزینه‌ی ۴.

$$y=\ln(x^{۲}+۱) \Longrightarrow x^{۲}+۱=e^{y} \Longrightarrow x=\pm\sqrt{e^{y}-۱}$$
$$e^{y}-۱ \geqslant ۰ \Longrightarrow e^{y} \geqslant ۱ \Longrightarrow \ln e^{y} \geqslant \ln ۱ \Longrightarrow y \geqslant ۰ \Longrightarrow R_f=[۰,+\infty)$$

۴۳. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} ۲x+۱>۰ \\ x(x+۱)>۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>-\frac{۱}{۲} \\ x<-۱ \text{ یا } x>۰ \end{cases} \Longrightarrow D_f=(۰,+\infty)$$

۴۴. گزینه‌ی ۲.

$$y=\frac{۱}{۲}(e^{۲x}-e^{x}) \Longrightarrow y'=\frac{۱}{۲}(۲e^{۲x}-e^{x})=۰ \Longrightarrow e^{x}(۲e^{x}-۱)=۰ \Longrightarrow$$
$$۲e^{x}-۱=۰ \Longrightarrow e^{x}=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow x=\ln\frac{۱}{۲} \Longrightarrow y=\frac{۱}{۲}(e^{۲\ln\frac{۱}{۲}}-e^{\ln\frac{۱}{۲}}) \Longrightarrow y=-\frac{۱}{۸}$$

x	$-\infty$		$\ln\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{۱}{۸}$	$\nearrow$	$+\infty$

۴۵. گزینه‌ی ۳.

$$y=\ln(\frac{۱-e^{x}}{۱+e^{x}}) \Longrightarrow \frac{۱-e^{x}}{۱+e^{x}}=e^{y} \Longrightarrow e^{x}=\frac{۱-e^{y}}{۱+e^{y}} \Longrightarrow x=\ln(\frac{۱-e^{y}}{۱+e^{y}})$$
$$\frac{۱-e^{y}}{۱+e^{y}}>۰ \ , \ ۱+e^{y}>۰ \Longrightarrow ۱-e^{y}>۰ \ , \ ۱-e^{y}=۰ \Longrightarrow y=۰$$

y	$-\infty$		۰		$+\infty$
$۱-e^{y}$		$+$	۰	$-$	

$$\Longrightarrow R_f=(-\infty,۰)$$

۴۶. گزینه‌ی ۴.

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}=\sinh x \Longrightarrow f^{-۱}(x)=\ln(x+\sqrt{x^{۲}+۱})$$
$$f^{-۱}(۲)=\ln(۲+\sqrt{۴+۱})=\ln(۲+\sqrt{۵})$$

۴۷. گزینه‌ی ۲.

$$g(۳)=\ln ۳ \ , \ f\circ g(۳)=f(\ln ۳)=\frac{e^{\ln ۳}-۱}{e^{\ln ۳}+۱}=\frac{۳-۱}{۳+۱}=\frac{۱}{۲} \ .$$

۴۸. گزینه‌ی ۱.

$$f(x)=e^{-x^{۲}} \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{\frac{۱-x}{x}}\ ,\ \frac{۱-x}{x}\geqslant ۰ \Longrightarrow D_g=(۰,۱]$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}\Longrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} | ۰<e^{-x^۲}\leqslant ۱\}=\mathbb{R}$$

می‌دانیم $۰<\frac{۱}{e^{x^۲}}\leqslant ۱$.

۴۹. گزینه‌ی ۲.

$$۰\leqslant\frac{x^۲}{x^۲+۴}<۱\Longrightarrow \ln ۰\leqslant\ln\frac{x^۲}{x^۲+۴}<\ln ۱\Longrightarrow -\infty<y<۰$$

۵۰. گزینه‌ی ۳.

$$(a,b)\in f\Longrightarrow(b,a)\in f^{-۱}$$

$$(\ln ۲,\frac{۳}{۲})\Longrightarrow\frac{۳}{۲}=e^{\ln ۲}-e^{-\ln ۲}=۲-\frac{۱}{۲}\Longrightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۵۱. گزینه‌ی ۱.

$$f(-x)=|-x|\cos(-x)=|x|\cos x=f(x)\rightarrow \text{زوج}$$

$$f(-x)=-x+\frac{۱}{x}=-(x-\frac{۱}{x})=-f(x)\rightarrow \text{فرد}$$

$$f(-x)=\log\frac{۱-x}{۱+x}=\log(\frac{۱+x}{۱-x})^{-۱}=-\log\frac{۱+x}{۱-x}=-f(x)\rightarrow \text{فرد}$$

حسابداری

۱. معکوس تابع $y = \frac{۱}{۲}\left(x - \frac{۱}{x}\right)$ و $x > y$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $x - \sqrt{x^۲ + ۱}$ ۲) $x + \sqrt{x^۲ - ۱}$ ۳) $x - \sqrt{x^۲ - ۱}$ ۴) $x + \sqrt{x^۲ + ۱}$

۲. اگر $f(x) = e^{-x}$ و $g(x) = \ln \sqrt{x}$، آنگاه $g(f(x))$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $-x$ ۲) $\frac{۲}{x}$ ۳) $-\frac{x}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{x}}$

۳. تابع $f(x) = \frac{x}{[x] - ۱}$ درکدام فاصله تعریف نشده است؟ [۱۳۷۱]

۱) $(۰, ۱]$ ۲) $[۱, ۲)$ ۳) $[۱, ۲]$ ۴) $[۰, ۱)$

۴. تابع $y = x^۳ + x \sin x$ کدام وضعیت را دارد؟ [۱۳۷۱]

۱) نه فرد و نه زوج ۲) هم زوج و هم فرد ۳) فرد ۴) زوج

۵. تابع $f = \left\{(x, y) | y = \frac{x + ۴}{x}, x, y \in N\right\}$ چند عضو دارد؟ [۱۳۷۲]

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) N ۴) نامحدود

۶. حوزه مقادیر $f = \{(x, y) | y = \ln(x^۲ + ۱), x \in \mathbb{R}\}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $\mathbb{R}^+ - \{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$

۷. برد یا حوزه مقادیر رابطه $f = \left\{(x, y) | \frac{x^۲}{۴} + y^۲ = ۱, x \in \mathbb{R}\right\}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $-۲ \leqslant y < ۲$ ۲) $-۱ \leqslant y \leqslant ۱$ ۳) $\mathbb{R}^+$ ۴) $\mathbb{R} - \{۱, -۱\}$

۸. اگر $f(x) = \frac{x}{x + ۱}$ و $g(x) = \frac{۲x}{x - ۱}$ مفروض باشد $f \circ g(x)$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $\frac{۲(x + ۱)}{x - ۱}$ ۲) $\frac{۳x}{۲x - ۱}$ ۳) $\frac{۲x}{۳x - ۱}$ ۴) $\frac{۲x^۲}{x^۲ - ۱}$

۹. $f^{-۱}(x)$، معکوس تابع $f(x) = \frac{۲x}{x - ۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $f^{-۱}(x) = \frac{x}{x - ۲}$ ۲) $f^{-۱}(x) = \frac{x - ۱}{۲x}$

۳) $f^{-۱}(x) = \frac{x}{x + ۲}$ ۴) $f^{-۱}(x) = \frac{x}{۲x - ۱}$

۱۰. برد تابع y با معادله‌ی $y\sqrt{x^۲ + ۱} - x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $(۰, ۱)$ ۲) $(-۱, ۱)$ ۳) $[-۱, ۱]$ ۴) $[۰, ۱]$

۱۱. اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ باشد، $f\circ g\left(\frac{5}{4}\right)$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۲. دامنه‌ی تابع $y=\ln(x^2-1)$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $|x|>1$ ۳) $-1<x<1$ ۴) $-1\leqslant x\leqslant 1$

۱۳. برد تابع $y=\frac{1}{2-\cos x}$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $\left[\frac{1}{3},1\right]$ ۲) $\left(\frac{1}{3},1\right)$ ۳) $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ۴) $\left[\frac{1}{2},0\right]$

۱۴. کدام یک از توابع زیر یک‌به‌یک نیست؟ [۱۳۷۴]

۱) $f(x)=e^x$ ۲) $f(x)=\ln x$ ۳) $f(x)=x^2$ ۴) $f(x)=\frac{1}{x}$

۱۵. کدام یک از توابع زیر زوج است؟ [۱۳۷۴]

۱) $f(x)=e^{-x}$ ۲) $f(x)=e^x$ ۳) $f(x)=e^{x^2}$ ۴) $f(x)=x^2+x$

۱۶. معکوس تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$ را $f^{-1}(x)$ نامیده، $f^{-1}(3)$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۷. برد یا حوزه‌ی مقادیر (Range) تابع $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $[-1,1)$ ۴) $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

۱۸. دامنه (Domain) یا حوزه‌ی تعریف تابع $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+ + \{0\}$ ۳) $\mathbb{R}-[-1,1]$ ۴) $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

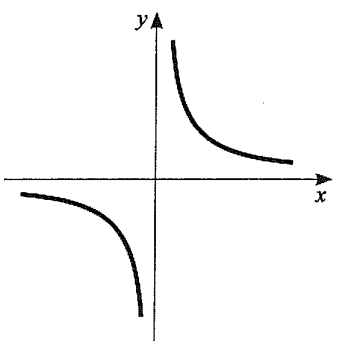
۱۹. تابع $y=\frac{e^x}{e^x+1}$ مفروض است، اگر معکوس تابع $f^{-1}(x)$ باشد، $f^{-1}(\frac{1}{2})$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) $\ln 2$

۲۰. نمودار یک تابع فرد، دارای کدام خاصیت است؟ [۱۳۷۶]

۱) محور yها محور تقارن آن است.
۲) محور xها محور تقارن آن است.
۳) مبدأ مرکز تقارن آن است.
۴) فاقد مرکز تقارن است.

۲۱. در مورد رابطه‌ی f با شکل مقابل کدام مورد صحیح است؟ [۱۳۷۶]



۱) نه زوج، نه فرد
۲) فرد
۳) زوج
۴) تابع نیست

۲۲. اگر $f(x)=\frac{3e^x-e^{-x}}{2}$ و $g(x)=\ln x$ باشد، مقدار $f\circ g(1)$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۳. اگر $f(x)=۳x+۱$ و $g\,o\,f(x)=۷x+۲$ باشد، $g(x)$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $۱۰x+۳$ ۲) $۳x-۴$ ۳) $\frac{۵}{۲}x+\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳}x-\frac{۱}{۳}$

۲۴. اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ باشد، مقدار $f\,o\,f^{-۱}(۴)$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۵. برد یا حوزه‌ی مقادیر تابع حقیقی با ضابطه $f(x)=\ln(\frac{x^۲}{x^۲+۱})$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $(-\infty,۰)$

۲۶. ضابطه‌ی معکوس تابع با ضابطه‌ی $x>۰$، $f(x)=\ln(\frac{x^۲}{x^۲+۱})$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $\sqrt{\frac{e^x}{۱+e^x}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱-e^x}{e^x}}$ ۳) $\sqrt{\frac{e^x}{۱-e^x}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۱+e^x}{e^x}}$

۲۷. دامنه تعریف (Domain) تابع حقیقی f، با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{۳x}$، کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $(e^{-۱},e)$ ۲) $[e^{-۱},e]$ ۳) R^+ ۴) $R-\{۰\}$

۲۸. برد (Range) تابع حقیقی f با ضابطه‌ی $f(x)=\ln(x+۱)$، کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) R ۲) R^+ ۳) $R-\{۱\}$ ۴) $R-\{۰\}$

۲۹. برد تابع $y=\frac{e^x-۱}{e^x+۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}^+$

۳۰. دامنه‌ی تابع $y=\frac{x+\ln x}{[x]-x}$ کدام است؟ ($[x]$ تابع جزء صحیح است) [۱۳۷۹]

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $\mathbb{R}-Z$ ۴) $\mathbb{R}^+-N$

۳۱. اگر $f(x)=\frac{۵^x-۱}{۵^x+۱}$ آنگاه $f^{-۱}\left(\frac{۲}{۳}\right)$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) ۰ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

۳۲. بُرد تابع حقیقی f به معادله‌ی $y=۲+e^{-x+۱}$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-\infty,۲]$ ۳) $\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$ ۴) $(۲,+\infty)$

۳۳. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x-۱|-|x+۱|$ چگونه است؟ [۱۳۸۱]

۱) فرد ۲) زوج ۳) هم فرد و هم زوج ۴) نه فرد و نه زوج

۳۴. دامنه‌ی تعریف تابع حقیقی f به معادله‌ی $y=\sqrt{\log\frac{۵x-x^۲}{۴}}$، کدام فاصله است؟ [۱۳۸۱]

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $[۰,۵]$
۳) $[۱,۴]$ ۴) $(-\infty,۰]\cup[۵,+\infty)$

۳۵. برد تابع $y=\sqrt{۱-x^۲}$، کدام فاصله است؟ [۱۳۸۱]

۱) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[-۱,۱]$

۳۶. دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{x-|x|}+\sqrt{x-\sin x}$ کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) $x\geqslant ۰$ ۲) $۰\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}$ ۳) $-\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant ۰$ ۴) $\mathbb{R}$

۳۷. اگر $f(x)=\frac{x+۱}{۲x+۱}$ و $g(x+۱)=\frac{x}{x+۱}$ باشد، ضابطه $f(g(x))$ برابر است با: ۱۳۸۲

۱) $\frac{x-۱}{۲x-۱}$ ۲) $\frac{۲x-۱}{۳x-۲}$ ۳) $\frac{۲x+۱}{۳x+۲}$ ۴) $\frac{x+۱}{۲x+۱}$

۳۸. اگر $F(\text{Arcsin}\frac{x-۱}{x+۱})=x+۲$ باشد، آنگاه $F(x)$ برابر است با: ۱۳۸۲

۱) $F(x)=\frac{\sin x-۱}{۱+\sin x}$ ۲) $F(x)=\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}$

۳) $F(x)=\frac{۲+\sin x}{۱-\sin x}$ ۴) $F(x)=\frac{۳-\sin x}{۱-\sin x}$

۳۹. دامنه تابع $y=\ln\left(\frac{۱-۲e^x}{۱+e^x}\right)$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) R ۲) R^+ ۳) $(-\infty,۱)$ ۴) $(-\infty,-\ln ۲)$

۴۰. اگر $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ معادله تابع حقیقی $R\to R$ باشد، $f^{-۱}(۲)$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $\frac{۱}{۲}\ln ۳$ ۲) $۲\ln ۳$ ۳) $\frac{e^۴+۱}{e^۴-۱}$ ۴) $\frac{e^۲-e^{-۲}}{e^۲+e^{-۲}}$

۴۱. اگر داشته باشیم $f(x)=\frac{۲e^x-۱}{e^x+۱}$، $g(x)=\ln x$ در این صورت $(f\circ g)(۲)$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۲. اگر $f(x)=\sqrt{\frac{۱-x}{x}}$ و $g(x)=e^x$ باشد دامنه تابع $f\circ g$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $(-۱,۱]$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $[۰,+\infty)$

۴۳. برد تابع با ضابطه $f(x)=۲^{[x]-x}$ درکدام بازه است؟ ۱۳۸۴

۱) $[۱,\frac{۱}{۲}]$ ۲) $[۱,\frac{۱}{۲})$ ۳) $[۲,۱]$ ۴) $(۲,۱]$

۴۴. ضابطه معکوس تابع $f(x)=x+\sqrt{۲x}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $x+۱-\sqrt{۲x+۱};x\geqslant\frac{-۱}{۲}$ ۲) $x+۱+\sqrt{۲x+۱};x\geqslant\frac{-۱}{۲}$

۳) $x+۱+\sqrt{۲x+۱};x>۰$ ۴) $x+۱-\sqrt{۲x+۱};x>۰$

۴۵. کدام تابع بر روی دامنه خود، یک به یک است؟ ۱۳۸۴

۱) $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ ۲) $f(x)=x+\sqrt{x}$

۳) $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۴.

$$y=\frac{۱}{۲}\left(x-\frac{۱}{x}\right),x=\frac{۱}{۲}\left(y-\frac{۱}{y}\right)\Longrightarrow x=\frac{۱}{۲}\left(\frac{y^۲-۱}{y}\right)\Longrightarrow$$
$$y^۲-۲xy-۱=۰\Longrightarrow y=x\pm\sqrt{x^۲+۱}\xrightarrow{x>y}y=x+\sqrt{x^۲+۱}$$

۲. گزینه‌ی ۳.

$$g(f(x)) = \ln\sqrt{e^{-x}} = \ln e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{x}{2}\ln e = -\frac{x}{2}$$

۳. گزینه‌ی ۲.

$$[x] - 1 = 0 \Longrightarrow [x] = 1 \Longrightarrow 1 \leqslant x < 2 \equiv [1, 2)$$

۴. گزینه‌ی ۱.

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)\sin(-x) = -x^3 + x\sin x \rightarrow \text{نه فرد و نه زوج}$$

۵. گزینه‌ی ۱.

$$y = \frac{x+4}{x} = 1 + \frac{4}{x}$$

برای اینکه $\frac{4}{x}$ یک عدد طبیعی باشد، باید x مقسوم‌علیه‌های عدد ۴ باشد، بنابراین $x = \{1, 2, 4\}$.

۶. گزینه‌ی ۴. $x^2 \geqslant 0$ بنابراین $x^2 + 1 \geqslant 1$ در نتیجه $\ln(x^2+1)$ همواره مثبت است $(\mathbb{R}^+)$ و چون به‌ازای $x = 0$ داریم $\ln 1 = 0$، پس: $R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

۷. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} = 1 - y^2 \Longrightarrow x^2 = 4 - 4y^2 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{1-y^2}$$
$$1 - y^2 \geqslant 0 \Longrightarrow |y| \leqslant 1 \Longrightarrow -1 \leqslant y \leqslant 1$$

۸. گزینه‌ی ۳.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1} + 1} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x+x-1}{x-1}} = \frac{2x}{3x-1}$$

۹. گزینه‌ی ۱.

$$x = \frac{2y}{y-1} \Longrightarrow xy - x = 2y \Longrightarrow y(x-2) = x \Longrightarrow y = \frac{x}{x-2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$$

۱۰. گزینه‌ی ۲.

$$y\sqrt{x^2+1} - x = 0 \Longrightarrow y\sqrt{x^2+1} = x \Longrightarrow y^2(x^2+1) = x^2 \Longrightarrow x^2(y^2-1) = -y^2$$
$$\Longrightarrow x^2 = \frac{-y^2}{y^2-1} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-y^2}{y^2-1}} \Longrightarrow x = \pm y\sqrt{-\frac{1}{y^2-1}}$$
$$\frac{-1}{y^2-1} > 0 \Longrightarrow \frac{1}{y^2-1} < 0, y^2 - 1 = 0 \Longrightarrow y = \pm 1$$

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Longrightarrow R_f = (-1, 1)$$

۱۱. گزینه‌ی ۱.

$$(f\circ g)\left(\frac{۵}{۴}\right)=f\left(g\left(\frac{۵}{۴}\right)\right), g\left(\frac{۵}{۴}\right)=\sqrt{\frac{۵}{۴}-۱}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{۱}{۳}$$

۱۲. گزینه‌ی ۲.

$$x^۲-۱>۰\Longrightarrow x^۲>۱\Longrightarrow |x|>۱$$

۱۳. گزینه‌ی ۱.

$$-۱\leqslant \cos x\leqslant ۱\Longrightarrow -۱\leqslant -\cos x\leqslant ۱\Longrightarrow ۲-۱\leqslant ۲-\cos x\leqslant ۱+۲\Longrightarrow$$
$$۱\leqslant ۲-\cos x\leqslant ۳\Longrightarrow ۱\geqslant \frac{۱}{۲-\cos x}\geqslant \frac{۱}{۳}\Longrightarrow \frac{۱}{۳}\leqslant y\leqslant ۱\equiv \left[\frac{۱}{۳},۱\right]$$

۱۴. گزینه‌ی ۳.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Leftrightarrow x_۱=x_۲$$
$$e^{x_۱}=e^{x_۲}\Longrightarrow x_۱=x_۲, x_۱^۲=x_۲^۲\Longrightarrow x_۱=\pm x_۲$$
$$\ln x_۱=\ln x_۲\Longrightarrow x_۱=x_۲, \frac{۱}{x_۱}=\frac{۱}{x_۲}\Longrightarrow x_۱=x_۲$$

۱۵. گزینه‌ی ۳.

$$f(-x)=e^{x}\neq f(x)\ ,\ -f(x)\rightarrow \text{نه فرد و نه زوج}$$
$$f(-x)=e^{-x}\neq f(x)\ ,\ -f(x)\rightarrow \text{نه فرد و نه زوج}$$
$$f(-x)=e^{(-x)^۲}=e^{x^۲}=f(x)\rightarrow \text{زوج}$$
$$f(-x)=x^۲-x\neq f(x)\ ,\ -f(x)\rightarrow \text{نه فرد و نه زوج}$$

۱۶. گزینه‌ی ۱.

$$۳=\frac{x}{x-۱}\Longrightarrow ۳x-۳=x\Longrightarrow ۲x=۳\Longrightarrow x=\frac{۳}{۲}=f^{-۱}(۳)$$

۱۷. گزینه‌ی ۳.

$$y=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}\Longrightarrow yx^۲+y=x^۲-۱\Longrightarrow x^۲=\frac{y+۱}{۱-y}\Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{y+۱}{۱-y}}$$

$$\frac{y+۱}{۱-y}\geqslant ۰\Longrightarrow\begin{cases}y+۱=۰\Longrightarrow y=-۱\\ ۱-y=۰\Longrightarrow y=۱\end{cases}$$

y	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$\frac{y+۱}{۱-y}$		$-$	۰	$+$	∞	$-$	

$$\Longrightarrow R_f=[-۱,۱)$$

۱۸. گزینه‌ی ۴.

$$x^۲ - ۱ \neq ۰ \Longrightarrow x^۲ \neq ۱ \Longrightarrow x \neq \pm ۱ \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۱, -۱\}$$

۱۹. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{۱}{۲} = \frac{e^x}{e^x + ۱} \Longrightarrow \frac{۱}{۲}e^x + \frac{۱}{۲} = e^x \Longrightarrow \frac{۱}{۲}e^x = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow e^x = ۱ \Longrightarrow x = ۰ = f^{-۱}(\frac{۱}{۲})$$

۲۰. گزینه‌ی ۳.

۲۱. گزینه‌ی ۲.چون نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۲۲. گزینه‌ی ۳.

$$(f \circ g)(۱) = f(g(۱)), g(۱) = \ln ۱ = ۰ \Longrightarrow f(۰) = \frac{۳e^۰ - e^۰}{۲} = ۱$$

۲۳. گزینه‌ی ۴.

$$g \circ f(x) = ۷x + ۲ \Longrightarrow g(۳x + ۱) = ۷x + ۲ \ , \ ۳x + ۱ = t \Longrightarrow x = \frac{t - ۱}{۳}$$
$$g(t) = ۷(\frac{t - ۱}{۳}) + ۲ = \frac{۷t - ۷ + ۶}{۳} = \frac{۷t - ۱}{۳} \Longrightarrow g(x) = \frac{۷}{۳}x - \frac{۱}{۳}$$

۲۴. گزینه‌ی ۳.

$$f \circ f^{-۱}(x) = x \Longrightarrow f \circ f^{-۱}(۴) = ۴ \quad .$$

۲۵. گزینه‌ی ۴.

$$۰ \leqslant \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} < ۱ \Longrightarrow \ln ۰ \leqslant \ln \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} < \ln ۱ \Longrightarrow -\infty < y < ۰$$

۲۶. گزینه‌ی ۳.

$$y = \ln(\frac{x^۲}{x^۲ + ۱}) \Longrightarrow \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} = e^y \Longrightarrow x^۲ = x^۲e^y + e^y \Longrightarrow (۱ - e^y)x^۲ = e^y$$
$$\Longrightarrow x^۲ = \frac{e^y}{۱ - e^y} \overset{x>۰}{\Longrightarrow} x = \sqrt{\frac{e^y}{۱ - e^y}} \Longrightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{\frac{e^x}{۱ - e^x}}$$

۲۷. گزینه‌ی ۴.

$$۳x = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$$

۲۸. گزینه‌ی ۱.

$$D_f = \{x | x > -۱\}$$
$$x = \ln(y + ۱) \Longrightarrow y + ۱ = e^x \Longrightarrow y = e^x - ۱ \Longrightarrow R_f = \mathbb{R}$$

۲۹. گزینه‌ی ۱.

$$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}\Longrightarrow ye^x+y=e^x-1\Longrightarrow e^x(1-y)=1+y\Longrightarrow$$
$$e^x=\frac{1+y}{1-y}\Longrightarrow x=\ln\frac{1+y}{1-y}\ ,\ \frac{1+y}{1-y}>0\Longrightarrow D_f=(-1,1)$$

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{1+y}{1-y}$		$-$	0	$+$	∞	$-$	

۳۰. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases}x>0\\ [x]-x\neq 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\notin N\end{cases}\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}^+-N$$

۳۱. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{5^x-1}{5^x+1}=\frac{2}{3}\Longrightarrow 3\times 5^x-3=2\times 5^x+2\Longrightarrow 5^x=5\Longrightarrow x=1$$

۳۲. گزینه‌ی ۴.

$$y=2+e^{-x+1}\Longrightarrow e^{-x+1}=y-2\Longrightarrow -x+1=\ln(y-2)\Longrightarrow$$
$$x=1-\ln(y-2)\Longrightarrow y-2>0\Longrightarrow y>2\Longrightarrow R_f=(2,+\infty)$$

۳۳. گزینه‌ی ۱.

$$f(-x)=|-x-1|-|-x+1|=|-(x+1)|-|-(x-1)|$$
$$=|x+1|-|x-1|=-(|x-1|-|x+1|)=-f(x)\rightarrow \text{فرد}$$

۳۴. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases}\frac{5x-x^2}{4}>0\\ \log\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}5x-x^2>0\\ 5x-x^2-4\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}0<x<5\\ 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Longrightarrow D_f=[1,4]$$

۳۵. گزینه‌ی ۳.

$$y=\sqrt{1-x^2}\Longrightarrow y^2=1-x^2\Longrightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2}$$
$$\begin{cases}y\geqslant 0\\ 1-y^2\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}y\geqslant 0\\ -1\leqslant y\leqslant 1\end{cases}\Longrightarrow 0\leqslant y\leqslant 1\Longrightarrow R_f=[0,1]$$

۳۶. گزینه‌ی ۱.

۳۷. گزینه‌ی ۲.

$$x+۱=t \Longrightarrow x=t-۱ \Longrightarrow g(t)=\frac{t-۱}{t-۱+۱}=\frac{t-۱}{t} \Longrightarrow g(x)=\frac{x-۱}{x}$$

$$f(g(x))=\frac{\frac{x-۱}{x}+۱}{\frac{۲x-۲}{x}+۱}=\frac{\frac{x-۱+x}{x}}{\frac{۲x-۲+x}{x}}=\frac{۲x-۱}{۳x-۲}$$

۳۸. گزینه‌ی ۴.

$$\operatorname{Arcsin}\frac{x-۱}{x+۱}=t \Longrightarrow \frac{x-۱}{x+۱}=\sin t \Longrightarrow x-۱=x\sin t+\sin t$$

$$\Longrightarrow x-x\sin t=۱+\sin t \Longrightarrow x=\frac{۱+\sin t}{۱-\sin t}$$

$$F(t)=\frac{۱+\sin t}{۱-\sin t}+۲=\frac{۳-\sin t}{۱-\sin t} \Longrightarrow F(x)=\frac{۳-\sin x}{۱-\sin x}$$

۳۹. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{۱-۲e^x}{۱+e^x}>۰ \Longrightarrow ۱-۲e^x>۰ \ , \ ۱-۲e^x=۰ \Longrightarrow e^x=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow x=\ln\frac{۱}{۲}=-\ln ۲$$

x		$-\ln ۲$	
$\frac{۱-۲e^x}{۱+e^x}$	$+$	۰	$-$

$$\Longrightarrow D_f=(-\infty,-\ln ۲)$$

۴۰. گزینه‌ی ۱.

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\coth x \Longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)$$

$$f^{-۱}(۲)=\frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۲+۱}{۲-۱}\right)=\frac{۱}{۲}\ln ۳$$

۴۱. گزینه‌ی ۳.

$$g(۲)=\ln ۲ \ , \ f\circ g(۲)=f(\ln ۲)=\frac{۲e^{\ln ۲}-۱}{e^{\ln ۲}+۱}=\frac{۴-۱}{۲+۱}=۱$$

۴۲. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{۱-x}{x}\geqslant ۰ \Longrightarrow D_f=(۰,۱] \quad ، \quad D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} | ۰<e^x\leqslant ۱\}=(-\infty,۰]$$

می‌دانیم $\ln ۰<\ln e^x\leqslant \ln ۱$ یا $-\infty<x\leqslant ۰$.

راه حل دوم:

$$f\circ g(x)=\sqrt{\frac{۱-e^x}{e^x}} \quad ، \quad \frac{۱-e^x}{e^x}\geqslant ۰ \Longrightarrow ۱-e^x\geqslant ۰ \Longrightarrow e^x\leqslant ۱$$

$$\Longrightarrow \ln e^x\leqslant \ln ۱ \Longrightarrow x\leqslant ۰$$

۴۳. گزینه‌ی ۲.

$$D_f = \mathbb{R} \quad ، \circ \leqslant x - [x] < ۱ \quad ، \quad y = (\frac{۱}{۲})^{x-[x]}$$

اگر: $x - [x] = \circ \Longrightarrow y = (\frac{۱}{۲})^{\circ} = ۱$

اگر: $\circ < x - [x] < ۱ \Longrightarrow y = (\frac{۱}{۲})^{x-[x]} < \frac{۱}{۲}$

بنابراین $R_f = [۱, \frac{۱}{۲})$

۴۴. گزینه‌ی ۴.

$$D_f : x \geqslant \circ \quad y - x = \sqrt{۲}x \Longrightarrow y^{۲} - ۲yx + x^{۲} = ۲x \Longrightarrow$$

$$x^{۲} - ۲(y+۱)x + y^{۲} = \circ \Longrightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \Longrightarrow x = (y+۱) \pm \sqrt{y^{۲} + ۲y + ۱ - y^{۲}}$$

$$x = y + ۱ \pm \sqrt{۲y+۱} \Longrightarrow f^{-۱}(x) = x + ۱ - \sqrt{۲x+۱} \quad ، x > \circ$$

۴۵. گزینه‌ی ۲.

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Longrightarrow f' > \circ \Longrightarrow \text{صعودی اکیداً } f \Longrightarrow \text{یک به یک}$$

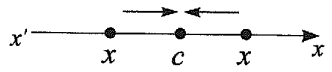
فصل ۴

حد و پیوستگی

مفهوم میل کردن

۴ـ۱ وقتی می‌گوییم متغیر x به عدد ثابت c میل می‌کند، منظور این است که x به عدد c بسیار نزدیک می‌شود و می‌نویسند $x \to c$، اما برابر با c نمی‌شود، یعنی $x \neq c$، پس $x - c \neq 0$. باید توجه داشت وقتی گفته می‌شود «x به‌سمت c میل می‌کند»، به این معنی است که x هم از طرف راست و هم از طرف چپ به c میل می‌کند، یعنی:

$$x \to c \equiv (x \to c^+, x \to c^-)$$



$x \to c^+$ یعنی آن‌که x با مقادیر بزرگ‌تر از c به c نزدیک می‌شود (یعنی، همیشه $x - c > 0$). $x \to c^-$ یعنی آن‌که x با مقادیر کوچک‌تر از c به c نزدیک می‌شود (یعنی، همیشه $x - c < 0$).

۴ـ۲ هرگاه متغیر x از هر عدد بسیار بزرگ مثبتی بزرگ‌تر باشد، می‌گویند که x به‌سمت $+\infty$ میل کرده است و آن را به‌صورت $x \to +\infty$ نشان می‌دهند.

۴ـ۳ هرگاه متغیر x از هر عدد منفی بسیار کوچکی، کوچک‌تر باشد، می‌گویند که x به‌سمت $-\infty$ میل کرده است و آن را به‌صورت $x \to -\infty$ نشان می‌دهند.

مفهوم حد

۴ـ۴ به‌طور کلی در مطالعه‌ی تابع‌ها، مثلاً با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در بسیاری از موارد، لازم است بدانیم وقتی متغیر x به عدد معینی، مثلاً c میل می‌کند، $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند؟ به‌عبارت دیگر آیا مقدارهای $f(x)$ یا y به عدد معینی میل می‌کند یا نه؟ مثال زیر موضوع را روشن می‌کند.

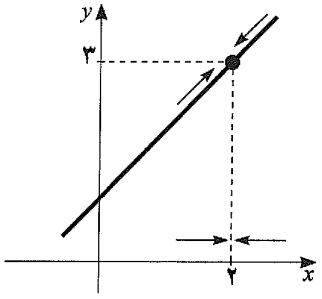
مثال تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x + 1$ مفروض است. می‌خواهیم بدانیم وقتی متغیر x به‌سمت عدد ۲ میل می‌کند، $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند. می‌دانیم متغیر x هم با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ و هم با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به‌سمت آن میل می‌کند (مطابق جدول زیر):

x	$\cdots \to ۱/۹۹ \to ۱/۹۹۹ \to \cdots \to ۲ \leftarrow \cdots \leftarrow ۲/۰۰۱ \leftarrow ۲/۰۱ \leftarrow \cdots$
$f(x)$	$\cdots \to ۲/۹۹ \to ۲/۹۹۹ \to \cdots \to ۳ \leftarrow \cdots \leftarrow ۳/۰۰۱ \leftarrow ۳/۰۱ \leftarrow \cdots$

مشاهده می‌شود وقتی $x \to ۲^+$، $f(x)$ به‌سمت عدد ۳ و وقتی $x \to ۲^-$، $f(x)$ به‌سمت عدد ۳ میل می‌کند. پس می‌توان گفت در تابع $f(x) = x + ۱$ وقتی x به‌سمت عدد ۲ میل کند $(x \to ۲)$، $f(x)$ به‌سمت عدد ۳ میل می‌کند $(f(x) \to ۳)$. این مطلب را چنین می‌نویسند:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = \lim_{x \to ۲} (x + ۱) = ۳$$

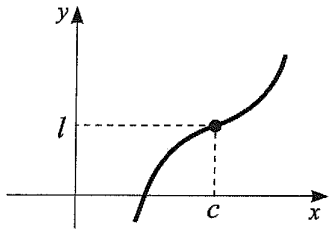
به نمودار تابع $f(x) = x + ۱$ توجه کنید:



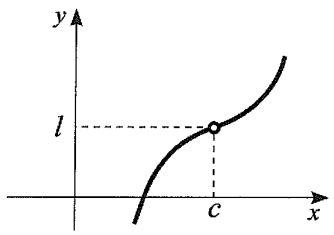
از روی شکل دیده می‌شود که برای همه‌ی xهای به قدرکافی نزدیک به ۲، $f(x)$ نزدیک ۳ است، درحقیقت وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود ـ چه از راست و چه از چپ ـ $f(x)$ به ۳ نزدیک می‌شود.

۴ـ۵ تعریف حد: تابع f را که در یک بازه‌ی باز I شامل c تعریف شده است (شکل ۱)، به‌جز احتمالاً در خود c (شکل ۲) درنظر می‌گیریم، می‌گوییم حد تابع f، وقتی متغیر x به عدد c میل می‌کند، برابر عدد l است درصورتی‌که بتوانیم $f(x)$ را هرچه بخواهیم به L نزدیک کنیم، به شرط آن‌که x را به قدرکافی به عدد c نزدیک کرده باشیم این مطلب با نماد ریاضی زیر نمایش داده می‌شود:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



(۱)



(۲)

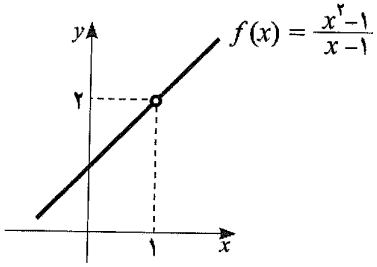
۴ـ۶ وجود حد تابع f وقتی $x \to c$ به معین بودن یا نبودن تابع در نقطه‌ی $x = c$ بستگی ندارد، لذا حالت‌های زیر قابل‌تشخیص است:

الف) تابع f وقتی $x \to c$، حد دارد ولی f در c تعریف نشده است.

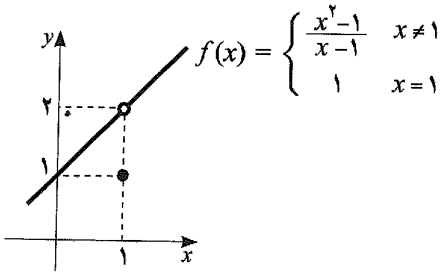
ب) تابع f، وقتی $x \to c$، حد دارد و f در c تعریف شده است.

پ) تابع f، وقتی $x \to c$ حد ندارد (این حالت در مباحث بعدی بررسی خواهد شد).

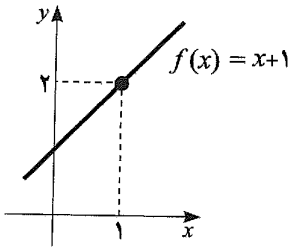
مثال در شکل زیر، وقتی که $x \to ۱$، تابع f دارای حدی برابر با ۲ است، بااین‌که تابع f در نقطه‌ی $x = ۱$ تعریف نشده است.



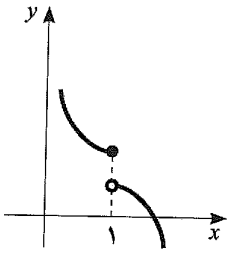
مثال در شکل زیر وقتی که $x \to ۱$، تابع f دارای حدی برابر با ۲ است، با این‌که $f(۱) \neq ۲$.



مثال در شکل زیر وقتی که $x \to ۱$، تابع f دارای حدی برابر با ۲ است، و نیز $f(۱) = ۲$.



مثال در شکل زیر، وقتی که $x \to ۱$ تابع f دارای حد نیست.

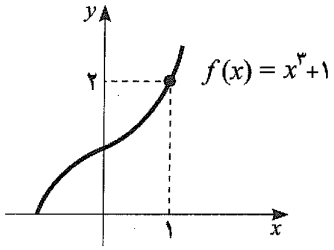


۴ـ۷ اگر تابع f، وقتی $x \to c$ دارای حد L باشد آنگاه حد $f(x) - L$، وقتی $x \to c$، مساوی صفر است و برعکس،

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c}(f(x) - L) = ۰$$

مثال در شکل زیر، وقتی که $x \to ۱$، تابع f دارای حدی برابر $L = ۲$ است. بنابراین:

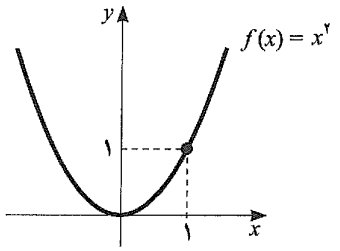
$$\lim_{x\to ۱}(f(x) - L) = \lim_{x\to ۱}(x^۳ + ۱ - ۲) = ۰$$



۸ـ۴ اگر تابع f، وقتی $x \to c$، دارای حدّ L باشد، حد f وقتی $x \to c^+$ یا $x \to c^-$ نیز وجود دارد و مساوی L است.

مثال در شکل زیر، وقتی که $x \to ۱$ تابع f دارای حدی برابر با $L = ۱$ است. پس:

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۱, \lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۱$$



حد راست و حد چپ تابع

۹ـ۴ تابع f را که در بازه‌ی I شامل c تعریف‌شده است، به‌جز احتمالاً در خود c، درنظر می‌گیریم:

الف) اگر x از طرف راست به‌سمت c میل کند و تابع حدی برابر $l_۱$ داشته باشد، $l_۱$ را حد راست تابع می‌گویند و می‌نویسند:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l_۱$$

ب) اگر x از طرف چپ به‌سمت c میل کند و تابع حدی برابر $l_۲$ داشته باشد، $l_۲$ را حد چپ تابع می‌گویند و می‌نویسند:

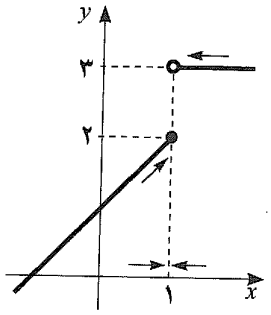
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_۲$$

۱۰ـ۴ اگر تابع f در نقطه‌ی c حد راست و حد چپ داشته باشد و این دو حد با هم برابر باشند، تابع در c دارای حد است و برعکس، اگر تابع در یک نقطه حد داشته باشد، در آن نقطه حد راست و حد چپ دارد، و این دو حد با هم برابرند، یعنی:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = l$$

۱۱ـ۴ اگر حد چپ و حد راست یک تابع در یک نقطه متفاوت باشند، آن تابع در آن نقطه حد ندارد.

مثال

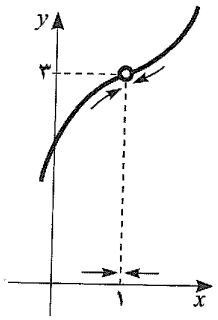


$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

مثال



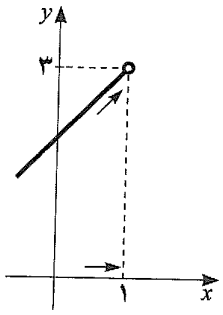
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۳$$

۱۲ـ۴ اگر تابع در سمت راست نقطه‌ای تعریف نشده باشد، آنگاه تابع در آن نقطه حد راست ندارد، به‌طور مشابه، اگر تابع در سمت چپ نقطه‌ای تعریف‌نشده باشد، آنگاه تابع در آن نقطه حد چپ ندارد.

مثال

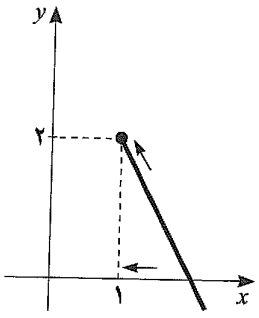


$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

مثال



$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

روش‌های محاسبه‌ی حدود

۱۳ـ۴ گرچه حد تابع f وقتی $x \to c$ به مقدار f در c بستگی ندارد، ولی اگر حد f در c درست مساوی $f(c)$ شد، می‌گوییم حد تابع را می‌توان با جایگزینی مستقیم حساب کرد. بنابراین،

۱) هرگاه $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، دراین‌صورت داریم:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

۲) اگر در تابع کسری $\frac{f(x)}{g(x)}$، f و g دو چندجمله‌ای باشند و حد g در نقطه‌ی $x = c$ مخالف صفر باشد، دراین‌صورت:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

۳) در توابع رادیکالی درصورتی‌که زیر رادیکال یک چندجمله‌ای یا یک عبارت گویا باشد (به‌طوری‌که حد مخرج عبارت گویا صفر نشود):

الف) اگر فرجه فرد باشد، حد تابع برابر با مقدار تابع به‌ازای عدد موردنظر است.

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(c)} \quad \text{، } n \text{ فرد است}$$

ب) اگر فرجه زوج باشد، درصورتی‌که زیر رادیکال مثبت شود، حد تابع برابر مقدار تابع به‌ازای عدد موردنظر است.

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(c)} \quad , \quad f(c) > ۰, \quad n \text{ زوج است}$$

۴) حد تابع‌های ساده‌ی مثلثاتی به شرح زیر است.

$$\lim_{x\to c} \sin x = \sin c \quad , \quad \lim_{x\to c} \cos x = \cos c$$

$$\lim_{x\to c\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}} \tan x = \tan c \quad , \quad \lim_{x\to c\neq k\pi} \cot x = \cot c$$

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۲}(x^۲ - ۵x + ۱)$

۲) $\lim_{x\to -۱} \frac{۲x^۲ + x - ۱}{x + ۳}$

۳) $\lim_{x\to ۰} \sqrt{۲x^۳ - x + ۱}$

۴) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} (۲\sin x - \tan x)$

حل

۱) $\lim_{x\to ۲}(x^۲ - ۵x + ۱) = ۴ - ۱۰ + ۱ = -۵$

۲) $\lim_{x\to -۱} \frac{۲x^۲ + x - ۱}{x + ۳} = \frac{۲ - ۱ - ۱}{-۱ + ۳} = \frac{۰}{۲} = ۰$

۳) $\lim_{x\to ۰} \sqrt{۲x^۳ - x + ۱} = \sqrt{۱} = ۱$

۴) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} (۲\sin x - \tan x) = ۲\sin\frac{\pi}{۶} - \tan\frac{\pi}{۶} = ۲ \times \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۳ - \sqrt{۳}}{۳}$

مثال اگر $f(x+۲)=\frac{۳x+۱}{x+۲}$، آنگاه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ را بیابید.

حل

$$x+۲=t \Longrightarrow x=t-۲ \Longrightarrow f(t)=\frac{۳(t-۲)+۱}{t-۲+۲} \Longrightarrow f(x)=\frac{۳x-۵}{x}$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\frac{۳-۵}{۱}=-۲$$

راه‌حل دوم:

$$(x+۲)\to ۱ \Longrightarrow x\to -۱ \Longrightarrow \text{جاگذاری}: \frac{-۳+۱}{-۱+۲}=-۲$$

تست اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵$، آنگاه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵ \Longrightarrow \frac{۲\lim_{x\to ۱} f(x)-۱}{\lim_{x\to ۱} f(x)+۱}=۵ \Longrightarrow ۵\lim_{x\to ۱} f(x)+۵=۲\lim_{x\to ۱} f(x)-۱$$

$$\Longrightarrow ۳\lim_{x\to ۱} f(x)=-۶ \Longrightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=-۲$$

۱۴ـ۴ اگر مقدار یک تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج در نقطه‌ای صفر شد، آنگاه برای محاسبه‌ی حد تابع در این نقطه باید دامنه‌ی تابع را به‌دست آوریم، چون ممکن است یکی از حدهای راست یا چپ موجود نباشد.

مثال آیا تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ در نقطه‌ی $x=۱$ حد دارد؟

حل دامنه‌ی تعریف تابع f بازه‌ی $[-۱,۱]$ است. پس f در نقطه‌ی $x=۱$ حد راست ندارد، زیرا تابع f در هیچ نقطه‌ی سمت راست $x=۱$ تعریف نشده است، اما $\lim_{x\to ۱^-}\sqrt{۱-x^۲}=۰$. بنابراین $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد.

۱۵ـ۴ در تابع‌های چندضابطه‌ای مانند تابع قدرمطلق، تابع جزء صحیح و تابع علامت از حد چپ و راست تابع استفاده می‌شود (درصورتی‌که حد در نقاط افراز دامنه‌ی خواسته شده باشد).

حد توابع چندضابطه‌ای

۱۶ـ۴ هرگاه تابع f در اطراف $x=c$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$f(x)=\begin{cases} f_۱(x) & x>c \\ f_۲(x) & x<c \end{cases}$$

آنگاه:

$$\begin{cases} \lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c^+} f_۱(x) \\ \lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^-} f_۲(x) \end{cases}$$

مثال تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x>0\\ [x] & x<0\end{cases}$ تعریف شده است. آیا تابع f وقتی $x\to 0$ حد دارد؟

حل

$$x\to 0^+ \Longrightarrow x>0 \Longrightarrow |x|=x \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$x\to 0^- \Longrightarrow -1<x<0 \Longrightarrow [x]=-1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^-}[x]=-1$$

بنابراین تابع f، وقتی $x\to 0$ حد ندارد.

تست به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & x\geqslant -1\\ 2x+1 & x<-1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ حد دارد؟

۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) $\{\ \}$ ۴) $\mathbb{R}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=(-2+1)=-1 \quad , \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=(-1+a)^2$$

تابع f در نقطه‌ی $x=-1$ حد دارد. پس:

$$(-1+a)^2=-1 \Longrightarrow \text{معادله جواب ندارد} \Longrightarrow \text{مجموعه‌ی مقادیر } a = \{\ \}$$

۱۷ـ۴ هرگاه تابع f در اطراف $x=c$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & x\neq c\\ f_2(x) & x=c\end{cases}$$

آنگاه:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} f_1(x)\\ \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-} f_1(x)\end{cases}$$

مثال حد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ چه‌قدر است؟

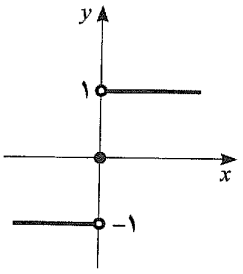
حل

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{3}=\sqrt{3} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\sqrt{3}$.

حد تابع علامت

۱۸ـ۴ ضابطه‌ی تابع علامت به‌صورت $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$ است و نمودار آن هم به‌صورت زیر است:



واضح است که تابع در $x = ۰$ حد ندارد و در نقاط دیگر حدش یا ۱ یا -۱ است.

۱۹ـ۴ در محاسبه‌ی $\lim_{x\to c} \operatorname{sgn}(g(x))$، اگر حد $g(x)$ وقتی $x \to c$، مخالف صفر باشد، دراین‌صورت:

$$\lim_{x\to c} \operatorname{sgn}(g(x)) = \operatorname{sgn}(\lim_{x\to c} g(x))$$

مثال حاصل $\lim_{x\to ۲} \operatorname{sgn}(x^۲ - ۱)$ را حساب کنید.

حل چون $\lim_{x\to ۲}(x^۲ - ۱) = ۳$ و مخالف صفر است،

$$\lim_{x\to ۲} \operatorname{sgn}(x^۲ - ۱) = \operatorname{sgn}(\lim_{x\to ۲}(x^۲ - ۱)) = \operatorname{sgn}(۳) = ۱$$

۲۰ـ۴ در محاسبه‌ی $\lim_{x\to c} \operatorname{sgn}(g(x))$، اگر حد $g(x)$ وقتی $x \to c$، برابر صفر باشد، دراین‌صورت باید رفتار تابع g را در سمت راست و چپ $x = c$ بررسی کنیم.

مثال اگر $f(x) = \operatorname{sgn}(x^۲ - ۳x)$ تعریف شود، حاصل هریک از حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۳+} f(x)$ ۲) $\lim_{x\to ۰+} f(x)$

حل چون $\lim_{x\to ۳+}(x^۲ - ۳x) = ۰$ و $\lim_{x\to ۰+}(x^۲ - ۳x) = ۰$، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
$x^۲ - ۳x$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

۱) $x \to ۳^+ : x > ۳ \Longrightarrow x^۲ - ۳x > ۰ \Longrightarrow \operatorname{sgn}(x^۲ - ۳x) = ۱ \Longrightarrow \lim_{x\to ۳+} f(x) = ۱$

۲) $x \to ۰^+ : x > ۰ \Longrightarrow x^۲ - ۳x < ۰ \Longrightarrow \operatorname{sgn}(x^۲ - ۳x) = -۱ \Longrightarrow \lim_{x\to ۰+} f(x) = -۱$

تست حد تابع $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(x-۱)$ در نقطه‌ی $x = ۱$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) حد ندارد.

حل گزینه‌ی ۴.

$$x \to ۱^+ \Longrightarrow x - ۱ > ۰ \Longrightarrow \operatorname{sgn}(x-۱) = ۱$$
$$\lim_{x \to ۱^+} x.\operatorname{sgn}(x-۱) = \lim_{x \to ۱^+} (x \times ۱) = ۱$$
$$x \to ۱^- \Longrightarrow x - ۱ < ۰ \Longrightarrow \operatorname{sgn}(x-۱) = -۱$$
$$\lim_{x \to ۱^-} x.\operatorname{sgn}(x-۱) = \lim_{x \to ۱^-} (x \times (-۱)) = -۱$$

چون حد راست و چپ تابع f در نقطه‌ی $x = ۱$ برابر نیستند، پس در این نقطه تابع f حد ندارد.

۴ـ۲۱ ممکن است $\lim_{x \to c} g(x)$ موجود نباشد، اما $\lim_{x \to c} \operatorname{sgn}(g(x))$ وجود داشته باشد.

مثال حاصل $\lim_{x \to ۲} \operatorname{sgn}[x]$ را به‌دست آورید.

حل تابع $g(x) = [x]$ در $x = ۲$ حد ندارد، زیرا:

$$\lim_{x \to ۲^+} [x] = [۲^+] = ۲ \quad , \quad \lim_{x \to ۲^-} [x] = [۲^-] = ۱$$

اما حد بالا را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x \to ۲^+ \Longrightarrow [x] = ۲ \Longrightarrow \lim_{x \to ۲^+} \operatorname{sgn}[x] = \lim_{x \to ۲^+} \operatorname{sgn}(۲) = ۱$$
$$x \to ۲^- \Longrightarrow [x] = ۱ \Longrightarrow \lim_{x \to ۲^-} \operatorname{sgn}[x] = \lim_{x \to ۲^-} \operatorname{sgn}(۱) = ۱$$

درنتیجه $\lim_{x \to ۲} \operatorname{sgn}[x] = ۱$.

حدهای شامل توابع جزء صحیح

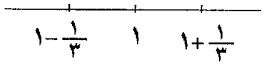
۴ـ۲۲ (روش غیررسمی) برای محاسبه‌ی حد توابع شامل جزء صحیح وقتی که $x \to c$، عددی نزدیک c اختیار می‌کنیم و به‌جای x قرار می‌دهیم تا مقدار حد به‌دست آید، اما در (روش دقیق) برای محاسبه‌ی حدهای شامل $[f(x)]$ باید سعی کرد $f(x)$ را بین دو عدد متوالی قرار داد.

مثال مقدار $\lim_{x \to ۱^-} [-۳x]$ را بیابید.

حل روش غیررسمی:

$$\lim_{x \to ۱^- \approx ۰/۹} [-۳x] = [-۳ \times ۰/۹] = [-۲/۷] = -۳$$

روش دقیق: در $[-۳x]$ طول بازه‌ها $\frac{۱}{۳}$ واحد است، پس



بنابراین برای محاسبه‌ی حد چپ در $x = ۱$، فرض می‌کنیم:

$$۱ - \frac{۱}{۳} < x < ۱ \Longrightarrow -۳ < -۳x < -۲ \Longrightarrow [-۳x] = -۳$$

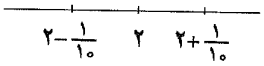
$$\lim_{x \to ۱^-} [-۳x] = -۳$$

مثال مقدار $\lim_{x \to ۲^+} [۱۰x]$ را بیابید.

حل روش غیررسمی:

$$\lim_{x \to ۲^+ \approx ۲/۱} [۱۰x] = [۱۰ \times ۲/۱] = [۲۱] = ۲۱$$

روش دقیق: در $[۱۰x]$ طول بازه‌ها $\frac{۱}{۱۰}$ واحد است، پس



بنابراین برای محاسبه‌ی حد راست در $x = ۲$ فرض می‌کنیم:

$$۲ < x < ۲ + \frac{۱}{۱۰} \Longrightarrow ۲۰ < ۱۰x < ۲۱ \Longrightarrow [۱۰x] = ۲۰$$

$$\lim_{x \to ۲^+} [۱۰x] = ۲۰$$

بنابراین گاهی روش غیررسمی جواب غلط می‌دهد. برای اینکه روش غیررسمی جواب درست دهد، باید عدد مناسب اختیار شود.

تست مجموع حد راست و چپ تابع $f(x) = (-۱)^{[x]} \frac{x-۱}{x+۱}$ در $x = ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) صفر

حل گزینه‌ی ۴.

$$x \to ۰^+ \Longrightarrow ۰ < x < ۱ \Longrightarrow [x] = ۰ \Longrightarrow \lim_{x \to ۰^+} (-۱)^۰ \frac{x-۱}{x+۱} = -۱$$

$$x \to ۰^- \Longrightarrow -۱ < x < ۰ \Longrightarrow [x] = -۱ \Longrightarrow \lim_{x \to ۰^-} (-۱)^{-۱} \frac{x-۱}{x+۱} = ۱$$

پس مجموع حد راست و حد چپ برابر صفر است.

تست به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = a[x] + [x+۱]$ در $x = ۱$ دارای حد است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۳.

$$f(x) = a[x] + [x+۱] = a[x] + [x] + ۱$$

$$x \to ۱^+ \Longrightarrow ۱ < x < ۲ \Longrightarrow [x] = ۱ \Longrightarrow \lim_{x \to ۱^+} f(x) = a + ۱ + ۱ = a + ۲$$

$$x \to ۱^- \Longrightarrow ۰ < x < ۱ \Longrightarrow [x] = ۰ \Longrightarrow \lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۰ + ۰ + ۱ = ۱$$

تابع f در $x = ۱$ دارای حد است، پس:

$$a + ۲ = ۱ \Longrightarrow a = -۱$$

۲۳ـ۴ در محاسبه‌ی $\lim_{x \to c}[f(x)]$ اگر حد داخل جزء صحیح یعنی $f(x)$ به‌سمت عدد صحیح L برود،[۱] آنگاه:

۱) اگر $f(x) \to L^+$ برود، f از مقادیر بزرگ‌تر از L به L نزدیک می‌شود، پس $L < f < L + ۱$، درنتیجه $\lim_{x \to c}[f(x)] = L$.

۲) اگر $f(x) \to L^-$ برود، f از مقادیر کم‌تر از L به L نزدیک می‌شود، پس $L - ۱ < f < L$، درنتیجه $\lim_{x \to c}[f(x)] = L - ۱$.

اکنون برای این‌که بدانیم $f(x) \to L^+$ یا $f(x) \to L^-$، باید مقدار $f(x) - L$ را به‌دست آوریم، سپس آن را در اطراف $x = c$ تعیین علامت کنیم، جاهایی که $f(x) - L > ۰$ باشد، $f(x) > L$ است و درنتیجه $f(x) \to L^+$ و جاهایی که $f(x) - L < ۰$ باشد، $f(x) < L$ است و درنتیجه $f(x) \to L^-$.

مثال حاصل هریک از حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $\lim_{x \to ۲+} \left[\frac{۲x + ۵}{x + ۱}\right]$ ۲) $\lim_{x \to ۲}[x^۲ - ۴x + ۱]$

حل

۱)
$$f(x) = \frac{۲x + ۵}{x + ۱} \Longrightarrow \lim_{x \to ۲+} f(x) = \frac{۴ + ۵}{۲ + ۱} = ۳$$

اکنون عبارت $f(x) - ۳$ را در اطراف $x = ۲$ تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-۱	۲	$+\infty$
$\frac{۲x + ۵}{x + ۱} - ۳ = \frac{-x + ۲}{x + ۱}$	$-$	∞	$+$	۰ $-$

$$x \to ۲^+ \Longrightarrow x > ۲ \Longrightarrow f(x) - ۳ < ۰ \to f(x) < ۳ \Longrightarrow \lim_{x \to ۲+}[f(x)] = ۲$$

۲)
$$f(x) = x^۲ - ۴x + ۱ \Longrightarrow \lim_{x \to ۲} f(x) = -۳$$

اکنون عبارت $f(x) + ۳$ را در اطراف $x = ۲$ تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$x^۲ - ۴x + ۱ + ۳ = x^۲ - ۴x + ۴$	$+$	۰	$+$

$$x \to ۲^+, x \to ۲^- \Longrightarrow f(x) + ۳ > ۰ \Longrightarrow f(x) > -۳ \Longrightarrow \lim_{x \to ۲}[f(x)] = -۳$$

۲۴ـ۴ اگر $f(x) = ax + b$ باشد، عبارت $[f(x)]$ به‌ازای مقادیری از x که $f(x)$ را عدد صحیح کند، حد ندارد.

---

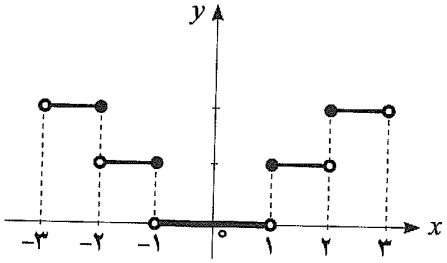
۱. اگر حد داخل جزء صحیح یک عدد صحیح شود، باید حد راست و حد چپ آن را جداگانه حساب کنیم.

مثال مقدار $\lim_{x\to ۳}[۲x-۱]$ را بیابید.

حل $f(x)=۲x-۱$، به‌ازای $x=۳$ داریم $f(۳)=۵\in Z$، پس $[۲x-۱]$ وقتی $x\to ۳$ حد ندارد.

سؤال آیا اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۱ نباشد، باز قاعده‌ی (۴ـ۲۴) صادق است؟

حل خیر. به‌عنوان مثال نمودار تابع $y=[x^۲]$ به‌شکل زیر است.



همان‌طورکه مشاهده می‌شود، تابع y وقتی که $x\to ۱$، حد ندارد و نیز وقتی که $x\to ۱-$ حد ندارد. اما وقتی $x\to ۰$ حد دارد، و می‌دانیم نقطه‌ی $x=۰$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f است.

۴ـ۲۵ اگر $c\in\mathbb{R}$ و $f(c)=k\in Z$، آنگاه $\lim_{x\to c}[f(x)]$ وجود ندارد، مگر این‌که $x=c$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f باشد.

یادآوری: اگر $x=a$ ریشه‌ی ساده‌ی (مرتبه‌ی فرد) معادله‌ی $y'=۰$ باشد، آنگاه $x=a$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع است.

مثال کدام‌یک از حدهای زیر وجود ندارد؟

۱) $\lim_{x\to ۱}[x^۲-۲x]$ ۲) $\lim_{x\to ۰}[x^۳]$ ۳) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}[\sin x]$

حل

۱) طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی است $\Longrightarrow x=۱\Longrightarrow f'(x)=۲x-۲=۰\Longrightarrow f(x)=x^۲-۲x$

پس $\lim_{x\to ۱}[x^۲-۲x]$ وجود دارد. و با جاگذاری حد تابع برابر با $۱-$ می‌شود.

۲) طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست $\Longrightarrow x=۰$ ریشه‌ی مضاعف $\Rightarrow f'(x)=۳x^۲=۰\Rightarrow f(x)=x^۳$

پس $\lim_{x\to ۰}[x^۳]$ وجود ندارد.

۳) طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی است $\Longrightarrow x=\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow f'(x)=\cos x=۰\Longrightarrow f(x)=\sin x$

پس $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}[\sin x]$ وجود دارد. و با جاگذاری حد تابع برابر با ۰ می‌شود.

حدهایی که به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آیند

۴ـ۲۶ در تابع کسری گویای $\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}$، آنگاه از روش جایگزینی مستقیم نمی‌توان استفاده کرد، زیرا با جایگزینی به کسر بی‌معنای $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم که این نوع عبارت را صورت مبهم می‌نامند. ولی چون هر دو تابع به‌ازای $x=c$ برابر صفر می‌شوند، پس $(x-c)$ عامل اشتراک $f(x)$ و $g(x)$ است. لذا به‌ازای $x\neq c$ می‌توان عامل $(x-c)$، عامل ابهام، را پس از تجزیه یا گویا کردن از صورت و مخرج کسر حذف کرد.

۴ـ۲۷ روش تجزیه: اگر صورت و مخرج کسر چندجمله‌ای باشند، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم و عامل $(x-c)$ را از صورت و مخرج کسر حذف می‌کنیم و سپس عمل حدگیری را انجام می‌دهیم.

مثال حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to -۳}\dfrac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+۵x+۶}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۳-۱}{x^۲-۱}$

حل

۱) $\lim\limits_{x\to -۳}\dfrac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+۵x+۶}=\dfrac{۰}{۰}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to -۳}\dfrac{(x+۳)(x-۱)}{(x+۳)(x+۲)}=\lim\limits_{x\to -۳}\dfrac{x-۱}{x+۲}=۴$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۳-۱}{x^۲-۱}=\dfrac{۰}{۰}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲+x+۱}{x+۱}=\dfrac{۳}{۲}$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)^۵+(x-۲)^۳}{۲(x-۲)^۴+۲(x-۲)^۳}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۰ ۴) $\dfrac{۲}{۵}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)^۵+(x-۲)^۳}{۲(x-۲)^۴+۲(x-۲)^۳}=\frac{۰}{۰}\Longrightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)^۳[(x-۲)^۲+۱]}{(x-۲)^۳[۲(x-۲)+۲]}$$
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)^۲+۱}{۲(x-۲)+۲}=\frac{۱}{۲}$$

۴ـ۲۸ روش گویا کردن: اگر صورت یا مخرج کسر یا هردو اصم باشند، برای تعیین حد، صورت یا مخرج یا هردو را گویا می‌کنیم تا عامل $(x-c)$ ظاهر شود، آنگاه آن را حذف می‌کنیم و سپس عمل حدگیری را انجام می‌دهیم.

مثال حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰+}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}$

حل

۱) $\lim\limits_{x\to ۰+}\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\dfrac{۰}{۰}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to ۰+}\dfrac{x}{\sqrt{x}}\times\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۰+}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to ۰+}\sqrt{x}=۰$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}=\dfrac{۰}{۰}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{x}+۱)}$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(x+۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{۴}$$

۴ـ۲۹ در محاسبه‌ی حدهای شامل رادیکال به دامنه‌ی تابع توجه کنید، زیرا ممکن است تابع فقط در یک طرف نقطه تعریف شود.

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x-۱}}$ را به‌دست آورید.

حل به‌نظر می‌رسد که این حد ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد و باید آن را رفع ابهام کرد. اما چون دامنه‌ی تابع $(۱,+\infty)$ است و برای مقادیر کم‌تر از ۱ بی‌معنی است، پس این تابع در نقطه‌ی $x=۱$ حد ندارد.

۴ـ۳۰ اگر در تابع کسری قدرمطلق، جزء صحیح یا تابع علامت وجود داشته باشد، با توجه به این‌که حد راست و حد چپ را درصورت وجود حساب می‌کنیم، ابتدا وضعیت قدرمطلق، جزء صحیح، یا تابع علامت را مشخص می‌کنیم (آن‌ها را برمی‌داریم)، سپس حد تابع را درصورت وجود حساب می‌کنیم.

مثال حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{x^۲-۱}{|x-۱|}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{[x]-۲}{x-۲}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{x-|x|}{[x+۱]-x}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{x\,\mathrm{sgn}(x^۲-۱)-۱}{x^۳-۱}$

حل

۱) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{x^۲-۱}{|x-۱|} = \dfrac{۰}{۰}, x\to ۱^- \Longrightarrow x<۱ \Longrightarrow |x-۱| = -(x-۱)$

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{x^۲-۱}{-(x-۱)} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{(x-۱)(x+۱)}{-(x-۱)} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{x+۱}{-۱} = -۲$$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{[x]-۲}{x-۲} = \dfrac{۰}{۰}, x\to ۲^+ \Longrightarrow ۲<x<۳ \Longrightarrow [x]=۲$

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲-۲}{x-۲} = \frac{۰}{۰^+} = ۰$$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{x-|x|}{[x+۱]-x} = \dfrac{۰}{۰}, x\to ۰^- \Longrightarrow -۱<x<۰ \Longrightarrow |x| = -x, [x] = -۱$

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{x-|x|}{[x]+۱-x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x-(-x)}{-۱+۱-x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲x}{-x} = -۲$$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{x\,\mathrm{sgn}(x^۲-۱)-۱}{x^۳-۱} = \dfrac{۰}{۰}, x\to ۱^+ \Longrightarrow x>۱ \Longrightarrow x^۲-۱>۰$

$$\Longrightarrow \mathrm{sgn}(x^۲-۱) = ۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{x\times(۱)-۱}{x^۳-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{x^۲+x+۱} = \frac{۱}{۳}$$

تست حد چپ تابع $f(x) = \dfrac{۳-[x]}{x-۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ وقتی $x\to ۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) $-\infty$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\sqrt{x^۲-۶x+۹} = \sqrt{(x-۳)^۲} = |x-۳|$$

$$x\to ۳^- \Longrightarrow ۲<x<۳ \Longrightarrow |x-۳| = -(x-۳), [x] = ۲$$

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} \frac{۳-۲}{x-۳}\times(۳-x) = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

تست حد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{[x^۲]-[x]}{[-x]}$ وقتی $x\to ۱^-$ کدام است؟

۱) صفر ۲) حد ندارد ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

حل گزینه‌ی ۱.

$$x \to ۱^- \Longrightarrow \begin{cases} ۰ < x < ۱ \\ ۰ < x^۲ < ۱ \\ -۱ < -x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} [x] = ۰ \\ [x^۲] = ۰ \\ [-x] = -۱ \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to ۱^-} \frac{[x^۲] - [x]}{[-x]} = \frac{۰ - ۰}{-۱} = ۰$$

قضیه‌ی فشردگی

۳۱ـ۴ این قضیه را قضیه‌ی فشردگی می‌نامیم زیرا تابعی مانند f داریم که مقادیر آن بین دو تابع دیگر مانند g و h فشرده شده است و حد دو تابع اخیر در نقطه‌ی c برابر مقدار L است. وقتی تابع موردنظر بین دو تابع دیگر است و آن دو به L میل می‌کنند، تابع f نیز باید به L میل کند.

۳۲ـ۴ قضیه: فرض کنید به‌ازای هر x در بازه‌ی باز شامل c به‌جز احتمالاً در خود c داشته باشیم:

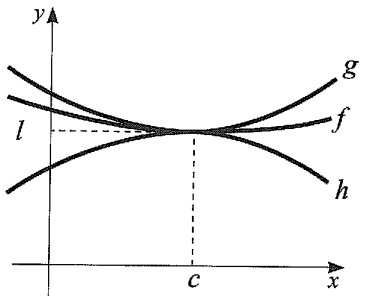
$$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

به‌علاوه فرض کنید:

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$$

دراین‌صورت:

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = l}$$



مثال فرض کنید به‌ازای هر $x \neq ۰$ داشته باشیم $۱ + \frac{x^۲}{۲} \leqslant f(x) \leqslant ۱ - \frac{x^۲}{۴}$. مطلوب است $\lim_{x \to ۰} f(x)$.

حل

$$g(x) = ۱ + \frac{x^۲}{۲} \Longrightarrow \lim_{x \to ۰} g(x) = ۱, h(x) = ۱ - \frac{x^۲}{۴} \Longrightarrow \lim_{x \to ۰} h(x) = ۱$$

بنابر قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x \to ۰} f(x) = ۱$.

مثال ثابت کنید $\lim_{x \to ۰} x \left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$.

حل می‌دانیم $k - ۱ < [k] \leqslant k$، چون تابع به‌ازای $x = ۰$ تعریف نشده است، پس همواره $x \neq ۰$. از طرفی طبق رابطه‌ی فوق داریم:

$$\frac{۱}{x} - ۱ < \left[\frac{۱}{x}\right] \leqslant \frac{۱}{x}$$

اگر $x > ۰$،

$$۱ - x < x\left[\frac{۱}{x}\right] \leqslant ۱,\ \lim_{x\to ۰^+}(۱-x) = \lim_{x\to ۰^+}(۱) = ۱ \Longrightarrow \lim_{x\to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$$

اگر $x < ۰$.

$$۱ \leqslant x\left[\frac{۱}{x}\right] < ۱ - x,\ \lim_{x\to ۰^-}(۱) = \lim_{x\to ۰^-}(۱-x) = ۱ \Longrightarrow \lim_{x\to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$$

تست اگر به‌ازای هر x، $|f(x) - ۲| \leqslant (x-۲)^۲$، آنگاه $\lim_{x\to ۲} f(x)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۳.

$$|f(x)-۲| \leqslant (x-۲)^۲ \Longrightarrow -(x-۲)^۲ \leqslant f(x)-۲ \leqslant (x-۲)^۲ \Longrightarrow$$
$$۲ - (x-۲)^۲ \leqslant f(x) \leqslant ۲ + (x-۲)^۲$$
$$\lim_{x\to ۲}(۲-(x-۲)^۲) = \lim_{x\to ۲}(۲+(x-۲)^۲) = ۲ \Longrightarrow \lim_{x\to ۲} f(x) = ۲$$

تست حاصل $\lim_{x\to ۱}(x^۲-۱)\left[\frac{۱}{x-۱}\right]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) حد ندارد ۳) ۲ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to ۱}(x^۲-۱)\left[\frac{۱}{x-۱}\right] = \lim_{x\to ۱}(x+۱)(x-۱)\left[\frac{۱}{x-۱}\right]$$

$x - ۱ = t$ درنظر می‌گیریم، پس $x = t + ۱$ (درنتیجه وقتی $x \to ۱$، آنگاه $t \to ۰$). بنابراین داریم:

$$\lim_{t\to ۰}(t+۱+۱)t\left[\frac{۱}{t}\right] \Longrightarrow \lim_{t\to ۰}(t+۲) \times \underbrace{\lim_{t\to ۰} t\left[\frac{۱}{t}\right]}_{۱} = ۲ \times ۱ = ۲$$

۴ـ۳۳ قضیه: اگر f در همسایگی محذوف c کران‌دار باشد و اگر $\lim_{x\to c} g(x) = ۰$، دراین‌صورت:

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x).g(x) = ۰}$$

مثال نشان دهید $\lim_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$.

حل چون تابع $\sin\frac{۱}{x}$ در همسایگی محذوف صفر کران‌دار است (زیرا $-۱ \leqslant \sin\frac{۱}{x} \leqslant ۱$)، از طرفی $\lim_{x\to ۰} x = ۰$، بنابر قضیه‌ی فوق $\lim_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$.

هم‌ارزی‌های مثلثاتی و جبری

۴ـ۳۴ تعریف بی‌نهایت کوچک: تابع f را وقتی $x \to c$، بی‌نهایت کوچک می‌گویند، هرگاه $\lim_{x\to c} f(x) = ۰$.

مثال هریک از توابع $f(x) = x^۳$، $g(x) = \sin x$ و $h(x) = ۱ - \cos x$ در $x = ۰$ بی‌نهایت کوچکند، زیرا حد هرکدام در $x = ۰$ برابر صفر است.

مثال هریک از توابع $f(x) = \sin ۲x$ و $g(x) = ۱ + \cos x$ در $x = \pi$ بی‌نهایت کوچکند، زیرا حد هرکدام در $x = \pi$ برابر صفر است.

۴ـ۳۵ تعریف دو تابع هم‌ارز: هرگاه دو تابع f و g در $x = c$ بی‌نهایت کوچک و $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱$ باشد، دراین‌صورت f و g را در نقطه‌ی $x = c$ هم‌ارز می‌گویند، و به‌صورت $f \sim g$ نمایش می‌دهند.

مثال نشان دهید دو تابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \tan x$ در $x = ۰$ هم‌ارز هستند.

حل می‌دانیم $\lim_{x\to ۰} \sin x = ۰$ و $\lim_{x\to ۰} \tan x = ۰$، پس دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = ۰$ بی‌نهایت کوچکند. حالا

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to ۰} \cos x = ۱$$

چون مقدار حد مساوی ۱ شد، بنابر تعریف در $x = ۰$، $f \sim g$.

۴ـ۳۶ اگر دو تابع در یک نقطه هم ارز باشند، می‌توان در حدگیری از آن‌ها، در آن نقطه، آن‌ها را به جای یکدیگر قرار داد.

مثال تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \sin x$ در نقطه‌ی $x = ۰$ هم‌ارزند، پس $\lim_{x\to ۰} \sin x = \lim_{x\to ۰} x$.

۴ـ۳۷ هم‌ارزی‌های، مثلثاتی: اگر وقتی $x \to c$، $u \to ۰$، آنگاه:

۱) $\sin u \sim u$	۲) $\tan u \sim u$
۳) $\sin^n u \sim u^n$	۴) $\tan^n u \sim u^n$
۵) $\mathrm{Arcsin}\, u \sim u$	۶) $\mathrm{Arctan}\, u \sim u$
۷) $u - \sin u \sim \frac{۱}{۶}u^۳$	۸) $u - \tan u \sim \frac{-۱}{۳}u^۳$
۹) $\tan u - \sin u \sim \frac{۱}{۲}u^۳$	۱۰) $\cos u \sim ۱ - \frac{u^۲}{۲}$

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۰} \frac{\tan x \cdot \tan ۳x}{۳x^۲}$

۲) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sin(\cot x)}{\cot x}$

۳) $\lim_{x\to -۲} \frac{\sin(x^۲ + x - ۲)}{\tan(x^۲ + ۵x + ۶)}$

۴) $\lim_{x\to ۰} \frac{x(۱ - \cos x)}{\sin^۲ x . \sin x}$

۵) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۲x - \tan ۲x}{\sin^۳ x}$

۶) $\lim_{x\to ۰} \frac{\tan^{-۱} ۵x}{\sin^{-۱} ۳x}$

حل

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x\cdot\tan ۳x}{۳x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x\cdot ۳x}{۳x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۳x^۲}{۳x^۲}=۱$

۲) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{\sin(\cot x)}{\cot x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{\cot x}{\cot x}=۱$

۳) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{\sin(x^۲+x-۲)}{\tan(x^۲+۵x+۶)}=\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۲+x-۲}{x^۲+۵x+۶}=\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{(x+۲)(x-۱)}{(x+۲)(x+۳)}$

$=\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x-۱}{x+۳}=-۳$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x(۱-\cos x)}{\sin^۲ x.\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x\left(\frac{x^۲}{۲}\right)}{x^۲\cdot x}=\dfrac{۱}{۲}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۲x-\tan ۲x}{\sin^۳ x}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{-\frac{۱}{۲}(۲x)^۳}{x^۳}=-۴$

۶) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan^{-۱}۵x}{\sin^{-۱}۳x}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۵x}{۳x}=\dfrac{۵}{۳}$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x.\sin ۲x.\sin ۳x.\cdots.\sin nx}{nx^{n-۱}\sin x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $n!$ ۳) $(n-۱)!$ ۴) ۰

حل گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x\cdot ۲x\cdot ۳x\cdot\cdots\cdot nx}{nx^{n-۱}x}=\lim_{n\to ۰}\frac{n!x^n}{nx^n}=\lim_{x\to ۰}\frac{n(n-۱)!x^n}{n.x^n}=(n-۱)!$$

تست اگر $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan kx}{\cos kx.\sin ۲x}=۲$، آنگاه k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan kx}{\cos kx.\sin ۲x}=۲\Longrightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{kx}{۱\times ۲x}=۲\Longrightarrow\frac{k}{۲}=۲\Longrightarrow k=۴$$

۴ـ۳۸ هم‌ارزی‌های جبری:

الف) وقتی یک چندجمله‌ای، جمله‌ی ثابت نداشته باشد و نیز $x\to ۰$ برود، آنگاه آن چندجمله‌ای با کوچک‌ترین جمله‌اش هم‌ارز است، یعنی وقتی $x\to ۰$:

$$ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\cdots+sx\sim sx$$

مثال حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x+\sqrt[۳]{x}}{۳\sqrt[۳]{x}}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x+۴\sqrt{x}}}{۳\sqrt[۴]{x}}$

حل

۱)
$$x \to 0 \Longrightarrow x + \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3}$$

۲)
$$x \to 0^+ = x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, x + 4\sqrt{x} \sim 4\sqrt{x}$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x+4\sqrt{x}}}{3\sqrt[4]{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{\sqrt{x}}+\sqrt{4\sqrt{x}}}{3\sqrt[4]{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{x}}{3\sqrt[4]{x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{3\sqrt[4]{x}}{3\sqrt[4]{x}} = 1$$

ب) وقتی $x \to c$، $u \to 0$ هم‌ارزی‌های زیر برقرار است:

۱) $(1+u)^n - 1 \sim nu$	۲) $(1-u)^n - 1 \sim -nu$
۳) $\sqrt[n]{1+u} - 1 \sim \frac{u}{n}$	۴) $\sqrt[n]{1-u} - 1 \sim \frac{-u}{n}$

مثال حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt[4]{1-3x}}{x}$

۲) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+\tan x}}{x^3}$

حل

۱) عدد ۱ را به صورت کسر اضافه و از آن کم می‌کنیم:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+5x}-1\right) - \left(\sqrt[4]{1-3x}-1\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5x}{2} - \frac{-3x}{4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{13x}{4x} = \frac{13}{4}$$

۲) عدد ۱ را به صورت کسر اضافه و از آن کم می‌کنیم:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right) - \left(\sqrt{1+\tan x}-1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\tan x}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{-(\tan x - \sin x)}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2}}{2x^3} = -\frac{1}{4}$$

پ) وقتی $x \to 0$ داریم:

۱) $e^{ax} - 1 \sim ax$	۲) $b^{ax} - 1 \sim ax \ln b$	۳) $\ln(1+ax) \sim ax$

مثال مقدار $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$ را بیابید.

حل
$$x \to 0 \Longrightarrow \sin 5x \sim 5x, \ln(1+4x) \sim 4x$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$$

۳۹_۴ هم‌ارزی‌های رادیکالی:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) \qquad \text{اگر } n \text{ فرد باشد،}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| \qquad \text{اگر } n \text{ زوج باشد،}$$

مثال

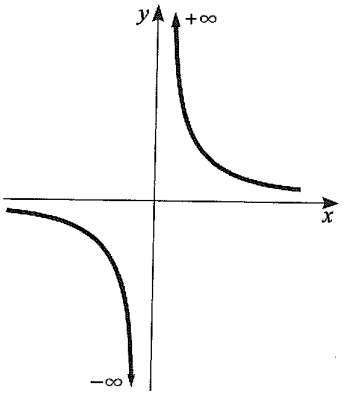
$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{8x^3-3x+1} \sim \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{8}\left(x+\frac{0}{24}\right)$$

مثال

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3x+1} \sim \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{1}\left|x+\frac{3}{2}\right|$$

حد بی‌نهایت

۴۰_۴ تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را درنظر بگیرید که نمودارش در زیر رسم شده است.



می‌خواهیم رفتار این تابع را در $x=0$ بررسی کنیم:

۱) مطابق نمودار تابع f و جدول زیر وقتی که x از سمت راست به عدد ۰ میل می‌کند $(x\to 0^+)$ مقدار y یا $f(x)$ زیاد و زیادتر می‌شود و درنهایت از هر عدد حقیقی مثبت بزرگ‌تر می‌شود (مقادیر $f(x)$ به‌طور بی‌کران افزایش می‌یابد)، یعنی

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

x	۰	←	⋯	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۱
$f(x)$	$+\infty$	←	⋯	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۱

۲) مطابق نمودار تابع f و جدول زیر وقتی که x از سمت چپ به عدد ۰ میل می‌کند $(x\to 0^-)$ مقدار y یا $f(x)$ کم و کم‌تر می‌شود و درنهایت از هر عدد حقیقی منفی کم‌تر می‌شود (مقادیر $f(x)$ به‌طور بی‌کران کاهش می‌یابد)، یعنی

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

x	−۱	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	⋯	→	۰
$f(x)$	−۱	−۱۰	−۱۰۰	−۱۰۰۰	⋯	→	$-\infty$

۴ـ۴۱ تعریف: تابع f را که در بازه‌ی باز I شامل c تعریف‌شده است، به‌جز احتمالاً در خود c، درنظر می‌گیریم. می‌گویند

۱) حد تابع f وقتی $x \to c$، $+\infty$ است، هرگاه وقتی x به قدرکافی به c نزدیک شود، $f(x)$ به‌طور بی‌کران افزایش یابد، یعنی:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

۲) حد تابع f وقتی $x \to c$، $-\infty$ است، هرگاه وقتی x به قدرکافی به c نزدیک شود، $f(x)$ به‌طور بی‌کران کاهش یابد، یعنی:

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

۴ـ۴۲ چند نکته:

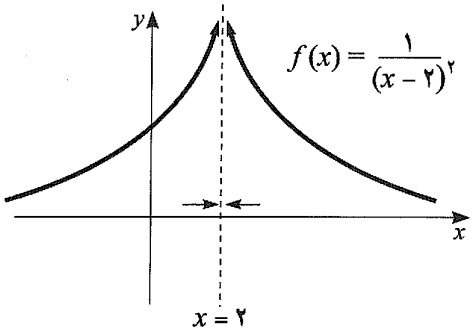
۱) تعریف‌های بالا درمورد حد راست و حد چپ یک تابع نیز درست است.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$$

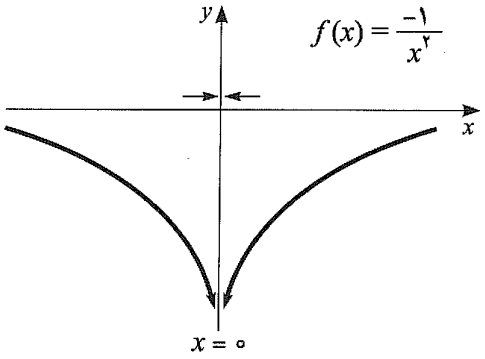
۲) $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند، بلکه نشان می‌دهند که مقدار تابع بی‌کران افزایش یا بی‌کران کاهش می‌یابد. از طرفی هرچند $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند، ولی وقتی حد تابع به آن‌ها میل می‌کند، می‌گوییم حد تابع بی‌نهایت است.

۳) اگر حد چپ و راست تابع f در c هردو به $+\infty$ (یا به $-\infty$) میل کند، می‌گوییم تابع f در $x = c$ دارای حد $+\infty$ (یا $-\infty$) است. ولی اگر حد راست تابع $+\infty$ و حد چپ $-\infty$ شود (یا برعکس)، می‌گوییم تابع f در $x = c$ حد ندارد.

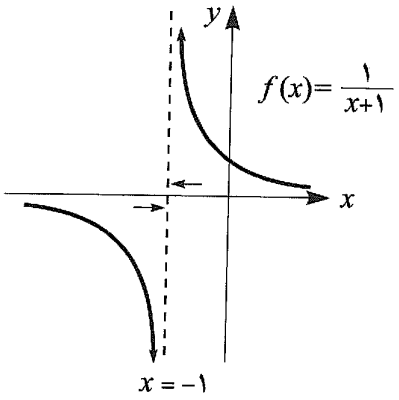
مثال با توجه به توابع و شکل‌های آن‌ها در زیر داریم:

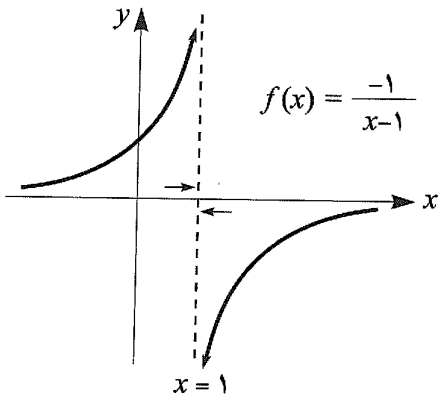


$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to ۲} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to ۰} f(x) = -\infty$$





$\lim_{x\to -۱+} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to -۱-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to -۱} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to ۱+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to ۱-} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to ۱} f(x) =$ وجود ندارد

۴ـ۴۳ اگر $\lim_{x\to c} f(x) = ۰$ باشد، حد $\frac{۱}{f(x)}$ و هم‌چنین حد $\frac{k}{f(x)}$ (k عدد حقیقی) وقتی $x \to c$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است و برعکس، یعنی

$$\lim_{x\to c} f(x) = ۰ \Leftrightarrow \lim_{x\to c} \frac{۱}{f(x)} = \infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to c} \frac{k}{f(x)} = \infty$$

صورت کلی‌تر قضیه‌ی فوق این است که هرگاه فقط مخرج کسری به‌سمت صفر میل کند، کسر مزبور دارای حد بی‌نهایت است. برای یافتن علامت بی‌نهایت آن، عددی نزدیک c در مخرج کسر قرار می‌دهیم تا علامت صفر حدی (۰^+ یا ۰^-) مخرج معلوم شود، سپس با استفاده از حدهای نامتناهی زیر علامت بی‌نهایت تعیین می‌شود.

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰+} = +\infty \quad , \quad \frac{\text{عدد منفی}}{۰+} = -\infty$$
$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰-} = -\infty \quad , \quad \frac{\text{عدد منفی}}{۰-} = +\infty$$

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۱+} \frac{[x]-۲}{x-۱}$

۲) $\lim_{x\to ۲-} \frac{x^۲+۲}{|x-۲|}$

۳) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}+} \frac{\tan x + ۱}{\tan x - ۱}$

۴) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}-} \frac{\sin x}{۲\sin x - ۱}$

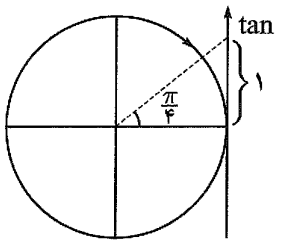
حل

۱) $$\lim_{x\to ۱+} \frac{[x]-۲}{x-۱} = \frac{[۱^+]-۲}{۱^+-۱} = \frac{۱-۲}{۰+} = \frac{-۱}{۰+} = -\infty$$

۲) $$\lim_{x\to ۲-} \frac{x^۲+۲}{|x-۲|} = \frac{۴+۲}{|۲^- - ۲|} = \frac{۶}{|۰^-|} = \frac{۶}{۰+} = +\infty$$

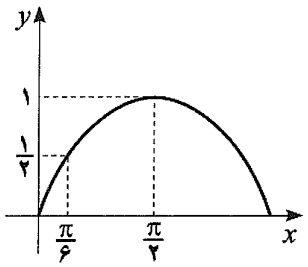
۳) با توجه به نمودار $y = \tan x$ وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}^+$، آنگاه $\tan x$ با مقادیر بیش از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}+} \frac{\tan x + ۱}{\tan x - ۱} = \frac{۱^+ + ۱}{۱^+ - ۱} = \frac{۲}{۰^+} = +\infty$$



۴) با توجه به نمودار $y = \sin x$ وقتی $x \to \frac{\pi}{۶}^-$، آنگاه $\sin x$ با مقادیر کم‌تر از $\frac{۱}{۲}$ به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک می‌شود. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}-} \frac{\sin x}{۲ \sin x - ۱} = \frac{\frac{۱}{۲}^+}{۲\left(\frac{۱}{۲}^-\right) - ۱} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۰^-} = -\infty$$



۴ـ۴۴ اگر در قضیه‌ی (۴ـ۴۳)، $k = ۰$ شود، دراین‌صورت حد تابع به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است که دراین‌صورت باید آن را رفع ابهام و سپس حاصل حد را محاسبه کنیم.

تست حد تابع به معادله‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{۱+x} - ۱}{x^۲}$ وقتی $x \to ۰^-$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۰

حل گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{۱+x} - ۱}{x^۲} = \frac{۰}{۰} \Longrightarrow \lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{۱+x} - ۱}{x^۲} \times \frac{\sqrt{۱+x} + ۱}{\sqrt{۱+x} + ۱}$$
$$= \lim_{x \to ۰^-} \frac{۱+x-۱}{x^۲\left(\sqrt{۱+x} + ۱\right)} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{۱}{x\left(\sqrt{۱+x} + ۱\right)} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

۴ـ۴۵ در حدهای بی‌نهایت $\left(\frac{\text{عدد}}{۰}\right)$، صفر حدّی مخرج ($۰^+$ یا ۰^-) را می‌توان ازطریق تعیین علامت، معین کرد.

مثال حاصل $\lim_{x \to ۴-} \frac{x+۳}{x^۲ - ۷x + ۱۲}$ را بیابید.

حل

$$\lim_{x \to ۴-} \frac{x+۳}{x^۲ - ۷x + ۱۲} = \frac{۷}{۰}$$

مخرج کسر را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲ - ۷x + ۱۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۳, x = ۴$$

x	$-\infty$		۳		$\to ۴$		$+\infty$
$x^۲ - ۷x + ۱۲$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\lim_{x \to ۴^-} \frac{x+۳}{x^۲ - ۷x + ۲} = \frac{۷}{۰^-} = -\infty$$

۴ـ۴۶ اگر حد یک تابع کسری گویا در $x = c$ به‌صورت زیر باشد

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ یا } -\infty$$

دراین‌صورت اگر $x = c$ ریشه‌ی صورت نباشد، ریشه‌ی مخرج با مرتبه‌ی زوج (مضاعف) است.

مثال اگر $\lim_{x \to ۲} \frac{-۲x+۱}{x^۲ + ax + b} = -\infty$، دراین‌صورت a و b را بیابید.

حل چون حد چپ و راست در $x = ۲$ برابر $-\infty$ است، پس $x = ۲$ باید ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد، درنتیجه مخرج کسر باید شامل عبارت $(x-۲)^۲$ باشد:

$$x^۲ + ax + b = (x-۲)^۲ \Longrightarrow x^۲ + ax + b = x^۲ - ۴x + ۴ \Longrightarrow a = -۴, b = ۴$$

۴ـ۴۷ اگر حد یک تابع کسری گویا در $x = c$ به‌صورت زیر باشد

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد}}{۰}$$

از حدّ راست و حدّ چپ تابع استفاده می‌شود.

مثال حدهای زیر را درصورت وجود بیابید.

۱) $\lim_{x \to ۳} \frac{۲x+۳}{(x-۳)^۲}$

۲) $\lim_{x \to ۰} \frac{۱}{[x]}$

۳) $\lim_{x \to ۰} \frac{[x]}{x}$

۴) $\lim_{x \to ۱} \frac{|x^۳ + x - ۲|}{x^۳ - x^۲ - x + ۱}$

حل

۱)

$$\lim_{x \to ۳^+} \frac{۲x+۳}{(x-۳)^۲} = \frac{۶+۳}{(۳^+ - ۳)^۲} = \frac{۹}{۰^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \to ۳^-} \frac{۲x+۳}{(x-۳)^۲} = \frac{۶+۳}{(۳^- - ۳)^۲} = \frac{۹}{۰^+} = +\infty$$

چون حد راست و چپ تابع f در $x = ۳$ به $+\infty$ میل می‌کند، تابع f در $x = ۳$ دارای حد $+\infty$ است.

۲) دامنه‌ی این تابع $D_f = R - [۰, ۱)$ است، پس تابع f در نقطه‌ی $x = ۰$ حد راست ندارد، چون مقادیری که در سمت راست عدد ۰ هستند جزء دامنه‌ی تابع نیستند، پس از سمت راست نمی‌توانیم به عدد ۰ نزدیک شویم. حالا حد چپ تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \to ۰^-} \frac{۱}{[x]} = \frac{۱}{[۰^-]} = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

پس تابع f در $x = ۰$ حد ندارد.

۳) دامنه‌ی این تابع به‌صورت $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$ است، پس داریم:

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{[x]}{x} = \frac{[۰^+]}{۰^+} = \frac{۰}{۰^+} = ۰, \lim_{x \to ۰^-} \frac{[x]}{x} = \frac{[۰^-]}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

پس تابع f در $x = ۰$ حد ندارد.

۴)

$$\lim_{x \to ۱} \frac{|x^۳ + x - ۲|}{x^۳ - x^۲ - x + ۱} = \frac{۰}{۰} \Longrightarrow \lim_{x \to ۱} \frac{|x - ۱||x^۲ + x + ۲|}{(x - ۱)^۲(x + ۱)} =$$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{|x - ۱||x^۲ + x + ۲|}{|x - ۱|^۲(x + ۱)} = \lim_{x \to ۱} \frac{|x^۲ + x + ۲|}{|x - ۱|(x + ۱)} = \frac{۴}{۰^+} = +\infty$$

توجه دارید که حد راست و حد چپ تابع f در $x = ۱$ به $+\infty$ میل می‌کند.

تست حد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۲}{x - |x|}$ در $x = ۰$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۰ ۴) حد ندارد

حل گزینه‌ی ۴. دامنه‌ی تابع f به‌صورت زیر است:

$$x - |x| = ۰ \Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow x \geqslant ۰ \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - [۰, +\infty) = (-\infty, ۰)$$

پس تابع f در $x = ۰$ حد راست ندارد، درنتیجه تابع f در $x = ۰$ حد هم ندارد.

۴۸ـ۴ اعمال روی حدود نامتناهی:

$$b > ۰ \Longrightarrow \begin{cases} (+\infty)(b) = +\infty \\ (-\infty)(b) = -\infty \end{cases} \qquad b < ۰ \Longrightarrow \begin{cases} (+\infty)(b) = -\infty \\ (-\infty)(b) = +\infty \end{cases}$$

$$b \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} (+\infty) + b = +\infty \\ (-\infty) + b = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \\ (+\infty) \times (-\infty) = -\infty \\ (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \end{cases}$$

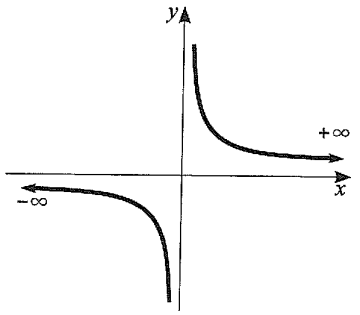
مثال حد تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{۱}{x-۱} - \frac{۲}{x+۲}$ وقتی $x \to ۱^+$ را بیابید.

حل

$$\lim_{x \to ۱^+} y = \frac{۱}{۱^+ - ۱} - \frac{۲}{۱+۲} = \frac{۱}{۰^+} - \frac{۲}{۳} = +\infty - \frac{۲}{۳} = +\infty$$

حد در بی‌نهایت

۴ـ۴۹ تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را درنظر بگیرید که نمودارش در زیر رسم شده است.



می‌خواهیم رفتار این تابع را در $+\infty$ و $-\infty$ بررسی کنیم.

۱) مطابق نمودار تابع f و جدول زیر وقتی که مقدار x زیاد و زیادتر می‌شود، و درنهایت از هر عدد حقیقی مثبت بزرگ‌تر می‌شود، مقدار y یا $f(x)$ از مقادیر مثبت به صفر نزدیک می‌شود، یعنی

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{۱}{+\infty} = ۰$$

x	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	$\cdots \to$	$+\infty$
$f(x)$	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	$\cdots \to$	۰

۲) مطابق نمودار تابع f و جدول زیر وقتی که مقدار x کم وکم‌تر می‌شود، و درنهایت از هر عدد حقیقی منفی کوچک‌تر می‌شود، مقدار y یا $f(x)$ از مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود، یعنی

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{۱}{-\infty} = ۰$$

x	$-\infty \leftarrow \cdots$	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰
$f(x)$	۰	$\leftarrow \cdots$ −۰/۰۰۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۱	−۰/۱

۴ـ۵۰ تعریف: اگر تابع f در بازه‌ی $(c, +\infty)$ تعریف‌شده باشد، می‌گوییم حد تابع f در $+\infty$ برابر عدد حقیقی L است و می‌نویسیم $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$، اگر بتوان به هر اندازه‌ی دلخواه $f(x)$ را به L نزدیک کرد، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب کنیم.

۴ـ۵۱ تعریف: اگر تابع f در بازه‌ی $(-\infty, c)$ تعریف‌شده باشد، می‌گوییم حد تابع f در $-\infty$ برابر عدد حقیقی L است و می‌نویسیم $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$، اگر بتوان به هر اندازه‌ی دلخواه، $f(x)$ را به L نزدیک کرد، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی کوچک (با مقادیر منفی) انتخاب کنیم.

۴ـ۵۲ اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰ \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$$

قضیه‌ی فوق می‌گوید اگر مخرج کسری بی‌کران، افزایش یا کاهش (منفی) یابد ولی صورت مقداری ثابت باشد، حد کسر صفر است.

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{x^۲}$ ۲) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{۵}{x^۳} - \frac{۲}{x}\right)$

حل

۱) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{x^۲} = \frac{۱}{+\infty} = ۰$$

۲) $$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{۵}{x^۳} - \frac{۲}{x}\right) = \frac{۵}{-\infty} - \frac{۲}{-\infty} = ۰ - ۰ = ۰$$

۴ـ۵۳ ممکن است با افزایش بی‌کران x مقدار تابع نیز بی‌کران افزایش یابد یا بی‌کران کاهش یابد. دراین‌صورت می‌گوییم حدّ تابع در بی‌نهایت، می‌شود بی‌نهایت.

مثال

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^۴ = (\pm\infty)^۴ = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x^۳ = (-\infty)^۳ = -\infty$$

۴ـ۵۴ حد یک تابع چندجمله‌ای در بی‌نهایت، برابر حد جمله‌ای است که بالاترین درجه را دارد.

$$\lim_{x\to\pm\infty} (ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + s) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n = a(\pm\infty)^n = \infty$$

مقصود از ∞ یکی از نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ است. درنتیجه: حد یک تابع چندجمله‌ای در بی‌نهایت، بی‌نهایت است.

مثال مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{x\to\pm\infty} (۲x^۳ - x^۲ + x - ۷)$.

حل روش اول:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (۲x^۳ - x^۲ + x - ۷) = \lim_{x\to\pm\infty} ۲x^۳ = ۲(\pm\infty)^۳ = \pm\infty$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (۲x^۳ - x^۲ + x - ۷) = \lim_{x\to\pm\infty} x^۳ \left(۲ - \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۲} - \frac{۷}{x^۳}\right)$$
$$= \pm\infty(۲ - ۰ + ۰ - ۰) = \pm\infty$$

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to-\infty} \left(x^۷ + \sqrt[۳]{x^۵ - ۱}\right)$ ۲) $\lim_{x\to-\infty} \left(x - \sqrt{x^۲ + ۱}\right)$

حل

۱)

$$\lim_{x\to-\infty} x^۷ = (-\infty)^۷ = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty}(x^۵-۱) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty}\sqrt[۳]{x^۵-۱} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^۷ + \sqrt[۳]{x^۵-۱}\right) = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

۲)

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty}(x^۲+۱) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^۲+۱} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{x^۲+۱}\right) = -\infty - (+\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

حدهایی که به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آیند

۴ـ۵۵ همان‌طور که از شکل $\frac{\infty}{\infty}$ معلوم است، در توابع کسری اتفاق می‌افتد. در بررسی توابع کسری که ما با آن سروکار داریم، حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم.

۴ـ۵۶ توابع کسری گویا: اگر صورت و مخرج کسر، چندجمله‌ای باشد، برای محاسبه‌ی حد این کسر وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، جمله‌ی شامل بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت را بر جمله‌ی شامل بزرگ‌ترین درجه‌ی مخرج تقسیم می‌کنیم و حد این خارج‌قسمت را حساب می‌کنیم.

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۳-۵x+۷}{x^۲-۳x^۳}$ ۲) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱+۲x^۲}{۱-x-x^۵}$ ۳) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+۵x^۴}{x^۲-x+۱}$

حل

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۳-۵x+۷}{x^۲-۳x^۳} = \frac{\infty}{\infty} \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۳}{-۳x^۳} = -\frac{۱}{۳}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱+۲x^۲}{۱-x-x^۵} = \frac{\infty}{\infty} \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲}{-x^۵} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲}{-x^۳} = \frac{۲}{-(\pm\infty)} = ۰$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+۵x^۴}{x^۲-x+۱} = \frac{\infty}{\infty} \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵x^۴}{x^۲} = \lim_{x\to\pm\infty}۵x^۲ = ۵(\pm\infty)^۲ = +\infty$$

۴ـ۵۷ از مثال‌های فوق نتایج زیر را می‌گیریم:

۱) وقتی درجه‌ی صورت و درجه‌ی مخرج کسر برابرند، حد کسر در $\pm\infty$ برابر با عددی حقیقی و مخالف صفر است.

۲) وقتی درجه‌ی صورت کسر از درجه‌ی مخرج کم‌تر است، حد کسر در $\pm\infty$ مساوی صفر است.

۳) وقتی درجه‌ی صورت کسر از درجه‌ی مخرج بیش‌تر است، حد کسر در $\pm\infty$ برابر بی‌نهایت است.

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-۱)^۳(۲x-۱)^۲}{(x+۱)^۲(۲x+۱)^۳}$ ۲) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^۲+۱)^۲-x^۴+x^۲}{۳x^۲+۱}$

حل

۱) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^۳-\cdots)(۴x^۲-\cdots)}{(x^۲+\cdots)(۸x^۳+\cdots)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۵}{۸x^۵}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

۲) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^۴+۲x^۲+۱)-x^۴+x^۲}{۳x^۲+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x^۲}{۳x^۲}=۱$$

مثال اگر حد $\frac{ax^۴+۱}{۲x^b+x^۲+۱}$ وقتی $x\to+\infty$ برابر ۲ باشد، a و b را بیابید.

حل

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۴+۱}{۲x^b+x^۲+۱}=۲$$

حد کسر در $+\infty$ برابر عدد حقیقی ۲ شده است، لذا باید درجه‌ی صورت و مخرج کسر برابر باشد، یعنی $b=۴$، پس

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۴}{۲x^۴}=۲\Longrightarrow\frac{a}{۲}=۲\Longrightarrow a=۴$$

۴ـ۵۸ توابع کسری شامل قدرمطلق: در این‌گونه توابع ابتدا وضعیت قدرمطلق را مشخص می‌کنیم (یعنی قدرمطلق را برمی‌داریم). بدین ترتیب اگر تابعی مانند $f(x)$ داخل قدرمطلق باشد ($|f(x)|$)، ابتدا حد $f(x)$ را وقتی $x\to\pm\infty$، حساب می‌کنیم. دو حالت اتفاق می‌افتد.

۱) اگر $f(x)\to+\infty$، آنگاه به‌جای $|f(x)|$ عبارت $f(x)$ را قرار می‌دهیم.

۲) اگر $f(x)\to-\infty$، آنگاه به‌جای $|f(x)|$ عبارت $-f(x)$ را قرار می‌دهیم.

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۳+|x|-۲}{|x^۳|-۲x+۱}$$

۲) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x+۵|-|۳x+۱|}{x+۲|x|}$$

حل

۱) $$x\to-\infty\Longrightarrow|\underbrace{x}_{-\infty}|=-x,|\underbrace{x^۳}_{-\infty}|=-x^۳$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۳-x-۲}{-x^۳-۲x+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۳}{-x^۳}=-۵$$

۲) $$x\to+\infty\Longrightarrow|\underbrace{x+۵}_{+\infty}|=x+۵,|\underbrace{۳x+۱}_{+\infty}|=۳x+۱,|\underbrace{x}_{+\infty}|=x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۵-(۳x+۱)}{x+۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۲x}{۳x}=\frac{-۲}{۳}$$

۴ـ۵۹ توابع کسری شامل جزء صحیح: قضیه‌ی فشردگی در بی‌نهایت نیز برقرار است، یعنی اگر $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=L$ و $h(x)<f(x)<g(x)$، آنگاه $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=L$.

مثال ثابت کنید $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{[x]}{x}=۱$.

حل می‌دانیم $x \leqslant [x] > x - ۱$. اگر طرفین را بر x تقسیم کنیم، داریم:

$$x > ۰ : \ x - ۱ < [x] \leqslant x \Longrightarrow \frac{x-۱}{x} < \frac{[x]}{x} \leqslant ۱$$

چون $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-۱}{x} = ۱$ و $\lim_{x\to+\infty} (۱) = ۱$ بنابر قضیه‌ی فشردگی: $\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = ۱$.

$$x < ۰ : \ x - ۱ < [x] \leqslant x \Longrightarrow ۱ < \frac{[x]}{x} \leqslant \frac{x-۱}{x}$$

چون $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-۱}{x} = ۱$ و $\lim_{x\to-\infty} (۱) = ۱$ بنابر قضیه‌ی فشردگی: $\lim_{x\to-\infty} \frac{[x]}{x} = ۱$.

نتیجه: برای هر تابع u که $u \to \pm\infty$ داریم:

$$\lim_{u\to\pm\infty} \frac{[u]}{u} = ۱$$

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to+\infty} \frac{[۳x]}{x}$ ۲) $\lim_{x\to-\infty} \frac{[۲x]-[-۶x]}{[x]+۳x}$

حل

۱) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{[۳x]}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳[۳x]}{۳x}, u = ۳x \Longrightarrow ۳\lim_{u\to+\infty} \frac{[u]}{u} = ۳ \times ۱ = ۳$$

۲) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{[۲x]-[-۶x]}{[x]+۳x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{[۲x]}{x} - \frac{[-۶x]}{x}\right)}{x\left(\frac{[x]}{x}+۳\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{۲[۲x]}{۲x}\right) - \left(\frac{-۶[-۶x]}{-۶x}\right)}{\frac{[x]}{x}+۳} = \frac{۲+۶}{۱+۳} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

تست حاصل $\lim_{x\to-\infty} \frac{[x]-[۲x]}{|x|}$ کدام است؟

۱) حد ندارد ۲) صفر ۳) ۱ ۴) -۱

حل گزینه‌ی ۳.

$$x \to -\infty \Longrightarrow |x| = -x, \lim_{x\to-\infty} \frac{[x]-[۲x]}{-x} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{[x]}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{[۲x]}{x}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{[x]}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{۲[۲x]}{۲x} = -۱ + ۲ = ۱$$

تست حاصل $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^۳-[x^۳]}{۴x^۳+۱}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) حد ندارد

حل گزینه‌ی ۱. طبق خواص جزء صحیح $۰ \leqslant x^۳ - [x^۳] < ۱$ و چون $x \to -\infty$، عبارت $۴x^۳ + ۱$ منفی است. بنابراین وقتی طرفین نامساوی را بر $(۴x^۳ + ۱)$ تقسیم کنیم، داریم:

$$۰ \leqslant x^۳ - [x^۳] < ۱ \Longrightarrow \frac{۱}{۴x^۳ + ۱} < \frac{x^۳ - [x^۳]}{۴x^۳ + ۱} \leqslant ۰$$

چون هر دو تابع طرفین برای $x \to -\infty$، برابر صفر است، پس

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^۳ - [x^۳]}{۴x^۳ + ۱} = ۰$$

تست حاصل $\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{۲x - ۱}{۲x - ۳}\right]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

حل گزینه‌ی ۱. ابتدا حد داخل جزء صحیح را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{۲x - ۱}{۲x - ۳} = ۱$$

حالا عبارت $۱ - \frac{۲x - ۱}{۲x - ۳}$ را تعیین علامت می‌کنیم تا ببینیم وقتی $x \to -\infty$ عبارت $\frac{۲x - ۱}{۲x - ۳}$ از مقادیر بیش از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود یا از مقادیر کم‌تر از ۱:

$$\frac{۲x - ۱}{۲x - ۳} - ۱ = \frac{۲}{۲x - ۳} \Longrightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \frac{۳}{۲} & & +\infty \\ \hline \frac{۲}{۲x-۳} & & - & \infty & + & \end{array}$$

پس وقتی $x \to -\infty$، عبارت $\left(\frac{۲x - ۱}{۲x - ۳} - ۱\right) < ۰$، پس عبارت $\frac{۲x - ۱}{۲x - ۳}$ از مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، لذا:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{۲x - ۱}{۲x - ۳}\right] = ۰$$

۴ـ۶۰ توابع رادیکالی:

۱) $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[m]{ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + s} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[m]{ax^n}$

۲) اگر $m > n$ باشد و $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty$ و $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[m]{x} = \pm\infty$ باشد، دراین‌صورت

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[n]{x}$$

مثال درستی هریک از تساوی‌های زیر را نشان دهید.

۱) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^۲ - ۳x + ۱} = \lim_{x \to -\infty} (-x)$

۲) $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[۳]{۵x^۳ - ۲x + ۱} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[۳]{۵x}$

۳) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[۳]{x} - \sqrt[۲]{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\sqrt[۲]{x}\right)$

۴) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{۵x + \sqrt{۲x + \sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{۵x}$

حل

۱) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^۲-۳x+۱}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^۲}=\lim_{x\to-\infty}|x|\overset{x<۰}{=}\lim_{x\to-\infty}(-x)$

۲) $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[۳]{۵x^۳-۲x+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[۳]{۵x^۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[۳]{۵}x$

۳) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۲]{x})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[۳]{x}+(-\sqrt[۲]{x}))=\lim_{x\to+\infty}(-\sqrt[۲]{x})$

۴) حد $\sqrt{۲x+\sqrt{x}}$ برابر حد $\sqrt{۲x}$ است (چون درجه‌ی x در $۲x$، یک است ولی در $\sqrt{x}$، $\frac{۱}{۲}$ است)، پس

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۵x+\sqrt{۲x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۵x+\sqrt{۲x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۵x}$$

مثال حاصل هریک از حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-۲x}}$

۲) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x+\sqrt{x+۱}}{۶x+\sqrt{۴x^۲-۱}}$

۳) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۲x+\sqrt{۳x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+۱}}$

۴) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۴x-۱}}{۲\sqrt{x-۱}-\sqrt{۹x-۱}}$

حل

۱) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-۲x}}=\frac{\infty}{\infty}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-۲x}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x+\sqrt{x+۱}}{۶x+\sqrt{۴x^۲-۱}}=\frac{\infty}{\infty}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x}{۶x+|۲x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x}{۶x+۲x}=\frac{-۳}{۸}$

۳) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۲x+\sqrt{۳x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+۱}}=\frac{\infty}{\infty}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۲x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{۲x}{x}}=\sqrt{۲}$

۴) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۴x-۱}}{۲\sqrt{x-۱}-\sqrt{۹x-۱}}=\frac{\infty}{\infty}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}-۳\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳\sqrt{x}}{-\sqrt{x}}=-۳$

۴ـ۶۱ روابط زیر را به‌خاطر بسپارید:

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$
$$۲+۴+۶+\cdots+۲n=n(n+۱)$$
$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$
$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$
$$۱^۲+۳^۲+۵^۲+\cdots+(۲n-۱)^۲=\frac{n(۲n-۱)(۲n+۱)}{۳}$$

مثال حاصل هریک از حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{n\to\infty}\frac{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}{۱+۲+۳+\cdots+n}$

۲) $\lim_{n\to\infty}\frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲}{C_n^۳}$

حل

$$\text{۱)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}{۱+۲+۳+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{\frac{n(n+۱)}{۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲n^۲}{n^۲}=۲$$

$$\text{۲)}\quad C_n^۳=\frac{n!}{۳!(n-۳)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{۶(n-۳)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲}{c_n^۳}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}}{\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲n^۳}{n^۳}=۲$$

۶۲ـ۴ اگر صورت یا مخرج کسر به‌صورت مجموع جملات یک تصاعد حسابی یا هندسی باشد، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱) مجموع n جمله‌ی اول در تصاعد هندسی

$$S_n=\frac{a(r^n-۱)}{r-۱}\quad,\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{۱-r}\quad,\quad |r|<۱$$

۲) مجموع n جمله‌ی اول در تصاعد حسابی

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

مثال حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}}{۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\cdots+\frac{۱}{۳^n}}$ را بیابید.

حل

$$r=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}\right)=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲$$

$$r=\frac{۱}{۳}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۳^n}\right)=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

درنتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}}{۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۳^n}}=\frac{۲}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴}{۳}$$

۶۳ـ۴ توابع کسری مثلثاتی: توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ و $y=\tan x$ و $y=\cot x$ در بی‌نهایت حد ندارند، اما:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=۰,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos x}{x}=۰$$

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{۲x+۱}$

۲) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x+\sin x}{|۲x|-\cos x}$

حل

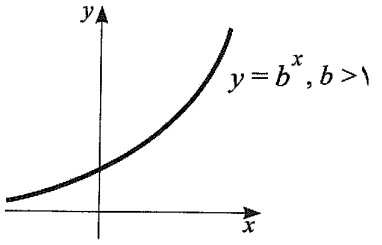
$$\text{۱)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{۲x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(۱-\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(۲+\frac{۱}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-\frac{\cos x}{x}}{۲+\frac{۱}{x}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\text{۲)}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{۵x+\sin x}{|۲x|-\cos x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x+\sin x}{-۲x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(۵+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(-۲-\frac{\cos x}{x}\right)}=\frac{-۵}{۲}$$

۶۴ـ۴ قضایای زیر در تعیین حد توابع نمایی و لگاریتمی مفیدند.

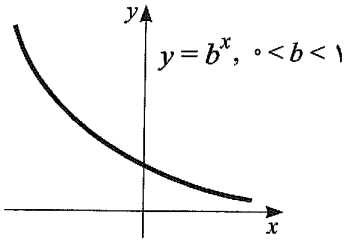
۱) $\lim_{x\to+\infty} b^x=+\infty$

۲) $\lim_{x\to-\infty} b^x=۰$



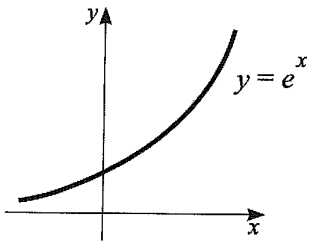
۳) $\lim_{x\to+\infty} b^x=۰$

۴) $\lim_{x\to-\infty} b^x=+\infty$



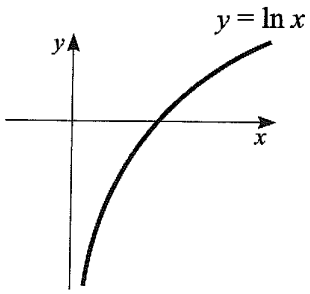
۵) $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

۶) $\lim_{x\to-\infty} e^x=۰$



۷) $\lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

۸) $\lim_{x\to۰^+} \ln x=-\infty$



مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to۰^-}\frac{۳+x}{۲+۲^{\frac{۱}{x}}}$

۲) $\lim_{x\to۰^+}\frac{۱+x}{۴+۳^{\frac{۱}{x}}}$

حل

۱) $x \to 0^- \Longrightarrow \frac{1}{0^-} = -\infty \Longrightarrow 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3+x}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{3}{2+0} = \frac{3}{2}$$

۲) $x \to 0^+ \Longrightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow 3^{+\infty} = +\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1+x}{4+3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{4+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

تست اگر $|f(x)+7| < \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1}$، آنگاه $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) -7 ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $-\frac{1}{7}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1} < f(x)+7 < \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1} \Longrightarrow -\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1} - 7 < f(x) < \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1} - 7$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1} - 7 \right) = -\frac{3^0}{\infty} - 7 = 0 - 7 = -7$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1} - 7 \right) = \frac{3^0}{\infty} - 7 = 0 - 7 = -7$$

بنابر قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -7$.

۴ـ۶۵ نکات مهم:

۱) اگر n یک عدد طبیعی ثابت باشد، آنگاه

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

اصطلاحاً می‌گوییم تابع e^x از هر تابع توانی سریعتر به بی‌نهایت میل می‌کند.

۲) اگر n یک عدد طبیعی ثابت باشد، آنگاه

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

اصطلاحاً می‌گوییم تابع $\ln x$ کندتر از توابع x^n و $\sqrt[n]{x}$ به بی‌نهایت میل می‌کند.

مثال حاصل $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^3}$ را بیابید.

حل سرعت رشد $x^{۳}$ از ۲^{x} کندتر است، لذا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲^{x}}{x^{۳}}=+\infty$$

۴ـ۶۶ توابع کسری نمایی:

۱) اگر $x\to+\infty$، پایه‌ی بزرگ‌تر را انتخاب می‌کنیم.

۲) اگر $x\to-\infty$، پایه‌ی کوچک‌تر را انتخاب می‌کنیم.

مثال حدهای زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۵^{x+۱}+۳^{x-۱}}{۵^{x-۱}-۲^{x}}\qquad ۲)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{۲^{x+۱}+۳^{x-۱}}{۲^{x}-۳^{x}}$$

حل

۱)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۵^{x+۱}}{۵^{x-۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵^{x}\times ۵}{۵^{x}\times ۵^{-۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵}{۵^{-۱}}=۲۵$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۵^{x}\left(۵+\left(\frac{۳}{۵}\right)^{x}\times ۳^{-۱}\right)}{۵^{x}\left(۵^{-۱}-\left(\frac{۲}{۵}\right)^{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵+\left(\frac{۳}{۵}\right)^{x}\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۵}-\left(\frac{۲}{۵}\right)^{x}}=\frac{۵+۰}{\frac{۱}{۵}-۰}=۲۵$$

۲)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲^{x+۱}}{۲^{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲^{x}\times ۲}{۲^{x}}=۲$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲^{x}\left(۲+\left(\frac{۳}{۲}\right)^{x}\times ۳^{-۱}\right)}{۲^{x}\left(۱-\left(\frac{۳}{۲}\right)^{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲+\left(\frac{۳}{۲}\right)^{x}\times\frac{۱}{۳}}{۱-\left(\frac{۳}{۲}\right)^{x}}=\frac{۲+۰}{۱-۰}=۲$$

صورت‌های مبهم[۱]

۴ـ۶۷ عباراتی که به‌صورت $\frac{۰}{۰}$، $\frac{\infty}{\infty}$، ۱^{∞}، $۰^{۰}$، $\infty^{۰}$ و $\infty-\infty$ هستند مبهمند. منظور از رفع ابهام این‌گونه عبارات، پیدا کردن مقدار واقعی آن‌هاست. برای این منظور حالات زیر را درنظر می‌گیریم.

۴ـ۶۸ نوع $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$: اگر کسری به‌صورت $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ داشته باشیم که مقدار آن در $x=c$ به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشد و ضمناً حد $\frac{f(x)}{g(x)}$ وجود داشته باشد، دراین‌صورت داریم:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۱. دانشجویان می‌توانند این مبحث را پس از مطالعه‌ی قواعد مشتق‌گیری، مطالعه کنند.

روش فوق قاعده‌ی هوپیتال (H) است، بدین معنی که از صورت و مخرج کسر مشتق می‌گیریم و سپس به‌جای x مقدار c را می‌گذاریم و مقدار واقعی آن را به‌دست می‌آوریم. این قاعده برای مقادیر محدود و نامحدود c برقرار است. قاعده‌ی هوپیتال به‌طور متوالی به‌کار می‌رود و اولین صورت معین جواب صحیح است. [۱]

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{۷+\sqrt{x}}-۳}$

۲) $\lim_{x\to ۲} \frac{۳^{x-۲}-۱}{x^۲-۲x}$

۳) $\lim_{x\to ۰+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin x)}$

۴) $\lim_{x\to ۰} \frac{e^{ax}-e^{-۲ax}}{\ln(۱+x)}$

حل

۱) $$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{۷+\sqrt{x}}-۳} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۴} \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۷+\sqrt{x}}}} = \frac{۲۴}{۴} = ۶$$

۲) $$\lim_{x\to ۲} \frac{۳^{x-۲}-۱}{x^۲-۲x} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۲} \frac{۱\times ۳^{x-۲}\times \ln ۳}{۲x-۲} = \frac{\ln ۳}{۲}$$

۳) $$\lim_{x\to ۰+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin x)} = \frac{\infty}{\infty}, x\to ۰^+ \Longrightarrow \sin ax \sim ax, \sin x \sim x$$

$$\lim_{x\to ۰+} \frac{\ln ax}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۰+} \frac{\frac{a}{ax}}{\frac{۱}{x}} = \frac{ax}{ax} = ۱$$

۴) $$\lim_{x\to ۰} \frac{e^{ax}-e^{-۲ax}}{\ln(۱+x)} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۰} \frac{ae^{ax}+۲ae^{-۲ax}}{\frac{۱}{۱+x}} = \frac{a+۲a}{۱} = ۳a$$

تست حاصل $\lim_{x\to ۱} \frac{x+x^۲+x^۳+\cdots+x^n-n}{\sqrt{x}-۱}$ کدام است؟

۱) $n+۱$ ۲) n ۳) $n(n+۱)$ ۴) $n^۲$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x+x^۲+\cdots+x^n-n}{\sqrt{x}-۱} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۱} \frac{۱+۲x+۳x^۲+\cdots+nx^{n-۱}}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = n(n+۱)$$

تست اگر حد $\frac{x^۳+۲ax^۲-x-۲a}{ax^۲+x(۱-a)-۱}$ وقتی $x\to ۱$ برابر ۱ باشد، a چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

---

۱. در رفع ابهام از حالت $\frac{۰}{۰}$ می‌توان از قاعده‌ی هوپیتال و هم‌ارزی توأماً استفاده کرد و در جایگزینی هم‌ارز توابع بایستی توجه داشت که صورت و یا مخرج کسر برابر صفر نشود.

حل گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+۲ax^۲-x-۲a}{ax^۲+x(۱-a)-۱}=۱\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^۲+۴ax-۱}{۲ax+(۱-a)}=۱\Longrightarrow\frac{۳+۴a-۱}{۲a+۱-a}=۱$$

$$\Longrightarrow a+۱=۲+۴a\Longrightarrow a=\frac{-۱}{۳}$$

تست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{۱-x^۳} & x\neq ۱\\ a & x=۱\end{cases}$ تعریف‌شده است. به‌ازای کدام مقدار a مقدار تابع با حد تابع در $x=۱$ برابر است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$f(۱)=a\ ,\ \lim_{x\to ۱}\frac{\ln x}{۱-x^۳}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{x}}{-۳x^۲}=\frac{-۱}{۳}\Longrightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

۴ـ۶۹ نوع $۰\times\infty$: اگر $\lim_{x\to c}f(x)=۰$ و $\lim_{x\to c}g(x)=\pm\infty$ باشد، دراین‌صورت حد عبارت $f(x)\times g(x)$ به‌صورت $(\pm\infty)\times ۰$ مبهم است، زیرا می‌توان آن را به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ به شکل زیر درآورد.

$$\lim_{x\to c}f(x).g(x)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\frac{۱}{g(x)}}=\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{\frac{۱}{f(x)}}$$

مثال حدهای زیر را بیابید.

۲) $\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{۱}{x}}-۱)$ ۳) $\lim_{x\to ۱}(۱-x)\tan\frac{\pi x}{۲}$

حل

۱)

$$\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{۱}{x}}-۱\right)=\infty\times ۰,\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{۱}{x}}-۱}{\frac{۱}{x}}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{۱}{x^۲}e^{\frac{۱}{x}}}{-\frac{۱}{x^۲}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{۱}{x}}=e^{۰}=۱$$

۲)

$$\lim_{x\to ۱}(۱-x)\tan\frac{\pi x}{۲}=۰\times\infty,\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x}{\cot\frac{\pi x}{۲}}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{-\frac{\pi}{۲}\left(۱+\cot^۲\frac{\pi x}{۲}\right)}=\frac{۱}{\frac{\pi}{۲}(۱+۰)}=\frac{۲}{\pi}$$

۴ـ۷۰ گاهی برای رفع ابهام $۰\times\infty$ در توابع رادیکالی از اتحادهای مزدوج، چاق و لاغر و تعمیم آن‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال حاصل $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{x+۲}{x-۱}}-۱\right)$ را بیابید.

حل

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+۲}{x-۱}}-۱\right)=\infty\times ۰$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+۲}{x-۱}}-۱\right)\times\frac{\left(\sqrt{\frac{x+۲}{x-۱}}+۱\right)}{\left(\sqrt{\frac{x+۲}{x-۱}}+۱\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{x+۲}{x-۱}-۱\right)}{\sqrt{\frac{x+۲}{x-۱}}+۱}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{x+۲-x+۱}{x-۱}\right)}{\sqrt{\frac{x+۲}{x-۱}}+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۳x}{x-۱}}{\sqrt{\frac{x+۲}{x-۱}}+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۳x}{x}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+۱}=\frac{۳}{۱+۱}=\frac{۳}{۲}$$

۴ـ۷۱ نوع $\infty-\infty$: اگر $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to c} g(x)=+\infty$، دراین‌صورت حد عبارت $f(x)-g(x)$ به‌صورت $\infty-\infty$ و مبهم است.

۱) اگر $f(x)$ و $g(x)$ کسری باشند، معمولاً با مخرج‌مشترک‌گیری به $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌شوند.

۲) اگر $f(x)$ و $g(x)$ اصم باشند، با گویا کردن یا استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها قابل‌حل هستند.

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}\right)$ ۲) $\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{e^x-۱}\right)$ ۳) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^۲+۲x}-x\right)$

حل

۱)

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲-۴}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۴}$$

۲)

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{e^x-۱}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱-x}{x(e^x-۱)}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱}{e^x-۱+xe^x}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{۱}{۲}$$

۳) روش اول: گویا کردن

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^۲+۲x}-x\right)=\infty-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^۲+۲x}-x\right)\times\left(\frac{\sqrt{x^۲+۲x}+x}{\sqrt{x^۲+۲x}+x}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲+۲x-x^۲}{\sqrt{x^۲+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{|x|+x}=\frac{۲x}{x+x}=\frac{۲x}{۲x}=۱$$

روش دوم: هم‌ارزی

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^۲+۲x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{۱}\left(x+\frac{۲}{۲\times ۱}\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+۱-x)=۱$$

تست اگر $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲-x+۱}-ax+b)=۰$، آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲-x+۱}-ax+b)=۰\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{۱}\left(x+\frac{-۱}{۲}\right)-ax+b\right]=۰\Longrightarrow$$

$$x-\frac{۱}{۲}-ax+b=۰\Longrightarrow(۱-a)x+b-\frac{۱}{۲}=۰\Longrightarrow\begin{cases}۱-a=۰\Longrightarrow a=۱\\ b-\frac{۱}{۲}=۰\Longrightarrow b=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Longrightarrow a+b=\frac{۳}{۲}$$

تست اگر حد تابع $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x-۱}-ax-b$ وقتی $x\to\pm\infty$ برابر ۰ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۲−

حل گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^۲+۱}{x-۱}-ax-b\right)=۰\Longrightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(۱-a)x^۲+(a-b)x+b+۱}{x-۱}=۰$$

چون حد کسر در بی‌نهایت صفر شده است، باید درجه‌ی صورت کسر از درجه‌ی مخرج کسر کم‌تر باشد، پس $۱-a=۰$ یا $a=۱$ و $-b+۱=۰$ یا $b=۱$، درنتیجه $a+b=۲$.

۴ـ۷۲ نوع ۱^∞ یا $\infty^۰$ یا $۰^۰$: حالت $\lim_{x\to c}f(x)^{g(x)}$ ممکن است به‌صورت‌های ۱^∞ یا $\infty^۰$ یا $۰^۰$ درآید، که می‌توان آن را به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ به‌شکل زیر درآورد[۱].

$$\lim_{x\to c}f(x)^{g(x)}=\exp\lim_{x\to c}\left(\frac{\ln f(x)}{\frac{۱}{g(x)}}\right)=\exp\lim_{x\to c}\left(\frac{\ln g(x)}{\frac{۱}{f(x)}}\right)$$

اگر حد یکی از مقادیر بالا برابر m باشد، حد تابع برابر e^m است.

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to۰}(۱-۲x)^{\frac{۳}{x}}$ ۲) $\lim_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{۱}{x^۲}\right)^x$

حل

۱)

$$\lim_{x\to۰}(۱-۲x)^{\frac{۳}{x}}=۱^\infty,\lim_{x\to۰}\frac{\ln(۱-۲x)}{\frac{x}{۳}}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{\frac{-۲}{۱-۲x}}{\frac{۱}{۳}}=-۶\Longrightarrow\lim_{x\to۰}(۱-۲x)^{\frac{۳}{x}}=e^{-۶}$$

---

۱. $\exp f(x)$ به مفهوم $e^{f(x)}$ است.

۲)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = 1^\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \overset{H}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{-2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2x^4}{x^5+x^3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^5+x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1$$

۴ـ۷۳ چند نکته:

۱) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{ax} = e^{ab}$	۲) $\lim_{x\to 0}(1+bx)^{\frac{a}{x}} = e^{ab}$
۳) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{k}{ax+b})^{mx+n} = e^{\frac{k}{a}\times m}$	۴) $\lim_{x\to\infty}(1+(ax+b))^{\frac{k}{mx+n}} = e^{a\times\frac{k}{m}}$

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

۲) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}$

۳) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

۴) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{2x}$

حل

۱) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = 1^\infty,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = e^{1\times 3} = e^3$

۲) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2x}} = 1^\circ,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2x}} = e^{1\times\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

۳) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = 1^\infty,\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$
$= e^{-\frac{2}{1}\times 1} = e^{-2}$

۴) $= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{2x} = 1^\infty,\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+6}{2x-1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{2x-1}\right)^{2x}$
$= e^{\frac{6}{2}\times 2} = e^6$

تست اگر $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$، آنگاه c کدام است؟

۱) $2\ln 2$ ۲) 1 ۳) $\ln 2$ ۴) -1

حل گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-c+2c}{x-c}\right)^x = 4 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^x = 4$$

$$e^{\frac{2c}{1}\times 1} = 4 \Longrightarrow 2c = \ln 4 \Longrightarrow 2c = 2\ln 2 \Longrightarrow c = \ln 2$$

۴ـ۷۴ قاعده‌ی اویلر: درحالت کلی رابطه‌ی اویلر در مواردی استفاده می‌گردد که حد تابع پس‌از جاگذاری اعداد به یکی از حالت‌های 0°، ∞° و 1^∞ باشد. دراین‌صورت از رابطه‌ی اویلر استفاده می‌کنیم:

$$\text{قاعده‌ی اویلر} = e^{\lim_{x\to c}(\text{توان})(\text{پایه}-1)}$$

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{2}{x}}$

۲) $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+2}{2x+1})^{x+1}$

حل

۱)

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{2}{x}} = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to 0}(\text{توان})(\text{پایه}-1) = \lim_{x\to 0}(\frac{2}{x})(1-\sin x-1) = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x}{x} = -2$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{2}{x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

۲)

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+2}{2x+1})^{x+1} = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(\text{توان})(\text{پایه}-1) = \lim_{x\to\infty}(x+1)(\frac{2x+2}{2x+1}-1) = \lim_{x\to\infty}(x+1)\times\frac{1}{2x+1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+2}{2x+1})^{x+1} = e^{\frac{1}{2}}$$

تست حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}$ کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) e^2 ۴) $\frac{1}{e^2}$

حل گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x} = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\text{توان})(\text{پایه}-1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)(1+\cos x-1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x = 1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x} = e$$

بررسی عدم وجود حد

۴ـ۷۵ در موارد زیر تابع f در نقطه‌ی $x=c$ حد ندارد.

الف) اگر $x\to c$، اما مقادیر کم‌تر از c یا بیش از c جزء دامنه‌ی تابع نباشد.

ب) اگر تابع f در c دارای حد راست یا حد چپ نباشد.

پ) اگر تابع f در c دارای حد راست و چپ باشد، ولی حد راست و چپ f در c برابر نباشند.
ت) اگر حد تابع مقدار مشخص و معلومی نشود.
ث) اگر مخرج کسر به‌ازای $x \to c$، صفر مطلق گردد ($x \to c$ متعلق به دامنه نباشد).

مثال (مورد الف) تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ در $x = 1$ حد ندارد، زیرا در همسایگی چپ $x = 1$ تعریف نشده است.

مثال (مورد ب) تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ حد ندارد، زیرا در $x = 0$ حد چپ ندارد.

مثال (مورد پ) تابع $f(x) = [x]$ در $x = 2$ حد ندارد، زیرا

$$\lim_{x \to 2^-} [x] = [2^-] = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 2^+} [x] = [2^+] = 2$$

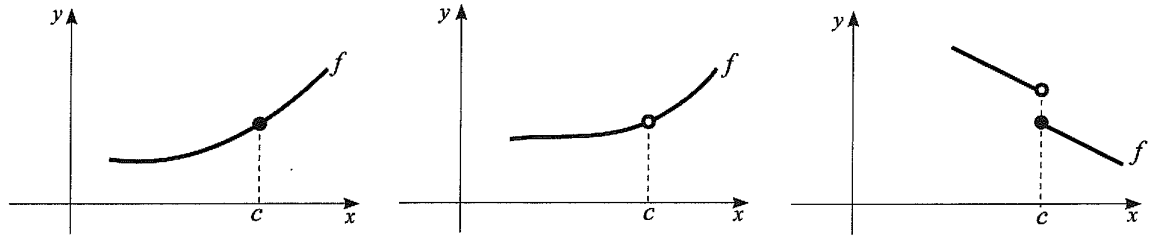
مثال (مورد ت) تابع $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد، زیرا کسینوس هر زاویه‌ی بین -1 و 1 است ولی $\cos(\infty)$ نامشخص است.

مثال (مورد ث) تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$ در $x = \frac{1}{2}$ حد ندارد، زیرا

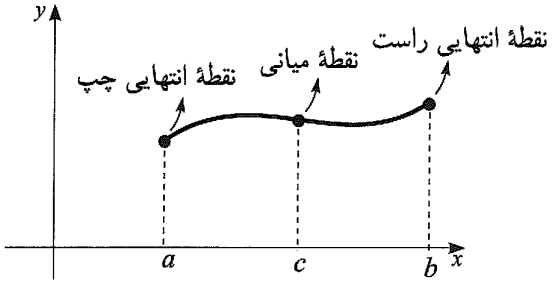
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x}{[x]} = \frac{\frac{1}{2}}{[\frac{1}{2}]} = \frac{\frac{1}{2}}{0^+ \text{(مطلق)}} = \text{وجود ندارد}$$

پیوستگی تابع در یک نقطه

۴ـ۷۶ به‌طور شهودی تابع f در نقطه‌ی c پیوسته است، اگر نمودار f در c بریدگی یا پرش نداشته باشد.



۴ـ۷۷ در عمل دامنه‌ی تعریف اغلب توابع یک‌متغیره‌ی حقیقی به‌صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها است و ما مطالعه‌ی توابع پیوسته را به توابعی با این دامنه‌ها محدود می‌کنیم. فقط سه نوع نقطه را درنظر می‌گیریم: نقاط درونی (نقاطی که در یک بازه‌ی باز دامنه قرار دارند)، نقطه‌ی انتهایی چپ و نقطه‌ی انتهایی راست.



۴ـ۷۸ تعریف: اگر تابع در بازه‌ی (a,b) شامل c یعنی در یک همسایگی c تعریف شده باشد، می‌گوییم f در نقطه‌ی c پیوسته است، اگر

۱) f در c تعریف شده باشد، یعنی $f(c)$ موجود باشد.

۲) f در c دارای حد باشد، یعنی $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود باشد.

۳) حد f در c برابر مقدار تابع در c باشد، یعنی $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ باشد.

مثال تابع $f(x) = x^۳$ در نقطه‌ی $x = ۱$ پیوسته است، زیرا

$$\lim_{x\to ۱} x^۳ = ۱^۳ = ۱ \quad , \quad f(۱) = ۱^۳ = ۱$$

به‌طوری‌که دیده می‌شود، $\lim_{x\to ۱} f(x) = f(۱) = ۱$.

۴ـ۷۹ اگر حداقل یکی از سه شرط تعریف (۴ـ۷۸) برقرار نباشد، می‌گوییم f در $x = c$ ناپیوسته است. c را یک نقطه‌ی ناپیوستگی f می‌نامیم. بنابراین عدم پیوستگی تابع در یک نقطه عبارت است از:

۱) نقطه در دامنه‌ی تابع نباشد، مانند تابع $f(x) = \frac{۱}{x+۲}$ در نقطه‌ی $x = -۲$.

۲) تابع در نقطه دارای حد نباشد، مانند تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geqslant ۰ \\ ۲ & x < ۰ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = ۰$.

۳) تابع در آن نقطه تعریف شده باشد، هم‌چنین در آن نقطه دارای حد باشد، ولی مقدار حد تابع برابر مقدار تابع در آن نقطه نباشد، مانند تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \neq ۱ \\ -۲ & x = ۱ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = ۱$، زیرا:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۱^۲ = ۱ \quad , \quad f(۱) = -۲$$

چون $\lim_{x\to ۱} f(x) \neq f(۱)$، پس f در $x = ۱$ پیوسته نیست.

۴ـ۸۰ در تعریف (۴ـ۷۸) تنها شرط (۳) برای پیوستگی تابع f در c کافی است، زیرا حد تابع برابر مقدار تابع در c است. یعنی تابع f در یک نقطه‌ی درونی چون $x = c$ از دامنه‌اش پیوسته است، اگر

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = f(c)}$$

مثال اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ - ۹}{x^۳ - ۲۷} & x \neq ۳ \\ \frac{۲m}{۸m+۱} & x = ۳ \end{cases}$ در $x = ۳$ پیوسته باشد، مقدار m را بیابید.

حل

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = \lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{x^۳ - ۲۷} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۳} \frac{۲x}{۳x^۲} = \lim_{x\to ۳} \frac{۲}{۳x} = \frac{۲}{۹}, f(۳) = \frac{۲m}{۸m+۱}$$

f در $x = ۳$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = f(۳) \Longrightarrow \frac{۲}{۹} = \frac{۲m}{۸m+۱} \Longrightarrow ۸m + ۱ = ۹m \Longrightarrow m = ۱$$

تست به‌ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x(x+۱)}-\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ a & x=۰\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{x(x+۱)}-\frac{۱}{x}\right)=\infty-\infty,\ \lim_{x\to ۰}\frac{۱-(x+۱)}{x(x+۱)}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-x}{x(x+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۱}{x+۱}=-۱\ ,\ \ f(۰)=a$$

f در $x=۰$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=f(۰)\Longrightarrow a=-۱$$

۴ـ۸۱ می‌گوییم f در نقطه‌ی $x=c$ پیوسته است، اگر:

$$f(c)=\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c^-} f(x)$$

مثال a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}a[x]+b[-x] & x<۲\\ ۲a & x=۲\\ \left[\frac{x}{۲}\right]-۲b & x>۲\end{cases}$$

حل توجه کنید که $f(۲)=۲a$ و:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\left(\left[\frac{x}{۲}\right]-۲b\right)=۱-۲b$$
$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(a[x]+b[-x])=a-۲b$$

پس برای پیوستگی f در نقطه‌ی $x=۲$ باید:

$$۲a=۱-۲b=a-۲b\Longrightarrow b=\frac{-۱}{۲}, a=۱$$

مثال آیا می‌توان مقدار a را طوری پیدا کرد که تابع زیر در نقطه‌ی $x=\frac{۳}{۲}$ پیوسته باشد؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|۲x-۳|}{۲x-۳} & x\neq\frac{۳}{۲}\\ a & x=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

حل

$$\lim_{x\to\frac{۳}{۲}+} f(x)=\lim_{x\to\frac{۳}{۲}+}\frac{۲x-۳}{۲x-۳}=۱ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\frac{۳}{۲}-} f(x)=\lim_{x\to\frac{۳}{۲}-}\frac{-(۲x-۳)}{۲x-۳}=-۱$$

پس تابع f در نقطه‌ی $\frac{۳}{۲}$ حد ندارد و بنابراین مقداری از a وجود ندارد که به‌ازای آن f در نقطه‌ی $\frac{۳}{۲}$ پیوسته باشد.

تست تابع $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{۱}{x}}+a & x<۰ \\ ۳ & x=۰ \\ [x]+b[-x] & x>۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته است، ab کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۹ ۴) -۹

حل گزینه‌ی ۴.

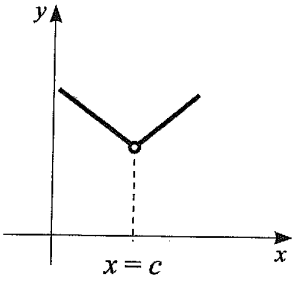
$$f(۰)=۳,\ \lim_{x\to۰+}([x]+b[-x])=-b,\ \lim_{x\to۰-}(e^{\frac{۱}{x}}+a)=a$$

برای پیوستگی f در نقطه‌ی $x=۰$ باید:

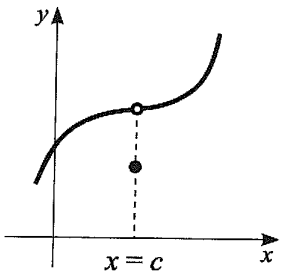
$$۳=-b=a \Longrightarrow a=۳, b=-۳ \Longrightarrow a.b=-۹$$

ناپیوستگی رفع‌شدنی

۴ـ۸۲ اگر تابع f در یک نقطه دارای حد باشد، ولی تابع در آن نقطه تعریف نشده باشد (شکل ۱) یا مقدار تابع در آن نقطه برابر مقدار حد نباشد (شکل ۲)، ناپیوستگی تابع رفع‌شدنی است.



(شکل ۱)



(شکل ۲)

۴ـ۸۳ دراین‌صورت کافی است مقدار تابع در نقطه‌ی موردنظر را برابر مقدار حد تابع در آن نقطه تعریف کنیم تا تابع در آن نقطه پیوسته شود.

مثال تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در نقطه‌ی $x=۰$ ناپیوستگی رفع‌شدنی دارد، زیرا:

$$\lim_{x\to۰} f(x)=\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{x}{x}=۱$$

ولی $f(۰)$ تعریف نشده است، پس تابع را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

که در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته است.

مثال تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x}$ مفروض است. $f(x)$ را چنان انتخاب کنید که تابع f در $x=۰$ پیوسته باشد.

حل باید $f(۰)=\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$، پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۸)^{۲}}}=\frac{۱}{۱۲}\Longrightarrow f(۰)=\frac{۱}{۱۲}$$

تست شرط پیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲^{-\frac{۱}{x^{۲}}}$ بر $\mathbb{R}$ وجود کدام مقدار برای $f(۰)$ است؟

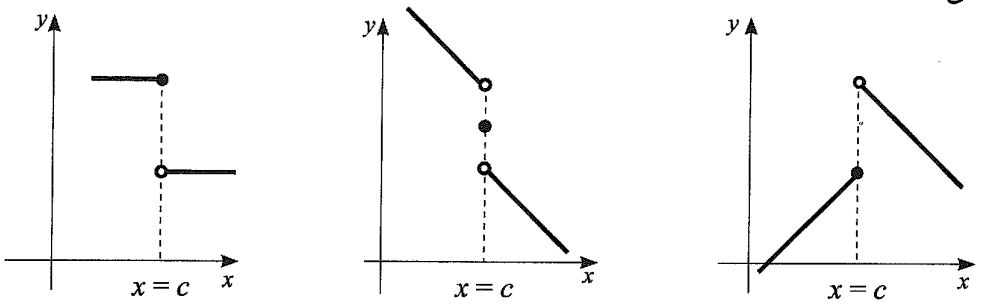
۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۱. چون تابع f در $x=۰$ تعریف نشده است، باید حد تابع را در صفر تعیین کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}۲^{-\frac{۱}{x^{۲}}}=۲^{-\infty}=\frac{۱}{۲^{+\infty}}=\frac{۱}{+\infty}=۰\Longrightarrow f(۰)=۰$$

ناپیوستگی رفع‌نشدنی (جهشی)

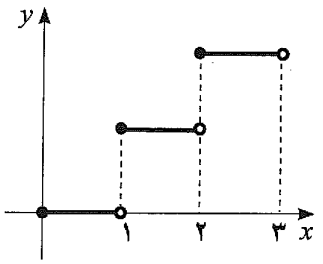
۸۴ـ۴ اگر تابع f در یک نقطه تعریف شده باشد، ولی حد چپ و راست تابع f در آن نقطه برابر نباشند، ناپیوستگی رفع‌نشدنی یا جهشی است.



مثال تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۳}+۲ & x\geqslant ۰\\ x+۱ & x<۰\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ ناپیوستگی رفع‌نشدنی دارد، زیرا

$$f(۰)=۲\ ,\ \lim_{x\to ۰^{+}}f(x)=۰+۲=۲\ ,\ \lim_{x\to ۰^{-}}f(x)=۰+۱=۱$$

۸۵ـ۴ نکته: تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته (از نوع رفع‌نشدنی) است و در نقاط ناصحیح پیوسته است.

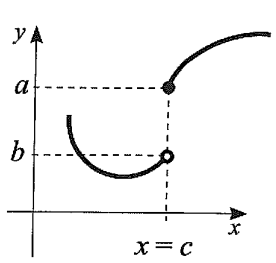


پیوستگی چپ و پیوستگی راست

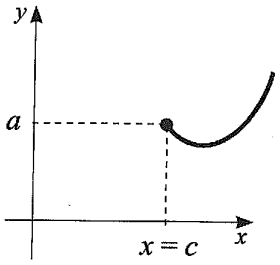
۴ـ۸۶ تابع f در نقطه‌ی c از راست پیوسته است، اگر و تنها اگر f در c دارای حد راست باشد و حد راست تابع برابر مقدار تابع در نقطه‌ی c باشد، یعنی

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

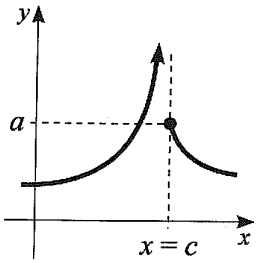
به عبارت دیگر تابع f در $x=c$ پیوستگی راست دارد هرگاه f از سمت راست به c وصل شود.



$\lim_{x\to c^+} f(x) = a$
$\lim_{x\to c^-} f(x) = b$
$f(c) = a$



$\lim_{x\to c^+} f(x) = a$
$\lim_{x\to c^-} f(x) =$ وجود ندارد
$f(c) = a$



$\lim_{x\to c^+} f(x) = a$
$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$
$f(c) = a$

مثال نشان دهید تابع $f(x) = [۲x]$ در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد.

حل

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} [۲x] = [۲^+] = ۲, f(۱) = [۲] = ۲$$

چون $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱) = ۲$، پس تابع f در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد.

مثال تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x < ۱ \\ ۲x & x > ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ چه مقدار تعریف شود تا در این نقطه از راست پیوسته باشد؟

حل

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱) \Longrightarrow ۲(۱) = f(۱) \Longrightarrow f(۱) = ۲$$

تست اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} [x] + a[-x] & x > ۱ \\ ۲^{x-۱} + ۱ & x \geqslant ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ پیوستگی راست داشته باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱۰ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

حل گزینه‌ی ۴.

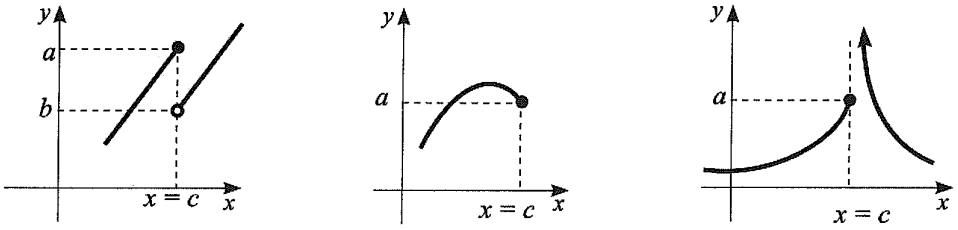
$$\lim_{x\to ۱^+ \approx ۱/۱} f(x) = [۱/۱] + a[-۱/۱] = ۱ - ۲a \ , \ f(۱) = ۲^۰ + ۱ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱) \Longrightarrow ۱ - ۲a = ۲ \Longrightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۸۷ـ۴ تابع f در نقطه‌ی c از چپ پیوسته است، اگر و تنها اگر f در c دارای حد چپ باشد و حد چپ تابع برابر مقدار تابع در نقطه‌ی c باشد، یعنی

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$$

به عبارت دیگر تابع f در $x = c$ پیوستگی چپ دارد هرگاه f از سمت چپ به c وصل شود.



$\lim_{x\to c^+} f(x) = b$ $\quad$ $\lim_{x\to c^-} f(x) = a$ $\quad$ $f(c) = a$

$\lim_{x\to c^+} f(x)$ وجود ندارد $\quad$ $\lim_{x\to c^-} f(x) = a$ $\quad$ $f(c) = a$

$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to c^-} f(x) = a$ $\quad$ $f(c) = a$

مثال نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & x \neq ۰ \\ -۱ & x = ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ پیوستگی چپ دارد.

حل

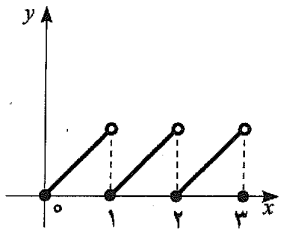
$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sin x}{-x} = -۱ \quad , \quad f(۰) = -۱$$

چون $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = f(۰) = -۱$ ، درنتیجه تابع f در $x = ۰$ پیوستگی چپ دارد.

مثال تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x - [x]$ در تمام نقاط صحیح دارای پیوستگی راست است ولی پیوستگی چپ ندارد، زیرا

$$f(n) = ۰,\ \lim_{x\to n^+}(x - [x]) = n - n = ۰,\ \lim_{x\to n^-}(x - [x]) = n - (n - ۱) = ۱$$

از روی شکل نیز مشخص است.



تست اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x + \dfrac{|۲x|}{x} & x \neq ۰ \\ a - ۳ & x = ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ پیوستگی چپ داشته باشد، a کدام است؟

۱) ۱ $\quad$ ۲) -۱ $\quad$ ۳) ۵ $\quad$ ۴) -۵

حل گزینه‌ی ۱.

$$f(۰) = a - ۳,\ \lim_{x \to ۰^-} f(x) = \lim_{x \to ۰^-} \left(۳x - \frac{۲x}{x} \right) = \lim_{x \to ۰^-} (۳x - ۲) = -۲$$

$$a - ۳ = -۲ \Longrightarrow a = ۱$$

۸۸ـ۴ نکات مهم:

۱) تابع f در نقطه‌ی c پیوسته است، اگر و تنها اگر پیوستگی چپ و پیوستگی راست داشته باشد.

۲) اگر یک تابع زوج در نقطه‌ی ۰ از راست پیوسته باشد، از طرف چپ هم در نقطه‌ی ۰ پیوسته است.

۳) اگر f یک تابع فرد و در نقطه‌ی ۰ از راست پیوسته باشد، آنگاه $f(۰) = ۰$ و f در نقطه‌ی ۰ از چپ نیز پیوسته است، یعنی f در صفر پیوسته است.

تست تابع $f(x) = [۲ \sin x]$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۲}$ ازنظر پیوستگی چگونه است؟

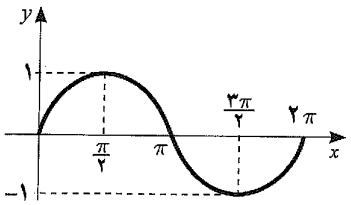
۱) از چپ ناپیوسته ـ از راست ناپیوسته
۲) از چپ پیوسته ـ از راست ناپیوسته
۳) از چپ ناپیوسته ـ از راست پیوسته
۴) از چپ پیوسته ـ از راست پیوسته

حل گزینه‌ی ۱.

$$x \to \frac{\pi}{۲}^- \Longrightarrow \sin x < ۱ \Longrightarrow ۲ \sin x < ۲ \Longrightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = [۲^-] = ۱$$

$$x \to \frac{\pi}{۲}^+ \Longrightarrow \sin x < ۱ \Longrightarrow ۲ \sin x < ۲ \Longrightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) \Longrightarrow [۲^-] = ۱$$

بنابراین تابع f در $x = \frac{\pi}{۲}$ از چپ و راست ناپیوسته است. $\Longrightarrow f(\frac{\pi}{۲}) = [۲ \sin \frac{\pi}{۲}] = [۲] = ۲$



مطالبی درباره‌ی پیوستگی

۸۹ـ۴ توابع زیر روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

۱) تابع ثابت $y = c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

۲) تابع چندجمله‌ای $y = ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + s$

۳) تابع سینوس و کسینوس $y = \sin x, y = \cos x$

۴) تابع نمایی $y = a^x\ ,\ a > ۰$

۹۰ـ۴ توابع کسری به‌ازای ریشه‌های مخرج ناپیوسته‌اند.

مثال مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \frac{۱}{(x-۱)e^x}$ را بیابید.

حل

$$(x-1)e^x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Longrightarrow x=1 \\ e^x = 0 \Longrightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases} \Longrightarrow \{1\} = \text{مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی}$$

مثال حدود m را چنان بیابید که تابع $f(x)=\dfrac{mx-5x}{3x^2+mx+m-3}$ همواره پیوسته باشد.

حل باید Δ مخرج کسر کوچک‌تر از صفر باشد.

$$\Delta = b^2-4ac = m^2-4(m-3)(3) < 0 \Longrightarrow m^2-12m+36 < 0 \Longrightarrow (m-6)^2 < 0$$

که ممکن نیست، پس $m \in \{\ \}$.

تست تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x-1}}{x^3+x^2-2x}$ روی دامنه‌ی تعریف خود چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

حل گزینه‌ی ۲. ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می‌کنیم

$$x^3+x^2-2x=0 \Longrightarrow x(x^2+x-2)=0 \Longrightarrow x=0, x=1, x=-2$$

$$\ln x-1 \geqslant 0 \Longrightarrow \ln x \geqslant 1 \Longrightarrow x \geqslant e \Longrightarrow D_f=\{x|x \geqslant e\}$$

ریشه‌های مخرج جزو دامنه‌ی تابع نیستند، پس نمی‌توان آن‌ها را نقاط گسسته درنظرگرفت. ولی برای صورت کسر داریم:

$$\lim_{x\to e^+}(\sqrt{\ln x-1})=0 \quad , \quad \lim_{x\to e^-}(\sqrt{\ln x-1}) = \text{وجود ندارد}$$

درنتیجه تابع در نقطه‌ی $x=e$ ناپیوسته است.

۴ـ۹۱ اگر تابع f پیوسته باشد، $\sqrt[n]{f}$ در هر فاصله که $f \geqslant 0$ باشد، پیوسته است.

مثال تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-1}$ در چه فاصله‌ای پیوسته است؟

حل تابع f در دامنه‌ی خود پیوسته است. پس کافی است $9-x^2 \geqslant 0$ و $x^2-1 \neq 0$ باشد. بنابراین داریم

$$\begin{cases} 9-x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 \leqslant 9 \Longrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ x^2-1=0 \Longrightarrow x=1 \text{ یا } x=-1 \end{cases} \Longrightarrow D_f=[-3,3]-\{-1,1\}$$

پس تابع f در فاصله‌ی $[-3,-1) \cup (-1,1) \cup (1,3]$ پیوسته است.

تست هرگاه تابع $f(x)=\sqrt{x^2-mx+1}$ همواره پیوسته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $[0,1)$

حل گزینه‌ی ۱. برای این‌که تابع f در R پیوسته باشد، باید $x^2-mx+1 \geqslant 0$ و این درصورتی است که $\Delta \leqslant 0$ و ضریب x^2 یعنی a مثبت باشد $(a>0)$.

$$\begin{cases} \Delta = m^2-4 \leqslant 0 \Longrightarrow -2 \leqslant m \leqslant 2 \\ a=1>0 \end{cases}$$

بنابراین اگر $m \in [-2,2]$ باشد، تابع f همواره پیوسته است.

۹۲ـ۴ اگر f پیوسته باشد و $n \in N$، آنگاه f^n و $\sqrt[2n+1]{f}$ نیز پیوسته است.

مثال تابع $f(x) = x^3 + 2x$ پیوسته است، پس توابع $y = (x^3 + 2x)^5$ و $y = \sqrt[5]{x^3 + 2x}$ نیز پیوسته‌اند.

۹۳ـ۴ اگر f در نقطه‌ی c ناپیوسته باشد، آنگاه $\sqrt[n]{f}$ نیز در نقطه‌ی c ناپیوسته است.

مثال فاصله‌ی پیوستگی تابع $y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ را بیابید.

حل باید فاصله‌ی پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را به‌دست آوریم، یعنی دامنه‌ی تابع f را پیدا کنیم $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.
پس تابع y در فاصله‌ی $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ پیوسته است.

۹۴ـ۴ هرگاه f در $x = c$ پیوسته باشد، آنگاه $|f|$ نیز در $x = c$ پیوسته است.

مثال توابع $y = x^3 + 1$ و $y = \cos x$ پیوسته‌اند، پس توابع $y = |x^3 + 1|$ و $y = |\cos x|$ نیز پیوسته‌اند.

تست فاصله‌ی پیوستگی تابع $y = \left|\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right|$ کدام است؟

۱) $(0, +\infty)$ ۲) $(1, +\infty)$ ۳) $(-\infty, -1)$ ۴) $(-\infty, +\infty)$

حل گزینه‌ی ۲. کافی است فاصله‌ی پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ را به‌دست آوریم یا به‌عبارتی دامنه‌ی تابع f را محاسبه کنیم که:

$$x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1 \Longrightarrow \text{فاصله‌ی پیوستگی} = (1, +\infty)$$

۹۵ـ۴ توابعی به‌شکل $y = [f(x)]$ در نقاطی مانند $c \in \mathbb{R}$ که $f(c) = k \in Z$ ناپیوسته‌اند، مگر این‌که c طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f باشد.

مثال آیا تابع $y = [x^2 - 2x]$ در نقطه‌ی $x = 1$ ناپیوسته است؟

حل خیر، زیرا

$$f(x) = x^2 - 2x \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

چون $x = 1$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع است، پس f در ۱ پیوسته است.

مثال تابع $f(x) = [2x]$ در بازه‌ی $(-2, 1)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

حل باید دید که $2x$ در بازه‌ی $(-2, 1)$ درکدام نقاط مقدار صحیحی دارد. برای این‌که $2x$ عدد صحیح باشد، قرار می‌دهیم $2x = k$، پس به‌ازای $x = \frac{k}{2}$ که k عدد صحیح است، $2x$ عدد صحیح می‌شود، اعداد به‌صورت $\frac{k}{2}$ در بازه‌ی $(-2, 1)$ عبارت است از:

$$x = \frac{-3}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}$$

پس f در ۵ نقطه ناپیوسته است.

تست تابع $f(x) = [2x] - [x]$ در بازه‌ی $[0, 2]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۱. برای پیدا کردن نقاط ناپیوستگی تابع f یک راه این است که تابع را در فاصله‌ی $[۰\ ,۲]$ به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل کنیم.

$$f(x)=[۲x]-[x],\ ۰\leqslant x\leqslant ۲ \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\leqslant x<\frac{۱}{۲} \\ ۱ & \frac{۱}{۲}\leqslant x<۱ \\ ۱ & ۱\leqslant x<\frac{۳}{۲} \\ ۲ & \frac{۳}{۲}\leqslant x<۲ \\ ۲ & x=۲ \end{cases} \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\leqslant x<\frac{۱}{۲} \\ ۱ & \frac{۱}{۲}\leqslant x<\frac{۳}{۲} \\ ۲ & \frac{۳}{۲}\leqslant x<۲ \end{cases}$$

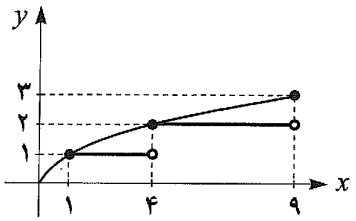
با توجه به تابع چند ضابطه‌ای به‌دست‌آمده برای f معلوم است که این تابع در نقاط $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{۳}{۲}$ ناپیوسته است.

۹۶ـ۴ دو نکته:

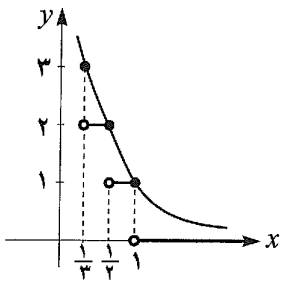
۱) اگر f صعودی باشد، $[f]$ در نقاطی که ناپیوسته است پیوستگی راست دارد.

۲) اگر f نزولی باشد، $[f]$ در نقاطی که ناپیوسته است پیوستگی چپ دارد.

مثال تابع $y=[\sqrt{x}]$ در نقاط ۱ و ۴ و ۹ و... ناپیوسته است ولی در این نقاط پیوستگی راست دارد.



مثال تابع $y=\left[\frac{۱}{x}\right]$ در نقاط ۱ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و... ناپیوسته است ولی در این نقاط پیوستگی چپ دارد.



۹۷ـ۴ برای بررسی پیوستگی توابع چندضابطه‌ای:

اولا: پیوستگی هر ضابطه را در دامنه‌ی خود بررسی می‌کنیم.

ثانیاً: پیوستگی تابع را در نقاط مرزی بررسی می‌کنیم.

مثال تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{|x|-۲} & x>\sqrt{۳} \\ \frac{۱}{|x|-۱} & x\leqslant\sqrt{۳} \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱)

$$|x|-۲=۰ \Longrightarrow \begin{cases} x=۲\in(\sqrt{۳},+\infty) \\ x=-۲\notin(\sqrt{۳},+\infty) \end{cases} \quad ; \quad |x|-۱=۰ \Longrightarrow \begin{cases} x=۱\in(-\infty,\sqrt{۳}] \\ x=-۱\in(-\infty,\sqrt{۳}] \end{cases}$$

بنابراین تابع در $x=۲$ و $x=۱$ و $x=-۱$ ناپیوسته است.

۲) در نقطه‌ی مرزی $x=\sqrt{۳}$:

$$f(\sqrt{۳})=\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱},\ \lim_{x\to\sqrt{۳}^+} f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۳}-۲},\ \lim_{x\to\sqrt{۳}^-} f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}$$

پس در $x=\sqrt{۳}$ هم ناپیوسته است. درنتیجه تابع f در چهار نقطه ناپیوسته است.

تست تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۴-x^۲} & |x|\leqslant ۲ \\ \frac{۱}{۲}x-۱ & |x|>۲\end{cases}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

حل گزینه‌ی ۲.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۴-x^۲} & -۲\leqslant x\leqslant ۲ \\ \frac{۱}{۲}x-۱ & x>۲ \text{ یا } x<-۲\end{cases}$$

$$۴-x^۲\geqslant ۰ \Longrightarrow x^۲\leqslant ۴ \Longrightarrow -۲\leqslant x\leqslant ۲$$

بنابراین تابع $y=\sqrt{۴-x^۲}$ روی دامنه‌ی خود یعنی بازه‌ی $[-۲,۲]$ پیوسته است. ضمناً تابع $y=\frac{۱}{۲}x-۱$ به‌دلیل چندجمله‌ای بودن به‌ازای هر x، پیوسته است. لذا فقط کافی است ناپیوستگی تابع را در دو نقطه‌ی $x=۲$ و $x=-۲$ بررسی کنیم. در $x=۲$:

$$f(۲)=۰,\ \lim_{x\to۲^-}\sqrt{۴-x^۲}=۰,\ \lim_{x\to۲^+}\frac{۱}{۲}x-۱=۰$$

پس در $x=۲$ پیوسته است. در $x=-۲$:

$$f(-۲)=۰,\ \lim_{x\to-۲^-}(\frac{۱}{۲}x-۱)=-۲,\ \lim_{x\to-۲^+}\sqrt{۴-x^۲}=۰$$

پس در $x=-۲$ ناپیوسته است.

۴ـ۹۸ اگر توابع f و g در نقطه‌ی c پیوسته باشند، آنگاه

$$f+g,\ f-g,\ f-g,\ \frac{f}{g}\quad g(c)\neq ۰$$

نیز در نقطه‌ی c پیوسته‌اند.

مثال تابع $f(x)=x^۳+[x]$ در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته است، زیرا $x^۳$ و $[x]$ هردو در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته‌اند.

۴ـ۹۹ اگر f و g در نقطه‌ی c ناپیوسته باشد، ممکن است

$$f+g,\ f-g,\ f.g,\ \frac{f}{g}$$

در نقطه‌ی c پیوسته باشند.

مثال تابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=۲-[x]$ هردو در $x=۳$ ناپیوسته‌اند، ولی $(f+g)(x)=۲$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۴ـ۱۰۰ اگر f و g در نقطه‌ی c به‌ترتیب پیوسته و ناپیوسته باشد، آنگاه

۱) $f+g$ و $f-g$ در c ناپیوسته‌اند.

۲) $f.g$ و $\frac{f}{g}$ در c ممکن است پیوسته یا ناپیوسته باشد.

مثال تابع با ضابطه‌ی $\left[\frac{۱}{۳}x-۱\right]$ $f(x)=(x-۳)$ روی بازه‌ی $(۰,۹)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

حل ابتدا محدوده‌ی $\left(\frac{۱}{۳}x-۱\right)$ را با توجه به محدوده‌ی $۰<x<۹$ به‌دست می‌آوریم:

$$۰<x<۹ \Longrightarrow ۰<\frac{۱}{۳}x<۳ \Longrightarrow -۱<\frac{۱}{۳}x-۱<۲$$

اکنون مقادیر صحیحی که $\left(\frac{۱}{۳}x-۱\right)$ می‌تواند داشته باشد را پیدا می‌کنیم، که اعداد ۰ و ۱ هستند:

$$\frac{۱}{۳}x-۱=۰ \Longrightarrow x=۳ \quad , \quad \frac{۱}{۳}x-۱=۱ \Longrightarrow x=۶$$

بنابراین تابع $\left[\frac{۱}{۳}x-۱\right]$ فقط در نقاط ۳ و ۶ ناپیوسته است. از طرفی تابع $(x-۳)$ در همه‌ی نقاط پیوسته است. بنابراین اگر بخواهد تابع f در بازه‌ی $(۰,۹)$ نقاط ناپیوستگی داشته باشد، این نقاط $x=۳$ یا $x=۶$ هستند.

$$f(۳)=۰,\ \lim_{x\to ۳+} f(x)=۰\times ۰=۰,\ \lim_{x\to ۳-} f(x)=۰\times(-۱)=۰$$

پس f در $x=۳$ پیوسته است.

$$f(۶)=۳\times ۲=۶,\ \lim_{x\to ۶+} f(x)=۳\times ۲=۶,\ \lim_{x\to ۶-} f(x)=۳\times ۱=۳$$

پس f در $x=۶$ پیوسته نیست. بنابراین تابع f در بازه‌ی $(۰,۹)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته است.

۴ـ۱۰۱ اگر تابع g در نقطه‌ی c پیوسته باشد و تابع f در نقطه‌ی $g(c)$ پیوسته باشد، آنگاه $f\,o\,g$ در نقطه‌ی c پیوسته است.

مثال تابع g به معادله‌ی $g(x)=\tan x$ در $x=\frac{\pi}{۳}$ پیوسته است و تابع f به معادله‌ی $f(x)=[x]$ در $\tan\frac{\pi}{۳}$ پیوسته است. پس تابع fog در $x=\frac{\pi}{۳}$ پیوسته است، زیرا:

$$fog=f(g(x))=[\tan x]=h(x)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}+} h(x)=[\sqrt{۳}^{+}]=۱,\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۳}-} h(x)=[\sqrt{۳}^{-}]=۱, h\left(\frac{\pi}{۲}\right)=[\sqrt{۳}]=۱$$

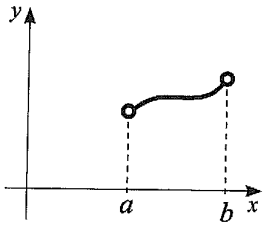
پس تابع $h(x)=f(g(x))$ در $x=\frac{\pi}{۳}$ پیوسته است.

۴ـ۱۰۲ اگر $g(x)$ یک تابع پیوسته باشد، دراین‌صورت توابع $\sin(g(x))$ و $\cos(g(x))$ نیز پیوسته‌اند.

مثال تابع $g(x)=x^{۲}-x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس تابع $f(x)=\sin(x^{۲}-x)$ نیز در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

پیوستگی در یک بازه

۴ـ۱۰۳ تابع f را در بازه‌ی (a,b) وقتی پیوسته می‌گوییم که این تابع در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.



مثال تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در بازه‌ی $(۰,۲)$ پیوسته است، زیرا به‌ازای تمام نقاط این بازه پیوسته است، اما در بازه‌ی $(-۱,۱)$ پیوسته نیست، زیرا در $(-۱,۱)\ni ۰=x$ ناپیوسته است.

تست به‌ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\leqslant ۱ \\ ax+b & ۱<x<۴ \\ -۲x & x\geqslant ۴ \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) $b=-۴, a=-۳$ ۲) $b=۴, a=۳$ ۳) $b=-۴, a=۳$ ۴) $b=۴, a=-۳$

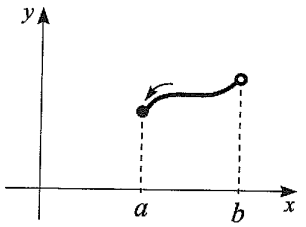
حل گزینه‌ی ۴. در نقاط $x=۱$ و $x=۴$ ضابطه‌ی تابع عوض می‌شود. بنابراین برای پیوستگی f روی R باید f در این دو نقطه پیوسته باشد.

$$f(۱)=۱,\ \lim_{x\to ۱^{+}} f(x)=a+b,\ \lim_{x\to ۱^{-}} f(x)=۱ \Longrightarrow a+b=۱ \qquad (۱)$$

$$f(۴)=-۸,\ \lim_{x\to ۴^{+}} f(x)=-۸,\ \lim_{x\to ۴^{-}} f(x)=۴a+b \Longrightarrow ۴a+b=-۸ \qquad (۲)$$

از حل (۱) و (۲) خواهیم داشت $a=-۳$ و $b=۴$.

۴ـ۱۰۴ تابع f را در بازه‌ی $[a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که اولاً، این تابع در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد، ثانیاً، این تابع در $x_{۰}=a$ پیوستگی راست داشته باشد.



مثال آیا تابع $f(x)=۲x+[x]$ در بازه‌ی $[۳,۴]$ پیوسته است؟

حل این تابع در بازه‌ی $(۳,۴)$ پیوسته است، به فرض $۳<x_{۰}<۴$.

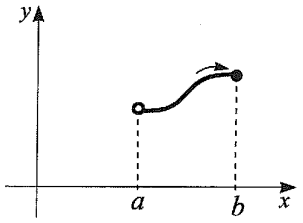
$$f(x_{۰})=۲x_{۰}+[x_{۰}]=۲x_{۰}+۳,\ \lim_{x\to x_{۰}} f(x)=۲x_{۰}+[x_{۰}]=۲x_{۰}+۳$$

تابع در $x_0 = ۳$ پیوستگی راست دارد، زیرا:

$$f(۳) = ۶ + [۳] = ۹,\ \lim_{x \to ۳^+} f(x) = ۶ + [۳^+] = ۹$$

پس f در بازه‌ی $[۳, ۴)$ پیوسته است.

۱۰۵_۴ تابع f را در بازه‌ی $(a, b]$ وقتی پیوسته می‌گوییم که اولاً، این تابع در بازه‌ی (a, b) پیوسته باشد، ثانیاً، این تابع در $x_0 = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.



مثال نشان دهید که تابع f به معادله‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{۲ - x}}{\sqrt{x}}$ در بازه‌ی $[۰, ۲)$ پیوسته است.

حل اولاً، باید ثابت کنیم که این تابع در بازه‌ی $(۰, ۲)$ پیوسته است. فرض می‌کنیم که $۰ < x_0 < ۲$.

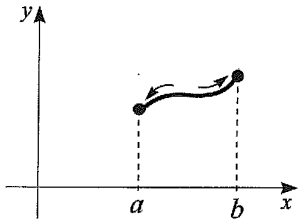
$$f(x_0) = \frac{\sqrt{۲ - x_0}}{\sqrt{x_0}},\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{\sqrt{۲ - x_0}}{x_0}$$

پس این تابع در فاصله‌ی $(۰, ۲)$ پیوسته است.

ثانیاً، باید نشان دهیم این تابع در $x_0 = ۲$ پیوستگی چپ دارد.

$$f(۲) = \frac{\sqrt{۲ - ۲}}{\sqrt{۲}} = ۰,\ \lim_{x \to ۲^-} f(x) = \frac{\sqrt{۲ - ۲^-}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۰^+}}{\sqrt{۲}} = ۰$$

۱۰۶_۴ تابع f را در بازه‌ی $[a, b]$ وقتی پیوسته می‌گوییم که اولاً، این تابع در بازه‌ی (a, b) پیوسته باشد، ثانیاً، در $x_0 = a$ پیوستگی راست و در $x_0 = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.



مثال تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ در بازه‌ی $[-۱, ۱]$ پیوسته است.

مثال اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a - x^۳ & -۱ \leqslant x < ۰ \\ [x] + ۱ & ۰ \leqslant x < \frac{۱}{۲} \\ ۲x + b & \frac{۱}{۲} \leqslant x \leqslant ۱ \end{cases}$ در بازه‌ی $[-۱, ۱]$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را بیابید.

حل باید تابع در نقاط $x = ۰$ و $x = \frac{۱}{۲}$ پیوسته و در $x = -۱$ پیوستگی راست و در $x = ۱$ پیوستگی چپ داشته باشد.

$$\lim_{x \to ۰^-} (a - x^۳) = a,\ \lim_{x \to ۰^+} ([x] + ۱) = ۱ \Longrightarrow a = ۱$$

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}^-} ([x] + ۱) = ۱,\ \lim_{x \to \frac{۱}{۲}^+} (۲x + b) = ۱ + b \Longrightarrow b = ۰$$

خط مجانب

۴ـ۱۰۷ می‌گوییم منحنی نمایش تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ دارای شاخه‌ی بی‌نهایت است هرگاه، نقطه یا نقاطی روی منحنی وجود داشته باشد که لااقل یکی از مختصات آن به‌سمت بی‌نهایت میل کند.

مثال منحنی نمایش تابع به معادله‌ی $y = \frac{۳x + ۱}{x - ۲}$ دارای شاخه‌ی بی‌نهایت است، زیرا:

$$\begin{cases} x \to ۲ \\ y \to \pm\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to ۳ \end{cases}$$

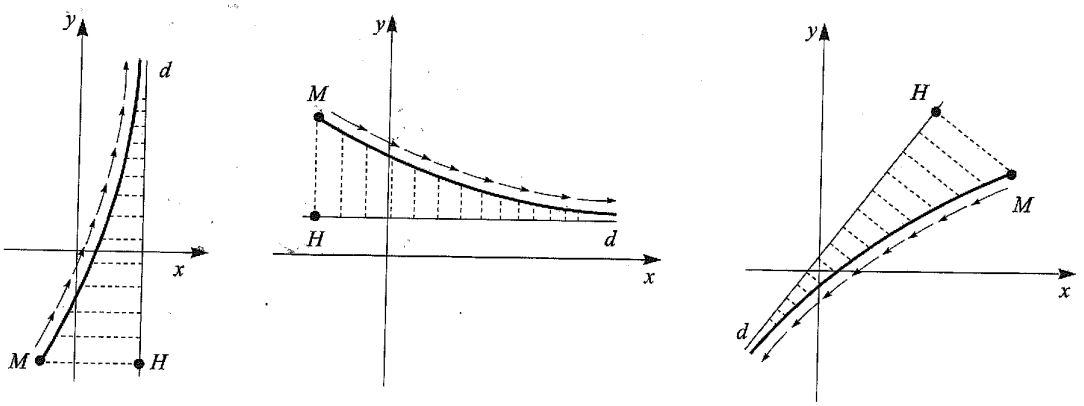
مثال منحنی نمایش تابع به معادله‌ی $y = \sqrt{۹ - x^۲}$ دارای شاخه‌ی بی‌نهایت نیست، زیرا: $D_f = [-۳, ۳]$

۴ـ۱۰۸ تعریف خط مجانب: هرگاه منحنی نمایش تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ دارای شاخه‌ی بی‌نهایت باشد، خط (d) را مجانب آن شاخه‌ی منحنی می‌گوییم. درصورتی‌که فاصله‌ی نقطه‌ی متغیر M روی آن شاخه تا خط، وقتی نقطه‌ی M روی آن شاخه بی‌نهایت دور شود و به‌سمت صفر میل کند. بنابراین:

۱) اگر خط مجانب موازی محور عرض‌ها باشد، آن را مجانب قائم می‌گویند.

۲) اگر خط مجانب موازی محور طول‌ها باشد، آن را مجانب افقی می‌گویند.

۳) اگر خط مجانب محورهای مختصات را قطع کند، آن را مجانب مایل می‌گویند.



مجانب قائم

۴ـ۱۰۹ اگر در تابع به معادله‌ی $y = f(x)$، حد چپ یا حد راست یا حد تابع وقتی که x به‌سمت a میل می‌کند، برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، دراین‌صورت خط d به‌معادله‌ی $x = a$ را مجانب قائم منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ می‌گویند.

مثال منحنی نمایش تابع به معادله‌ی $y = \frac{۲}{\sqrt{x-۳}}$ دارای مجانب قائمی به‌معادله‌ی $x = ۳$ است، زیرا

$$x \to ۳^+ \Longrightarrow y \to +\infty$$

مثال منحنی نمایش تابع به‌معادله‌ی $y = \frac{x+۱}{\sqrt{-x}}$ دارای مجانب قائمی به‌معادله‌ی $x = ۰$ است، زیرا:

$$x \to ۰^- \Longrightarrow y \to +\infty$$

مثال منحنی نمایش تابع به معادله‌ی $y = \frac{۱-x^۲}{(x-۲)^۲}$ دارای مجانب قائمی به‌معادله‌ی $x = ۲$ است، زیرا:

$$x \to ۲ \Longrightarrow y \to -\infty$$

۴ـ۱۱۰ به طورکلی، برای محاسبه‌ی مجانب‌های قائم یک منحنی، مقادیری از x را حساب می‌کنیم که حد تابع در آن‌ها $\pm\infty$ شود. در توابع کسری برای به‌دست آوردن مجانب قائم، کافی است طول نقاطی را که مخرج به‌ازای آن‌ها صفر می‌شود را حساب کنیم. توجه داشته باشید که:

۱) اگر ریشه‌ی مشترک بین صورت و مخرج وجود داشته باشد، باید حد تابع محاسبه گردد و اگر حد پس از رفع ابهام برابر ∞ شد، آنگاه مقدار به‌دست‌آمده مجانب قائم تابع است و اگر برابر ∞ نشد، تابع به‌ازای آن مقدار مجانب قائم ندارد.

۲) اگر $x = a$ مجانب قائم منحنی نمایش تابع به‌معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آنگاه $a \neq x$ عضو دامنه‌ی تعریف تابع نیست ولی حداق یکی از دو مقدار a^+ یا a^- باید عضو دامنه‌ی تعریف تابع باشد.

مثال مجانب قائم هریک از توابع زیر را (درصورت وجود) بیابید.

۱) $y = \frac{x^۲+۱}{x^۲-۹}$ ۲) $y = \frac{|x-۱|}{x-۱}$ ۳) $y = \frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x}$ ۴) $y = \frac{x^۲}{e^x}$

حل

۱) دارای دو مجانب قائم است، زیرا:

$$x^۲ - ۹ = ۰ \Longrightarrow x = ۳ \quad \text{یا} \quad x = -۳$$

۲) دارای مجانب قائم نیست، $x = ۱$ ریشه‌ی مشترک بین صورت و مخرج است، پس باید حد تابع را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x \to ۱^+} y = \lim_{x \to ۱^+} \frac{x-۱}{x-۱} = ۱ \quad , \quad \lim_{x \to ۱^-} y = \lim_{x \to ۱^-} \frac{-(x-۱)}{x-۱} = -۱$$

چون حد تابع برابر ∞ نشد، تابع به‌ازای $x = ۱$، مجانب قائم ندارد.

۳) دارای مجانب قائم نیست. زیرا دامنه‌ی تابع برابر است با $(-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$ و جواب مخرج $x = ۰$ است و هیچ یک از دو مقدار ۰^+ یا ۰^- عضو دامنه‌ی تابع نمی‌باشد.

۴) دارای مجانب قائم نیست، زیرا $e^x > ۰$ است.

تست خط $x = -۲$ مجانب قائم نمودار تابع $y = \frac{۲x-۱}{(۱-m)x+۳}$ می‌باشد، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

حل گزینه‌ی ۳.

$$(۱-m)x + ۳ = ۰ \Longrightarrow (۱-m)(-۲) + ۳ = ۰ \Longrightarrow m = -\frac{۱}{۲}$$

مجانب افقی

۴ـ۱۱۱ اگر در تابع به معادله‌ی $y = f(x)$، وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ آنگاه حد تابع برابر عدد b باشد، خط d به معادله‌ی $y = b$ را مجانب افقی منحنی گویند.

مثال مجانب افقی هر یک از توابع زیر را (درصورت وجود) بیابید.

۱) $y = \dfrac{x^۲ + ۱}{۳x^۲ - ۲}$ ۲) $y = \dfrac{x + ۱}{۳ + x^۲}$ ۳) $y = \dfrac{x^۳ - ۳}{۱ + x}$

حل

۱) مجانب افقی $\quad x \to \pm\infty \Longrightarrow \lim y = \lim \dfrac{x^۲}{۳x^۲} = \dfrac{۱}{۳} \Longrightarrow y = \dfrac{۱}{۳}$

۲) مجانب افقی $y = ۰ \quad x \to \pm\infty \Longrightarrow \lim y = \lim \dfrac{x}{x^۲} = \dfrac{۱}{x} = ۰ \Longrightarrow y = ۰$

۳) مجانب افقی ندارد $\quad x \to \pm\infty \Longrightarrow \lim y = \lim \dfrac{x^۳}{x} = \lim x^۲ = +\infty \Longrightarrow$

نتیجه: یک تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که یا صورت و مخرج هم‌درجه باشند یا درجه‌ی مخرج بیشتر باشد.

مثال خط $x = ۱$ مجانب قائم نمودار $y = \dfrac{(m+۱)x - ۲}{x + m - ۳}$ بوده، معادله‌ی مجانب افقی آن را بیابید.

حل

$$x + m - ۳ = ۰ \overset{x=۱}{\Longrightarrow} ۱ + m - ۳ = ۰ \Longrightarrow m = ۲ \Longrightarrow y = \frac{۳x - ۲}{x - ۱}$$

$$x \to \pm\infty \Longrightarrow \lim y = \lim \frac{۳x}{x} = ۳ \Longrightarrow y = ۳$$

تست مختصات محل برخورد دو مجانب نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \dfrac{x + c}{ax + b}$ نقطه‌ی $(-۱, ۳)$ است، $a + b$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۲.

مجانب قائم $\quad ax + b = ۰ \Longrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

مجانب افقی $\quad x \to \pm\infty \Longrightarrow y = \dfrac{۱}{a}$

چون مختصات محل برخورد دو مجانب نمودار نقطه‌ی $(-۱, ۳)$ است، پس مختصات این نقطه در مجانب‌های افقی و قائم صدق می‌کند.

$$(-۱, ۳) \Longrightarrow \begin{cases} ۳ = \dfrac{۱}{a} \Longrightarrow a = \dfrac{۱}{۳} \\ -۱ = -\dfrac{b}{\frac{۱}{۳}} \Longrightarrow b = \dfrac{۱}{۳} \end{cases} \Longrightarrow a + b = \frac{۲}{۳}$$

تست اگر معادله‌ی مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \dfrac{x^۲ + ۱}{x + ۱} - ax - b$ وقتی $x \to \infty$ برابر $y = ۰$ باشد، آنگاه $a + b$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۱.

$$y=\frac{x^{۲}+۱-ax^{۲}-bx-ax-b}{x+۱}\Longrightarrow y=\frac{(۱-a)x^{۲}+(-b-a)x+۱-b}{x+۱}$$

چون $y=۰$ مجانب افقی نمودار تابع است، لذا باید ضرایب $x^{۲}$ و x در صورت کسر فوق برابر صفر شود تا درجه صورت از مخرج کمتر باشد و حاصل حد فوق برابر صفر گردد.

$$۱-a=۰\Longrightarrow a=۱\ ,\ -b-a=۰\Longrightarrow b=-۱\Longrightarrow a+b=۰$$

مجانب مایل

۴ـ۱۱۲ اگر در تابع به‌معادله‌ی $y=f(x)$ وقتی $x\to\infty$ آنگاه $y\to\infty$ می‌گوییم ممکن است منحنی تابع به معادله‌ی $y=f(x)$ دارای مجانب مایل به‌معادله‌ی $y=mx+n$ باشد.

۴ـ۱۱۳ روش حد برای تعیین مجانب مایل: فرض می‌کنیم خط d به معادله‌ی $Y=mx+n$ مجانب مایل منحنی تابع به معادله‌ی $y=f(x)$ باشد. دراین‌صورت:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}\qquad,\qquad n=\lim_{x\to\infty}(y-mx)$$

۱) اگر $m=۰$ و n حد معینی داشته باشد می‌گوییم خط مجانب مایل به خط مجانب افقی تبدیل شده است.

۲) اگر m یک عدد حقیقی باشد و n بی‌نهایت شود، بنا به‌تعریف می‌گوییم منحنی دارای شاخه‌ی سهمی شکل در امتداد خط به ضریب زاویه‌ی m است.

۳) اگر m یک عدد حقیقی باشد و n حد معینی نداشته باشد، دراین‌صورت می‌گوییم منحنی در راستای $y=mx$ به بی‌نهایت می‌رود ولی دارای شاخه‌ی سهمی مانند نیست.

۴) اگر حد m، بی‌نهایت شود، منحنی شاخه‌ی سهمی‌مانند در امتداد محور yها دارد.

مثال مجانب مایل هر یک از توابع زیر را (درصورت وجود) بیابید.

۱) $y=\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۲}$ ۲) $y=۲x+\sqrt{x+۲}$

حل

۱)

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۲}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۲x}=۱\Longrightarrow m=۱$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۲}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+۲}{x-۲}=-۱\Longrightarrow n=-۱$$

پس $y=x-۱$ مجانب مایل منحنی است.

۲)

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{۲x+\sqrt{x+۲}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{۲x}{x}=۲\Longrightarrow m=۲$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(۲x+\sqrt{x+۲}-۲x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+۲}=+\infty$$

بنابه شماره‌ی (۲)، منحنی دارای شاخه‌ی سهمی‌شکل در راستای خط $y=۲x$ است.

۴ـ۱۱۴ شرط لازم برای این‌که یک منحنی دارای مجانب مایل باشد این‌است‌که وقتی $x \to \infty$ حتماً $y \to \infty$ کند. در توابع کسری اگر درجه‌ی صورت یک واحد از درجه‌ی مخرج بیشتر باشد، تابع دارای مجانب مایل است که دراین‌حالت صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و صرف‌نظر از باقیمانده، خارج‌قسمت را برابر y درنظر می‌گیریم، که همان مجانب مایل منحنی است.

مثال مجانب مایل هر یک از توابع زیر را (درصورت وجود) بیابید.

۱) $y = \dfrac{۲x^۴ + x^۳ + ۱}{x^۳}$ ۲) $y = ۳x + ۲ + \dfrac{۲x^۲ + ۱}{x^۲ - ۱}$

حل

۱)

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۴ + x^۳ + ۱ & x^۳ \\ \hline -۲x^۴ & ۲x + ۱ \\ \hline x^۳ & \\ -x^۳ & \\ \hline ۱ & \end{array} \quad \Longrightarrow \text{مجانب مایل } y = ۲x + ۱$$

۲)

$$y = \frac{۳x^۳ + ۴x^۲ - ۳x - ۱}{x^۲ - ۱}$$

$$\begin{array}{r|l} ۳x^۳ + ۴x^۲ - ۳x - ۱ & x^۲ - ۱ \\ \hline -۳x^۳ \mp ۳x & ۳x + ۴ \\ \hline ۴x^۲ - ۱ & \\ -۴x^۲ \mp ۴ & \\ \hline ۳ & \end{array} \quad \Longrightarrow \text{مجانب مایل } y = ۳x + ۴$$

تست خط مجانب مایل تابع $y = \dfrac{x^۲ + bx + ۱}{x}$ از نقطه‌ی $(-۱, ۱)$ می‌گذرد، b کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

حل گزینه‌ی ۲.

$$\begin{array}{r|l} x^۲ + bx + ۱ & x \\ \hline -x^۲ & x + b \\ \hline bx + ۱ & \\ -bx & \\ \hline ۱ & \end{array} \quad \Longrightarrow \text{مجانب مایل } y = x + b$$

$$(۱, -۱) \Longrightarrow -۱ = ۱ + b \Longrightarrow b = -۲$$

۴ـ۱۱۵ در توابعی که به‌صورت $y = \alpha x + \beta \pm \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-۱} + \dots}$ هستند، معادلات مجانب‌های افقی و مایل از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt[n]{a}\left|x + \frac{b}{na}\right|$$

که اگر n زوج باشد برای هر تابع دو مجانب و اگر n فرد باشد برای هر تابع یک مجانب به‌دست می‌آید.

مثال مجانب‌های هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۱} + x + ۳$ ۲) $y = \sqrt[۳]{x^۳ + ۳x^۲}$

حل

۱)

$$y = \pm\sqrt{۱}\left(x + \frac{-۴}{۲}\right) + x + ۳ \Longrightarrow \begin{cases} y = x - ۲ + x + ۳ \Longrightarrow y = ۲x + ۱ & \text{مجانب مایل} \\ y = -x + ۲ + x + ۳ \Longrightarrow y = ۵ & \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

۲)

$$y = \sqrt[۳]{۱}\left(x + \frac{۳}{۳}\right) \Longrightarrow y = x + ۱ \qquad \text{مجانب مایل}$$

تست اگر معادله‌ی مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ax + ۱ + \sqrt{(x+b)^۲ + ۱}$ وقتی $x \to -\infty$ برابر $y = ۲x + ۳$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۴.

$$y = ax + ۱ + \sqrt{x^۲ + ۲bx + b^۲ + ۱}$$

$$x \to -\infty \Longrightarrow y = ax + ۱ + \sqrt{۱}\left(x + \frac{۲b}{۲}\right) = ax + ۱ + x + b \Longrightarrow y = (a+۱)x + (۱+b)$$

$$(a+۱)x + (۱+b) = ۲x + ۳ \Longrightarrow \begin{cases} a + ۱ = ۲ \Longrightarrow a = ۱ \\ ۱ + b = ۳ \Longrightarrow b = ۲ \end{cases} \Longrightarrow a + b = ۳$$

تست‌های فصل ۴

۱. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+a & x\leqslant 0\\ x\cos x & x>0\end{cases}$ در $x=0$ حد دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) هیچ مقدار

۲. اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant -2\\ mx+n & -2<x<2\\ 2x-6 & x\geqslant 2\end{cases}$ باشد، به‌ازای کدام مقدار m و n این تابع دارای حد است؟

۱) $m=\frac{3}{2}, n=1$ ۲) $m=\frac{2}{3}, n=1$ ۳) $m=-\frac{2}{3}, n=1$ ۴) $m=-\frac{3}{2}, n=1$

۳. تابع $f(x)=\begin{cases}ax+2b & x>3\\ ax^2+bx+2 & x<3\end{cases}$ مفروض است، $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=6$ و $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=2$ باشد. عددهای a و b کدام است؟

۱) $b=-6, a=-2$ ۲) $b=6, a=-2$ ۳) $b=6, a=2$ ۴) $b=-6, a=2$

۴. تابع $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف شده است، مقادیر a و b برای آنکه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ موجود باشند، کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}2x-a & x<-3\\ ax+2b & -3\leqslant x\leqslant 3\\ b-5x & x>3\end{cases}$$

۱) $b=6, a=3$ ۲) $b=6, a=-3$ ۳) $b=-6, a=3$ ۴) $b=-6, a=-3$

۵. حد عبارت $[x^{1000}]+\cdots+[x^3]+[x^2]+[x]$ وقتی $x\to 0^-$ کدام است؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) -1000 ۳) -500 ۴) ۵۰۰

۶. حد عبارت $\frac{(1+x)^{1/5}-(1-x)^{1/5}}{(1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $\frac{3}{2/6}$

۷. حد عبارت $\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$ وقتی $n\to\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۸. حاصل $\lim\frac{|x|}{|x|+1}$ وقتی $x\to\infty$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حد ندارد

۹. حد تابع $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x+1)^4}$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۰

۱۰. حاصل $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ کدام است؟

۱) $\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$ ۲) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ ۳) $\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$ ۴) $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$

۱۱. حد تابع $f(x)=\left(\frac{(x+1)^2}{3x^2-5x+1}\right)^{\frac{2x+1}{3+x}}$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) ۳

۱۲. حاصل $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{\sqrt{x^6+1}}$ برابر است با:

۱) ۵ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۳. حاصل $\lim\left(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\cdots\times\sqrt[2n]{2}\right)$ وقتی $n\to\infty$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۱۴. اگر $\frac{1}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(m-1)(x+1)}{(4-m)(x+2)}$، آنگاه m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -2 ۴) -1

۱۵. حاصل $\lim_{x\to2^-}\frac{x^2|4x-8|}{x-2}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) -16

۱۶. حد تابع $y=(3)^{\frac{-1}{x^2}}$ وقتی $x\to0$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) حد ندارد

۱۷. حد عبارت $\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\tan x)}$ وقتی $x\to\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۰ ۴) حد ندارد

۱۸. حد تابع $f(x)=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}$ وقتی $x\to1$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) -1

۱۹. اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to2}f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) ۵

۲۰. اگر $\lim_{x\to0}f(x)=3$، آنگاه $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{xf(x)}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ∞

۲۱. حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-|\tan x|}{|\sin x|-x}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -۱

۲۲. حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{۸^{\sqrt{x}}-۱}{۳^{\sqrt{x}}-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\ln ۸}{\ln ۳}$ ۴) $\log_۳^۸$

۲۳. حاصل $\lim\limits_{n\to 0} \frac{(x+n)^۳-x^۳}{n}$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) $۳x^۲$ ۳) $۳nx^۲$ ۴) $x^۲$

۲۴. حد تابع $f(x)=\text{Arccos}\ \frac{x+\sqrt{x^۲-۲x}}{۲x-۱}$ وقتی $x\to-\infty$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) ۱

۲۵. حاصل $\lim(x+e^{۲x})^{\frac{۱}{x}}$ وقتی $x\to ۰$ کدام است؟

۱) $e^{-۳}$ ۲) $e^{۳}$ ۳) $e^{۲}$ ۴) $e^{-۲}$

۲۶. حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x.\sin ۲x.\cdots.\sin nx}{x^n}$ برابر است با:

۱) n ۲) ۱ ۳) $n!$ ۴) $\frac{n!}{n}$

۲۷. حد چپ تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+|x| & x<-۱\\ [x]-|x| & x\geqslant -۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-۱$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۱

۲۸. حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{۱}{x}}$ برابر است با:

۱) e ۲) ۱ ۳) $e^{-۱}$ ۴) ۰

۲۹. حاصل حد $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۵]{x}}{\sqrt{۲x+۱}}$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۳۰. حد تابع $f(x)=\frac{۲x-۲}{\sqrt[۳]{x+۲۶}-۳}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۲۶ ۳) ۳ ۴) ۳۲

۳۱. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{(-۱)^{[x]}}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۰ ۴) ۱

۳۲. حد عبارت $\frac{\sin(\frac{۱}{x})}{\tan^{-۱}(\frac{۱}{x})}$ وقتی $x\to\infty$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $+\infty$ ۴) حد ندارد

۳۳. حد عبارت $\frac{(n+۲)!+(n+۱)!}{(n+۳)!}$، $(n \in N)$ وقتی $n \to +\infty$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $+\infty$ ۳) n ۴) ۰

۳۴. حاصل $\lim_{x \to ۰^+} \left(\frac{۱}{x}\right)^{\sin x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) e ۳) -۱ ۴) صفر

۳۵. حاصل $\lim \frac{x^a - k^a}{k^b - x^b}$ وقتی $x \to k$ کدام است؟ $(a, b \in N)$

۱) $-\frac{a}{b}$ ۲) k^{a-b} ۳) $-\frac{a}{b}k^{a-b}$ ۴) $\frac{b}{a}k^{b-a}$

۳۶. حاصل $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) حد ندارد

۳۷. حد عبارت $x[\frac{۱}{x}]$ وقتی $x \to -\infty$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) ۱

۳۸. حاصل $\lim \frac{۱}{۲^x} \cot \frac{a}{۲^x}$ وقتی $x \to +\infty$ کدام است؟

۱) a ۲) $\frac{۱}{a}$ ۳) $\frac{a}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{a}$

۳۹. تابع $f(x) = \frac{\sin \frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}}$ در نقطه‌ای به‌طول صفر:

۱) دارای حد برابر صفر است.
۲) دارای حد برابر یک است.
۳) به سمت ∞ میل می‌کند.
۴) دارای حد نیست.

۴۰. حاصل $\lim_{x \to ۰} \frac{\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arcsin} x}{x(۱ - \cos x)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۴۱. حاصل $\lim_{x \to ۰} x \log x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $-\infty$ ۴) وجود ندارد

۴۲. حاصل $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-۳x}}{e^x - e^{-۳x}}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۴۳. حاصل $\lim_{x \to ۰^-} \frac{\sin ۲x}{\sqrt{۱ - \cos ۲x}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۴۴. حاصل $\lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{\sqrt{۱ + \tan x} - \sqrt{۱ - \tan x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۴۵. حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\tan x - ۱}{۴x - \pi}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۴۶. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x[x]}{|۲x|} & x \neq ۰ \\ a - ۲ & x = ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ پیوستگی چپ داشته باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۷. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + a & x > ۲ \\ ۴ & x = ۲ \\ [x] + bx & x < ۲ \end{cases}$ وقتی $x \to ۲$ پیوستگی راست داشته باشد و حد چپ آن برابر ۳ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

۴۸. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-۱)}{\sqrt{x}-۱} & x \neq ۱ \\ m & x = ۱ \end{cases}$ در نقطه $x = ۱$ پیوسته است، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) -۲

۴۹. اگر $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ و $g(x) = ۱ + x^۲$، مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی $g \circ f$ کدام است؟

۱) $\{-۱, ۱\}$ ۲) $\{-۱, ۰\}$ ۳) $\{۰\}$ ۴) ϕ

۵۰. تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲}{a} & ۰ \leqslant x < a \\ a & x = a \\ ۲a - \frac{a^۳}{x^۲} & x > a \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}^+$:

۱) ناپیوسته است.
۲) فقط پیوستگی راست دارد.
۳) فقط پیوستگی چپ دارد.
۴) پیوسته است.

۵۱. مقدار تابع f در نقطه صفر کدام یک از مقادیر باشد تا تابع $f(x) = \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{x}$ در نقطه صفر پیوسته باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ϕ ۴) $\{۰, ۱\}$

۵۲. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x]^۲ - [x]$ روی بازه‌ی $(-۱, ۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۵۳. کدام یک از عبارت‌های زیر در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & ۰ < x < ۱ \\ \ln x & ۱ < x < ۲ \end{cases}$ صحیح است؟

۱) در $x = ۱$ معین است.
۲) در $x = ۱$ پیوسته است.
۳) در $x = ۱$ پیوسته نیست.
۴) در $x = ۱$ حد چپ و حد راست مساوی نیستند.

۵۴. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۲a[۲x] & x\neq ۰\\ x+۴[\frac{\pi+x}{۲}] & x=۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوستگی چپ دارد؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۵۵. تابع $f(x)=\text{Arc tan}\left(\frac{۱}{x}\right)$ درکدام نقطه گسسته است؟

۱) $x=۰$ ۲) $x=-۱$ ۳) $x=۱$ ۴) $x=۲$

۵۶. طول نقطه ناپیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}x-۱ & x\leqslant ۰\\ -۱ & ۰<x\leqslant ۱\\ x^۲-۱ & x>۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) $x=۰$ ۲) $x=۱$ ۳) $x=-۱$ ۴) همواره پیوسته است

۵۷. تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-\frac{\sqrt{(x-۱)^۲}}{x-۱} & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ در نقطه $x=۱$:

۱) پیوسته است. ۲) فقط پیوستگی راست دارد.
۳) فقط پیوستگی چپ دارد. ۴) ناپیوسته است.

۵۸. تابع $y=۴[x]+۳[-x]$ در نقطه $x=n\in Z$ چگونه است؟

۱) ناپیوسته ۲) پیوستگی راست ۳) پیوستگی چپ ۴) پیوسته

۵۹. مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f(x)=\left[\frac{۲}{x}\right]$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-Z$
۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

۶۰. نقاط گسستگی تابع $f(x)=(-۱)^{[x]}$ کدام است؟

۱) Z ۲) $\mathbb{R}-Z$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $Z-\{۱\}$

۶۱. تابع $f(x)=\text{sgn}[|x|]$:

۱) در $x=۱$ پیوسته است. ۲) در $x=۱$ ناپیوسته است.
۳) در $x=-۱$ ناپیوسته است. ۴) موارد ۲ و ۳ صحیح‌اند.

۶۲. اگر تابع $g(x)$ همواره پیوسته باشد، تابع $f(x)=\sqrt{g^۲(x)+g(x)}$ درکدام فاصله ناپیوسته است؟

۱) $\{x|g(x)>۱\}$ ۲) $\{x|g(x)>۰\}$ ۳) $\{x|-۱<g(x)<۰\}$ ۴) $\{x|g(x)<-۱\}$

۶۳. به‌ازای $x\neq ۲$، تابع $f(x)$ مساوی است با $\frac{x^۲+۳x-۱۰}{x-۲}$، چه مقداری باید به $f(۲)$ نسبت داد تا $f(x)$ در $x=۲$ پیوسته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

۶۴. تابع f به معادله $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x\geqslant ۱\\ ۱ & x<۱\end{cases}$ و تابع g به معادله $g(x)=\begin{cases}۴x-۱ & x\geqslant ۱\\ ۵ & x<۱\end{cases}$ در $x_۰=۱$ ناپیوسته‌اند. آنگاه تابع $f+g$ در $x_۰=۱$:

۱) ناپیوسته است. ۲) پیوسته است. ۳) فقط پیوستگی چپ دارد. ۴) فقط پیوستگی راست دارد.

۶۵. تابع f به معادله‌ی $f(x)=\begin{cases}۳x^۳-۴x^۲-۷x & x\notin Z\\ ۰ & x\in Z\end{cases}$ در چند نقطه به‌طول‌های عدد صحیح پیوسته است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) چهار نقطه

۶۶. تابع f به معادله $f(x)=(a^۲-۳a)[x]+۲x+۲[x]$ به‌ازای چه مقادیر a همواره پیوسته است؟

۱) $\{۰,۳\}$ ۲) $\{۰,۲\}$ ۳) $\{۱,۲\}$ ۴) $\{۰,۱\}$

۶۷. تابع f به معادله $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۳} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ در نقطه $x_۰=۰$:

۱) پیوسته نیست ولی حد دارد. ۲) پیوسته است ولی حد ندارد.

۳) هم پیوسته است و هم حد دارد. ۴) نه پیوسته است و نه حد دارد.

۶۸. مجانب قائم تابع $y=\dfrac{\sqrt{x^۲-۴x+۳}}{x-۲}$ کدام است؟

۱) $x=۲$ ۲) $x=-۲$ ۳) $x=۱$ ۴) ندارد

۶۹. مجانب‌های $y=\dfrac{۱}{x^۵+۳۲}$ کدامند؟

۱) $y=۰, x=۲$ ۲) $y=۱, x=-۲$ ۳) $y=۰, x=۰$ ۴) $y=۰, x=-۲$

۷۰. مجانب‌های افقی $y=\dfrac{x}{۵+|x|}$ کدامند؟

۱) $y=-۱, x=۱$ ۲) $y=-۱, y=۱$ ۳) $y=۱, x=-۱$ ۴) $y=۱, y=۰$

۷۱. معادله مجانب مایل $y=\dfrac{x^۲+۲x-۱}{x}$ کدام است؟

۱) $y-x+۲=۰$ ۲) $y-x-۲=۰$ ۳) $y+x-۲=۰$ ۴) $y+x+۲=۰$

۷۲. عرض از مبدأ معادله خط مجانب مایل منحنی تابع $y=\dfrac{x^۲+۳}{x-۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۷۳. مجانب افقی تابع $y=x+۴+\sqrt{x^۲-۶x+۳}$ کدام است؟

۱) $y=-۱$ ۲) $y=۰$ ۳) $y=۲$ ۴) $y=۱$

۷۴. نمودار تابع با ضابطه $y=۳+\dfrac{x-۱}{x^۲-۲x+۴}$ چند مجانب دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۷۵. تابع $y=\dfrac{x+a}{bx+۲}$ که خط $y=۱$ مجانب آن بوده و از نقطه $M(۳,۲)$ می‌گذرد، a و b کدام است؟

۱) $b=۱, a=۷$ ۲) $b=۱, a=۱۳$ ۳) $b=-۱, a=۷$ ۴) $b=-۱, a=-۵$

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۴

۱. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۰^-}([x]+a)=-۱+a\ ,\ \lim_{x\to ۰^+}(x\cos x)=۰$$

$$-۱+a=۰\Longrightarrow a=۱$$

۲. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to ۲^+}(۲x-۶)=-۲,\ \lim_{x\to ۲^-}(mx+n)=۲m+n \Longrightarrow ۲m+n=-۲$$
$$\lim_{x\to -۲^+}(mx+n)=-۲m+n,\ \lim_{x\to -۲^-}(x^۲)=۴ \Longrightarrow -۲m+n=۴$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} m=-\frac{۳}{۲} \\ n=۱ \end{cases}$$

۳. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۳^+}(ax+۲b)=۶ \Longrightarrow ۳a+۲b=۶,\ \lim_{x\to ۳^-}(ax^۲+bx+۲)=۲ \Longrightarrow ۹a+۳b=۰$$

$a=-۲$ و $b=۶$.

۴. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to ۳^+}(b-۵x)=b-۱۵,\ \lim_{x\to ۳^-}(ax+۲b)=۳a+۲b \Longrightarrow ۳a+۲b=b-۱۵$$
$$\lim_{x\to -۳^+}(ax+۲b)=-۳a+۲b,\ \lim_{x\to -۳^-}(۲x-a)=-۶-a \Longrightarrow -۳a+۲b=-۶-a$$

$a=-۳$ و $b=-۶$.

۵. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to ۰^-}[x]=-۱,\ \lim_{x\to ۰^-}[x^۲]=۰,\cdots$$
$$\lim_{x\to ۰^-}([x]+[x^۲]+[x^۳]+\cdots+[x^{۱۰۰۰}])=(-۱+۰-۱+۰-\cdots)=-۵۰۰$$

۶. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)^{۱/۵}-(۱-x)^{۱/۵}}{(۱+x)^{۱/۳}-(۱-x)^{۱/۳}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{H}\lim_{x\to ۰}\frac{۱/۵(۱+x)^{۰/۵}+۱/۵(۱-x)^{۰/۵}}{۱/۳(۱+x)^{۰/۳}+۱/۳(۱-x)^{۰/۳}}=\frac{۳}{۲/۶}$$

۷. گزینه‌ی ۴.

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}=\frac{۲n^۳+\ldots}{۶}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۳}\left(\frac{۲n^۳+\ldots}{۶}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{۲n^۳}{۶n^۳}=\frac{۱}{۳}$$

۸. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{|x|+۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{|x|\left(۱+\frac{۱}{|x|}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{|x|}}=\frac{۱}{۱+۰}=۱$$

۹. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)}{(۲x+۱)^۴}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۴+\ldots}{۱۶x^۴+\ldots}=\frac{۱}{۱۶}$$

۱۰. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲^{۲۰}x^{۲۰}\times ۳^{۳۰}x^{۳۰}}{۲^{۵۰}\times x^{۵۰}}=\frac{۲^{۲۰}\times ۳^{۳۰}}{۲^{۵۰}}=\frac{۳^{۳۰}}{۲^{۳۰}}=\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۳۰}$$

۱۱. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲=\frac{۱}{۹}$$

۱۲. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۵}{\frac{\sqrt{x^۶+۱}}{x^۳}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۵}{\frac{\sqrt{x^۶+۱}}{\sqrt{x^۶}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۵}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۶}}}=\frac{۵}{۱}=۵$$

۱۳. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{n\to\infty}\left(۲^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۴}}\times ۲^{\frac{۱}{۸}}\times\cdots\times ۲^{\frac{۱}{۲n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(۲^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots\frac{۱}{۲n}}\right)=۲$$

۱۴. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(m-۱)(x+۱)}{(۴-m)(x+۲)}=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow\frac{m-۱}{۴-m}=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow m=۲$$

۱۵. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to۲^-}\frac{x^۲|۴x-۸|}{x-۲}=\lim_{x\to۲^-}\frac{۴x^۲[-(x-۲)]}{x-۲}=-\lim_{x\to۲^-}۴x^۲=-۱۶$$

۱۶. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to۰^+}(۳)^{\frac{-۱}{x^۲}}=(۳)^{-\infty}=۰\quad,\quad\lim_{x\to۰^-}(۳)^{\frac{-۱}{x^۲}}=(۳)^{-\infty}=۰$$

۱۷. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\tan x)}=\frac{-\infty}{+\infty}\xrightarrow{H}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{۱+\tan^۲ x}{\tan x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-\tan x}{\frac{۱+\tan^۲ x}{\tan x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-\tan^۲ x}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\sin^۲ x=-۱$$

۱۸. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to۱}\left(\frac{۱}{\ln x}-\frac{۱}{x-۱}\right)=\infty-\infty\Longrightarrow\lim_{x\to۱}\left(\frac{x-۱-\ln x}{\ln x(x-۱)}\right)=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{H}\lim_{x\to۱}\frac{۱-\frac{۱}{x}}{\frac{x-۱}{x}+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{(x-۱)+x\ln x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{H}\lim_{x\to۱}\frac{۱}{۱+\ln x+۱}=\frac{۱}{۱+۰+۱}=\frac{۱}{۲}$$

۱۹. گزینه‌ی ۴.

$$x=\frac{y+۱}{y-۲}\Longrightarrow xy-۲x=y+۱\Longrightarrow y=\frac{۲x+۱}{x-۱}\Longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$$

$$\lim_{x\to۲}\left(\frac{۲x+۱}{x-۱}\right)=\frac{۵}{۲-۱}=۵$$

۲۰. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to۰}\frac{e^{۲x}-۱}{xf(x)}=\lim_{x\to۰}\frac{e^{۲x}-۱}{x}\times\lim_{x\to۰}\frac{۱}{f(x)}=\lim_{x\to۰}\frac{۲e^{۲x}}{۱}\times\lim_{x\to۰}\frac{۱}{f(x)}$$

$$=۲\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۲۱. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-|\tan x|}{|\sin x|-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\tan x}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{6}x^3}=2$$

۲۲. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{8^{\sqrt{x}}-1}{3^{\sqrt{x}}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}8^{\sqrt{x}}\ln 8}{\frac{1}{2\sqrt{x}}3^{\sqrt{x}}\ln 3}=\frac{\ln 8}{\ln 3}$$

۲۳. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{n\to 0}\frac{(x+n)^3-x^3}{n}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{n\to 0}\frac{3(x+n)^2}{1}=3x^2$$

۲۴. گزینه‌ی ۳.

$$x\to-\infty\Longrightarrow\sqrt{x^2-2x}\sim-(x-1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\text{Arc}\cos\frac{x-(x-1)}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\text{Arccos}\frac{1}{2x-1}=\text{Arccos}(0)=\frac{\pi}{2}$$

۲۵. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}\Longrightarrow\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x})(x+e^{2x}-1)=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{1+2e^{2x}}{1}=3$$

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}=e^3$$

۲۶. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x\cdot 3x\cdot\cdots\cdot nx}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n(1\times 2\times 3\times\cdots\times n)}{x^n}=1\times 2\times 3\times\cdots\times n=n!$$

۲۷. گزینه‌ی ۲.

$$x\to-1^-\Longrightarrow-2<x<-1\Longrightarrow[x]=-2$$

$$\lim_{x\to-1^-}([x]+|x|)=-2+1=-1$$

۲۸. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\text{توان})(\text{پایه}-1)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(\sin x+\cos x-1)=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-\sin x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^1=e$$

۲۹. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[10]{\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳۰. گزینه‌ی ۱.

$$x+۲۶=t^۳ \Longrightarrow x=t^۳-۲۶, x\to ۱ \Longrightarrow t\to ۳$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۲}{\sqrt[۳]{x+۲۶}-۳}=\lim_{t-۳}\frac{۲t^۳-۵۴}{t-۳}=\lim_{t\to ۳}\frac{۲(t-۳)(t^۲+۳t+۹)}{t-۳}=\lim_{t\to ۳}۲(t^۲+۳t+۹)=۵۴$$

۳۱. گزینه‌ی ۲.

$$x\to ۱^+ \Longrightarrow [x]=۱, x-۱>۰ \Longrightarrow \lim_{x\to ۱+}\frac{(-۱)^{[x]}}{x-۱}=\frac{-۱}{۰+}=-\infty$$

$$x\to ۱^- \Longrightarrow [x]=۰, x-۱<۰ \Longrightarrow \lim_{x\to ۱-}\frac{(-۱)^{[x]}}{x-۱}=\frac{۱}{۰-}=-\infty$$

۳۲. گزینه‌ی ۱.

$$x\to\infty \Longrightarrow \sin(\frac{۱}{x})\sim\frac{۱}{x}\ ,\ \tan^{-۱}(\frac{۱}{x})\sim\frac{۱}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{۱}{x}\right)}{\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{x}\right)}=\frac{۰}{۰}\Longrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}}=۱$$

۳۳. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+۲)!+(n+۱)!}{(n+۳)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+۲)(n+۱)!+(n+۱)!}{(n+۳)(n+۲)(n+۱)!}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+۲+۱)(n+۱)!}{(n+۳)(n+۲)(n+۱)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n+۲}=۰$$

۳۴. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to ۰+}(\frac{۱}{x})^{\sin x}=\infty^۰$$

$$\lim_{x\to ۰+}(\text{توان})(\text{پایه}-۱)=\lim_{x\to ۰+}(\sin x)(\frac{۱}{x}-۱)=\lim_{x\to ۰+}\left(\frac{\sin x}{x}-\sin x\right)=۱$$

$$\lim_{x\to ۰+}(\frac{۱}{x})^{\sin x}=e$$

۳۵. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to k}\frac{x^a-k^a}{k^b-x^b}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{H}\lim_{x\to k}\frac{ax^{a-۱}}{-bx^{b-۱}}=-\frac{a}{b}k^{a-b}$$

۳۶. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{۱+\sqrt{\frac{۱}{x}+\sqrt{\frac{۱}{x^۲}}}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{\frac{۱}{x}+\sqrt{\frac{۱}{x^۳}}}}}=۱$$

۳۷. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{[\frac{۱}{x}]}{\frac{۱}{x}}=\frac{[۰^-]}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

۳۸. گزینه‌ی ۲.

$$x \to +\infty \Longrightarrow \frac{a}{۲x} \longrightarrow ۰ \Longrightarrow \sin \frac{a}{۲x} \sim \frac{a}{۲x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲x} \cot \frac{a}{۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{۱}{۲x}\cos\frac{a}{۲x}}{\sin\frac{a}{۲x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{۱}{۲x}\cos\frac{a}{۲x}}{\frac{a}{۲x}} = \frac{۱\times۱}{a} = \frac{۱}{a}$$

۳۹. گزینه‌ی ۱. $\sin\frac{۱}{x}$ در نقطه‌ای به‌طول صفر حد ندارد و بین ۱ و ۱− در نوسان است ولی حد مخرج بی‌نهایت و بنابراین حد کسر برابر صفر است.

۴۰. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to۰} \frac{\operatorname{Arc}\tan x - \operatorname{Arc}\sin x}{x(۱-\cos x)} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{x\to۰} \frac{\frac{۱}{۱+x^۲} - \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}}{۱-\cos x + x\sin x} =$$

$$\lim_{x\to۰} \frac{(۱+x^۲)^{-۱} - (۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}}{۱-\cos x + x\sin x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{x\to۰} \frac{-۲x(۱+x^۲)^{-۲} - x(۱-x^۲)^{-\frac{۳}{۲}}}{۲\sin x + x\cos x} =$$

$$\lim_{x\to۰} \frac{-۲(۱+x^۲)^{-۲} - (۱-x^۲)^{-\frac{۳}{۲}}}{۲\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \frac{-۲-۱}{۲+۱} = -۱$$

۴۱. گزینه‌ی ۴. $D_f = \{x | x > ۰\}$، پس x نمی‌تواند به سمت ۰^- میل کند.

۴۲. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-۳x}}{e^x - e^{-۳x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(۱+\frac{۱}{e^{۴x}}\right)}{e^x\left(۱-\frac{۱}{e^{۴x}}\right)} = \frac{۱+۰}{۱-۰} = ۱$$

۴۳. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to۰^-} \frac{\sin ۲x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to۰^-} \frac{\sin ۲x}{\sqrt{۲\sin^۲ x}} = \lim_{x\to۰^-} \frac{\sin ۲x}{\sqrt{۲}|\sin x|} = \lim_{x\to۰^-} \frac{۲x}{\sqrt{۲}|x|}$$

$$= \lim_{x\to۰^-} \frac{۲x}{-\sqrt{۲}x} = -\sqrt{۲}$$

۴۴. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to۰} \frac{\sin x}{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱-\tan x}} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to۰} \frac{\sin x}{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱-\tan x}} \times \frac{\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱-\tan x}}{\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱-\tan x}}$$

$$= \lim_{x\to۰} \frac{\sin x(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱-\tan x})}{۲\tan x} = \lim_{x\to۰} \frac{x(\sqrt{۱+۰}+\sqrt{۱-۰})}{۲x} = ۱$$

۴۵. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\tan x - ۱}{۴x-\pi} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱+\tan^۲ x}{۴} = \frac{۱+۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۴۶. گزینه‌ی ۳.

$$f(۰) = a-۲\ ,\ \lim_{x\to۰^-} f(x) = \lim_{x\to۰^-} \frac{x(-۱)}{-۲x} = \frac{۱}{۲}$$

$$f(۰) = \lim_{x\to۰^-} f(x) \Longrightarrow a-۲ = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow a = \frac{۵}{۲}$$

۴۷. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۲+} f(x) = \lim_{x\to ۲+} ([x]+a) = ۲+a$$

$$\lim_{x\to ۲+} f(x) = f(۲) \text{ یا } ۲+a = ۴ \text{ یا } a = ۲.$$

$$\lim_{x\to ۲-} ([x]+bx) = ۱+۲b,\ \lim_{x\to ۲-} f(x) = ۳ \Longrightarrow ۱+۲b = ۳ \Longrightarrow b = ۱$$

۴۸. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sin(x-۱)}{\sqrt{x}-۱} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{x\to ۱} \frac{\cos(x-۱)}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}} = \frac{۲\times ۱}{۱} = ۲$$

شرط پیوستگی: $\lim_{x\to ۱} f(x) = f(۱)$، لذا کافی است $m = ۲$ انتخاب شود.

۴۹. گزینه‌ی ۳.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow g\,o\,f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(۱) = ۲ & x > ۰ \\ g(۰) = ۱ & x = ۰ \\ g(-۱) = ۲ & x < ۰ \end{cases}$$

۵۰. گزینه‌ی ۴.

$$f(a) = a,\ \lim_{x\to a+} f(x) = ۲a - \frac{a^۳}{a^۲} = a,\ \lim_{x\to a-} f(x) = \frac{a^۲}{a} = a$$

$$f(a) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$$

۵۱. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\arctan x}{x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{۱+x^۲} = ۱$$

بنابراین باید $f(۰) = ۱$ تا تابع f در نقطه ۰ پیوسته باشد.

۵۲. گزینه‌ی ۴. باید پیوستگی تابع را در نقاط صحیح از فاصله‌ی $(-۱, ۲)$ بررسی کنیم، یعنی نقاط $x = ۰, ۱$.

$$f(۰) = ۰ - ۰,\ \lim_{x\to ۰+} f(x) = ۰ - ۰ = ۰,\ \lim_{x\to ۰-} f(x) = ۱ + ۱ = ۲$$

$$f(۱) = ۱ - ۱ = ۰,\ \lim_{x\to ۱+} f(x) = ۱ - ۱ = ۰,\ \lim_{x\to ۱-} f(x) = ۰ + ۰ = ۰$$

بنابراین تابع f در فاصله‌ی $(-۱, ۲)$ فقط در $x = ۰$ ناپیوسته است.

۵۳. گزینه‌ی ۳. گزینه (۱) غلط است زیرا در $x = ۱$ تعریف نشده است، لذا گزینه (۲) هم غلط است. از طرفی $\lim_{x\to ۱-} f(x) = ۰$ و $\lim_{x\to ۱} \sin(\pi x) = ۰$ بنابراین گزینه (۴) هم غلط است. $\lim_{x\to ۱+} f(x) = \lim_{x\to ۱-} f(x) = ۰$

۵۴. گزینه‌ی ۲.

$$f(۰) = ۰ + ۴[\frac{\pi}{۲}] = ۴ \times ۱ = ۴,\ \lim_{x\to ۰-} (۳x + ۲a[۲x]) = -۲a$$

$$-۲a = ۴ \Longrightarrow a = -۲$$

۵۵. گزینه‌ی ۱. دامنه‌ی تعریف تابع $\mathbb{R} - \{۰\}$ است، بنابراین در نقطه $x = ۰$ گسسته است.

۵۶. گزینه‌ی ۲. گسستگی این تابع باید در نقاط $x = ۰$ و $x = ۱$ مورد بررسی قرارگیرد.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} (-۱) = -۱,\ \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (x-۱) = -۱, f(۰) = -۱$$

تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x^۲ - ۱) = ۰,\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (-۱) = -۱, f(۱) = -۱$$

تابع در نقطه‌ی $x = ۱$ از چپ پیوسته و از سمت راست گسسته می‌باشد.

۵۷. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to ۱^+} \left(x^۲ - \frac{x-۱}{x-۱}\right) = ۱ - ۱ = ۰,\ \lim_{x\to ۱^-} \left(x^۲ + \frac{x-۱}{x-۱}\right) = ۱ + ۱ = ۲, f(۱) = ۲$$

$$f(۱) = \lim_{x\to ۱^-} f(x)$$

۵۸. گزینه‌ی ۱.

$$f(n) = ۴n - ۳n = n,\ \lim_{x\to n^+} f(x) = ۴n + ۳(-n-۱) = n - ۳$$

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = ۴(n-۱) + ۳(-n) = n - ۴ \text{ ، } \lim_{x\to n^+} f(x) \neq \lim_{x\to n^-} f(x)$$

۵۹. گزینه‌ی ۴.

$$\text{مجموعه نقاط پیوستگی} = \mathbb{R} - \{-۱, -۲, ۰, ۱, ۲\}$$

۶۰. گزینه‌ی ۱.

$$f(x) = (-۱)^{[x]} = \begin{cases} +۱ & ۲k \leqslant x < ۲k+۱ \\ -۱ & ۲k'-۱ \leqslant x < ۲k' \end{cases} \qquad (k, k' \in Z)$$

بنابراین تابع در نقاط صحیح ناپیوسته است.

۶۱. گزینه‌ی ۴.

$$\operatorname{sgn}[|x|] = \begin{cases} ۰ & ۰ \leqslant |x| < ۱ \\ ۱ & |x| \geqslant ۱ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & -۱ < x < ۱ \\ ۱ & x \geqslant ۱ \text{ یا } x \leqslant -۱ \end{cases}$$

لذا تابع در نقاط $x = ۱$ و $x = -۱$ ناپیوسته است.

۶۲. گزینه‌ی ۳.

$$g^۲(x) + g(x) < ۰, g^۲(x) + g(x) = ۰ \Longrightarrow g(x) = ۰, g(x) = -۱$$

$$\Longrightarrow -۱ < g(x) < ۰ \Longrightarrow \{x | -۱ < g(x) < ۰\}$$

۶۳. گزینه‌ی ۱. تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ + ۳x - ۱۰}{x-۲} & x \neq ۲ \\ ۷ & x = ۲ \end{cases}$ به‌ازای هر x حقیقی پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = ۷ = f(۲)$$

۶۴. گزینه‌ی ۲. تابع $f(x)+g(x)=\begin{cases}۶x & x\geqslant ۱\\ ۶ & x<۱\end{cases}$ ، در $x_۰=۱$ پیوسته است.

۶۵. گزینه‌ی ۲.

$$\text{حد تابع = مقدار تابع} \Longrightarrow ۳x^۳-۴x^۲-۷x=۰ \Longrightarrow x(۳x^۲-۴x-۷)=۰ \Longrightarrow x=۰, x=-۱, x=\frac{۷}{۳}$$

پس تابع در $x=۰$ و $x=-۱$ پیوسته است.

۶۶. گزینه‌ی ۳. تابع f به معادله $f(x)=[x]$ در نقاط $x_۰\in Z$ حد ندارد و پیوسته هم نیست. برای اینکه این تابع در نقاط $x_۰\in Z$ پیوسته باشد باید کاری کنیم تا عامل $[x]$ از مسئله حذف شود، لذا پس از فاکتورگیری از $[x]$، ضریب آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x)=(a^۲-۳a+۲)[x]+۲x \Longrightarrow a^۲-۳a+۲=۰ \Longrightarrow a=۱\ ,\ a=۲$$

۶۷. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\sqrt{۳}, \lim_{x\to ۰^-} f(x)=\sqrt{۳}, f(۰)=۰$$

بنابراین، این تابع در نقطه $x_۰=۰$ پیوسته نیست، نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ، ولی در نقطه $x_۰=۰$ حد دارد.

۶۸. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases}x^۲-۴x+۳\geqslant ۰ \Longrightarrow x\geqslant ۳, x\leqslant ۱ \Longrightarrow D_f=\{x|x\geqslant ۳, x\leqslant ۱\}\\ x-۲=۰ \Longrightarrow x=۲\notin D_f\end{cases}$$

۶۹. گزینه‌ی ۴.

$$x^۵+۳۲ \Longrightarrow x^۵=(-۲)^۵ \Longrightarrow x=-۲ \ \to \ \text{مجانب قائم}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x^۵+۳۲}=۰ \Longrightarrow y=۰ \ \to \ \text{مجانب افقی}$$

۷۰. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۵+|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۵+x}=۱ \Longrightarrow y=۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{۵+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{۵-x}=-۱ \Longrightarrow y=-۱$$

۷۱. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{array}{l|l} x^۲+۲x-۱ & x \\ \hline \vdots & x+۲ \\ \hline -۱ & \end{array} \Longrightarrow y=x+۲ \Longrightarrow y-x-۲=۰$$

۷۲. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{array}{l|l} x^۲+۳ & x-۱ \\ \hline \vdots & x+۱ \\ \hline ۴ & \end{array} \Longrightarrow y=x+۱ \Longrightarrow \text{عرض از مبدأ}=۱$$

۷۳. گزینه‌ی ۴.

اگر: $x \to +\infty \Longrightarrow y \to +\infty + \infty \Longrightarrow y \to +\infty$ مجانب افقی ندارد

اگر: $x \to -\infty \Longrightarrow y \to -\infty + \infty$ مبهم است

رفع ابهام:

$$x \to -\infty \Longrightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 3} \sim -\sqrt{1}\left(x + \frac{6}{2}\right) \sim -(x+3)$$

$$\lim_{x \to -\infty}(x + 4 - \sqrt{x^2 - 6x + 3}) = \lim_{x \to -\infty}(x + 4 - x - 3) \Longrightarrow y = 1$$

۷۴. گزینه‌ی ۲. عبارت $x^2 - 2x + 4$ ریشه حقیقی ندارد و بنابراین مجانب قائم ندارد، از طرفی:

$$\lim_{x \to \infty}\left(3 + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 4}\right) = 3 + 0 \Longrightarrow y = 3 \to \text{مجانب افقی}$$

۷۵. گزینه‌ی ۱.

$$y = 1 \Longrightarrow \frac{1}{b} = 1 \Longrightarrow b = 1 \text{: مجانب افقی}$$

$$(3, 2) \Longrightarrow 2 = \frac{3 + a}{3b + 2} \Longrightarrow 6b + 4 = 3 + a \Longrightarrow a = 7$$

مدیریت

۱. حد تابع $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$ هنگامی که x به سمت $+\infty$ میل کند، کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) ۱ ۲) e ۳) e^2 ۴) $2e$

۲. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leqslant 1 \\ ax^2 + x & x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۳. اگر تابع $y = [x - 1] + 2$ مفروض و منظور از $[\cdots]$ جزء صحیح باشد، حد چپ و راست این تابع در نقطه $x = -1$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) $-1, 0$ ۲) $0, 1$ ۳) $2, -1$ ۴) برابر و مساوی -1

۴. طول نقطه گسستگی تابع $y = \ln(x^3 - 1)^2$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) فاقد نقطه گسستگی

۵. تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leqslant 1 \\ x + a & x > 1 \end{cases}$ به‌ازای چه مقادیر a، در $x = 1$ پیوسته است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۱ ۲) -2 ۳) -1 ۴) $+2$

۶. عبارت $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{2}{t} + 1\right)^{2t}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $2e$ ۲) e ۳) e^2 ۴) e^4

۷. نقطه گسستگی تابع $y = \frac{x}{e^{2x} - 1}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۱ ۲) صفر ۳) e ۴) e^2

۸. مقدار $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) -1 ۲) صفر ۳) -1 ۴) -2

۹. حاصل عبارت $\lim_{x \to 0^-} \frac{3 + x}{2 + 2^{\frac{1}{x}}}$ (حد چپ در نقطه $x = 0$) کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) صفر ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۰. حاصل عبارت $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - x}{x}$ (حد چپ در نقطه $x = 0$) کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۱۱. حاصل عبارت $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) e

۱۲. طول نقطه گسستگی تابع f به معادله $y=\frac{x}{\sin x+\frac{3}{2}}$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) فاقد گسستگی است

۱۳. حد عبارت $\frac{(x^2-1)\cdot\sin x}{2x(x+2)}$ هنگامی که x به سمت صفر میل کند، کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۴. حد راست تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+x & x\leqslant 1\\ 3x+1 & x>1\end{cases}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) فاقد حد راست

۱۵. حد عبارت $\frac{10^x-e^{2x}}{x}$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $10-2e$ ۲) $10-2e^2$ ۳) $\ln 10-2$ ۴) صفر

۱۶. حد راست تابع $f(x)=\frac{2x-1}{4^{\frac{1}{x}}+2}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۷. حد عبارت $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱ ۲) $\sqrt{e}$ ۳) e^2 ۴) ∞

۱۸. حد عبارت $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) صفر ۲) ۴ ۳) $4x^3$ ۴) $4x$

۱۹. با فرض $x>0$ طول نقطه گسستگی تابع با ضابطه $y=\frac{x}{\ln|x|-1}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) e

۲۰. حد چپ تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x-[x]}{x+1}$ در $x=1$، کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۲۱. حد چپ تابعی به معادله $y=\frac{2-2x}{1+4^{\frac{1}{x}}}$ در $x=0$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۲. نقطه گسستگی تابع حقیقی به معادله $y=\frac{2+2x}{x-4^{\frac{1}{x}}}$ با کدام طول است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۰،۲ ۲) ۰،۱ ۳) -1،۱ ۴) -1،۲

۲۳. مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{n!(2n^2)}{(n+1)!(n+2)}$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ∞

۲۴. تعداد نقاط گسستگی تابع f با ضابطه $f(x)=[x]+x^۲$، در فاصله $۰ \leqslant x < ۵$، $x \in R$ کدام است؟ ۱۳۷۸

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۵. حد چپ تابع با ضابطه‌ی $F(x)=\frac{x-[x]}{x+۱}$ در $x=۱$ کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۶. طول نقطه گسستگی تابع $y=\frac{x^۲}{e^{x^۲}-e^{۲x}}$ کدام است ۱۳۷۹

۱) ۱, ۲ ۲) ۰, ۲ ۳) ۰, −۲ ۴) −۱, −۲

۲۷. حد عبارت $\lim_{x\to ۲}\frac{۲^x-x^۲}{x-۲}$ کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $۴\ln ۲$ ۴) $۴(\ln ۲-۱)$

۲۸. مقدار حد، $\lim_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{۱}{x^۲}\right)^x$، کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) e ۲) ∞ ۳) ۱ ۴) $e^۲$

۲۹. حاصل عبارت $\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{۱+x})^{x^۲}$ برابر است با: ۱۳۸۲

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) $\frac{۱}{e}$

۳۰. اگر $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ برای هر x حقیقی و $n=۱,۲,۳,\ldots$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ کدام است؟ ۱۳۸۲

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) موجود نیست

۳۱. حاصل $\lim_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{x^۲}\right)^x$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) ۱ ۲) e ۳) $\frac{۱}{e}$ ۴) $\frac{۱}{۲e}$

۳۲. طول نقطه انفصال نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۲}{\ln(x+۲\sqrt{x})}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) ۲ ۲) $-۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

۳۳. حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{C_n^۲}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{۲x}=e^{۱\times ۲}=e^۲$$

۲. گزینه‌ی ۲.

$$f(۱)=۲-۱=۱,\ \lim_{x\to ۱^+}f(x)=a+۱,\ \lim_{x\to ۱^-}f(x)=۲-۱=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)\Longrightarrow a+۱=۱\Longrightarrow a=۰$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to -۱^+}([x-۱]+۲)=-۲+۲=۰,\ \lim_{x\to -۱^-}([x-۱]+۲)=-۳+۲=-۱$$

۴. گزینه‌ی ۳. به‌ازای $x=۱$ عبارت $(x^۳-۱)^۲$ مساوی صفر می‌شود و $\ln ۰$ تعریف نشده است، بنابراین تابع به ازای $x=۱$ گسسته است.

۵. گزینه‌ی ۲.

$$f(۱)=۱-۲=-۱,\ \lim_{x\to ۱^+}f(x)=۱+a,\ \lim_{x\to ۱^-}f(x)=۱-۲=-۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)\Longrightarrow ۱+a=-۱\Longrightarrow a=-۲$$

۶. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{۲}{t}+۱\right)^{۲t}=e^{۲\times ۲}=e^۴$$

۷. گزینه‌ی ۲.

$$e^{۲x}-۱=۰\Longrightarrow e^{۲x}=۱\Longrightarrow ۲x=۰\Longrightarrow x=۰$$

۸. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{H}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۱}=۰$$

۹. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۳+x}{۲+۲^{\frac{۱}{x}}}=\frac{۳+۰^-}{۲+۲^{-\infty}}=\frac{۳}{۲}$$

۱۰. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{e^x-x}{x}=\frac{۱-۰^-}{۰^-}=-\infty$$

۱۱. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{۱+x}\right)^x=۱^\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(\text{توان})(\text{پایه}-۱)=\lim_{x\to\infty}(x)(\frac{x}{۱+x}-۱)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{۱+x}=-۱$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{۱+x})^x=e^{-۱}=\frac{۱}{e}$$

۱۲. گزینه‌ی ۴.

$$\sin x+\frac{۳}{۲}=۰\Longrightarrow \sin x=-\frac{۳}{۲}\Longrightarrow \text{جواب ندارد}$$

بنابراین تابع f فاقد گسستگی است.

۱۳. گزینه‌ی ۲.

$$x\to ۰\Longrightarrow \sin x\sim x\Longrightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{(x^۲-۱)x}{۲x(x+۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲-۱}{۲(x+۲)}=-\frac{۱}{۴}$$

۱۴. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(۳x+۱)=۴$$

۱۵. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱۰^x - e^{۲x}}{x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{x\to ۰}\frac{۱۰^x \ln ۱۰ - ۲e^{۲x}}{۱} = \ln ۱۰ - ۲$$

۱۶. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲x-۱}{۴^{\frac{۱}{x}}+۲} = \frac{-۱}{۴^{+\infty}+۲} = -\frac{۱}{\infty} = ۰$$

۱۷. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{۲x}} = e^{۱\times\frac{۱}{۲}} = e^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{e}$$

۱۸. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^۴ - x^۴}{h} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{h\to ۰}\frac{۴(x+h)^۳}{۱} = ۴x^۳$$

۱۹. گزینه‌ی ۴.

$$\ln|x| - ۱ = ۰ \Longrightarrow \ln|x| = ۱ \Longrightarrow |x| = e \Longrightarrow x = \pm e \xrightarrow{x>۰} x = e$$

۲۰. گزینه‌ی ۳.

$$۰ < x < ۱ \Longrightarrow [x] = ۰ \Longrightarrow \lim_{x\to ۱^-}\frac{x-[x]}{x+۱} = \lim_{x\to ۱^-}\frac{x-۰}{x+۱} = \frac{۱}{۲}$$

۲۱. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲-۲x}{۱+۴^{\frac{۱}{x}}} = \frac{۲-۰}{۱+۴^{\frac{۱}{۰^-}}} = \frac{۲}{۱+۴^{-\infty}} = \frac{۲}{۱+\frac{۱}{۴^{+\infty}}} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

۲۲. گزینه‌ی ۱.

$$x - ۴^{\frac{۱}{x}} = ۰ \Longrightarrow x = ۴^{\frac{۱}{x}} \Longrightarrow x = ۲$$

از طرفی $x = ۰$ کسر $\frac{۱}{x}$ را بی‌معنی می‌کند پس یکی دیگر از نقاط گسستگی تابع $x = ۰$ است. بنابراین نقاط گسستگی عبارتند از: $x = ۰, x = ۲$.

۲۳. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!(۲n)^۲}{(n+۱)n!(n+۲)} = \lim_{n\to\infty}\frac{۴n^۲}{n^۲+۳n+۲} = \lim_{n\to\infty}\frac{۴n^۲}{n^۲} = ۴$$

۲۴. گزینه‌ی ۴. عبارت $[x]$ به‌ازای $x \in z$ ناپیوسته است، بنابراین در بازه‌ی $۰ \leqslant x < ۵$، عبارت $[x]$ به‌ازای $x = ۱$، $x = ۲$، $x = ۳$ و $x = ۴$ ناپیوسته است.

۲۵. گزینه‌ی ۳.

$$۰ < x < ۱ \Longrightarrow [x] = ۰ \Longrightarrow \lim_{x\to ۱^-}\frac{x-۰}{x+۱} = \frac{۱-۰}{۱+۱} = \frac{۱}{۲}$$

۲۶. گزینه‌ی ۲.

$$e^{x^۲} - e^{۲x} = ۰ \Longrightarrow e^{x^۲} = e^{۲x} \Longrightarrow x^۲ = ۲x \Longrightarrow x(x-۲) = ۰ \Longrightarrow x = ۰, x = ۲$$

۲۷. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲^x - x^۲}{x-۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{x\to ۲}\frac{۲^x \ln ۲ - ۲x}{۱} = ۴\ln ۲ - ۴$$

۲۸. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(۱+\frac{۱}{x^۲}\right)^x = ۱^\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}(\text{توان})(\text{پایه}-۱) = \lim_{x\to +\infty}(x)(۱+\frac{۱}{x^۲}-۱) = \lim_{x\to +\infty}(\frac{x}{x^۲}) = ۰$$

$$\lim_{x\to \infty}(۱+\frac{۱}{x^۲})^x = e^۰ = ۱$$

۲۹. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{۱+x}\right)^{x^۲} = ۱^\infty$$

$$\lim_{x\to \infty}(\text{توان})(\text{پایه}-۱) = \lim_{x\to \infty}(x^۲)(\frac{x}{۱+x}-۱) = \lim_{x\to \infty}(\frac{-x^۲}{۱+x}) = \lim_{x\to \infty}(-x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{۱+x}\right)^{x^۲} = e^{-\infty} = \frac{۱}{e^\infty} = ۰$$

۳۰. گزینه‌ی ۱. همواره $-۱ \leqslant \sin x \leqslant ۱$، وقتی $n \to \infty$، داریم $\frac{\sin nx}{\infty} = ۰$.

۳۱. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to \infty}\left(۱+\frac{۱}{x^۲}\right)^x = ۱^\infty$$

$$\lim_{x\to \infty}(\text{توان})(\text{پایه}-۱) = \lim_{x\to \infty}(x)(۱+\frac{۱}{x^۲}-۱) = \lim_{x\to \infty}(\frac{x}{x^۲}) = ۰ \ , \ \lim_{x\to \infty}\left(۱+\frac{۱}{x^۲}\right)^x = e^۰ = ۱$$

۳۲. گزینه‌ی ۴.

$$\ln(x+۲\sqrt{x}) = ۰ \Longrightarrow x+۲\sqrt{x} = e^۰ \Longrightarrow ۲\sqrt{x} = ۱-x$$

$$۴x = x^۲ - ۲x + ۱ \Longrightarrow x^۲ - ۶x + ۱ = ۰$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{۳ \pm \sqrt{۹-۱}}{۱} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۳+۲\sqrt{۲} & \text{غ‌ق‌ق} \\ x = ۳-۲\sqrt{۲} & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

۳۳. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{n\to \infty}\frac{۱+۲+\cdots+n}{C_n^۲} = \lim_{n\to \infty}\frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{\frac{n!}{۲!(n-۲)!}} = \lim_{n\to \infty}\frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{\frac{n(n-۱)}{۲}} = \lim_{n\to \infty}\frac{n^۲}{n^۲} = ۱$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

حسابداری

۱. حد عبارت $\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x}$ وقتی $x \to \infty$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) e^{-2} ۲) ۱ ۳) بی‌نهایت ۴) e^{2}

۲. حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-2}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳. طول نقطه انفصال تابع $y=\frac{x-5}{e^{2x}-16}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) صفر ۲) $\ln 8$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\ln 4$

۴. در ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} e^x+e^{-x} & x \geqslant 0 \\ 2a-x & x<0 \end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۵. حاصل $\lim_{x\to 0^+} \frac{2+x}{4+3^{\frac{1}{x}}}$ (حد راست) کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۶. حد عبارت $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱ ۲) e^2 ۳) $\sqrt[3]{e^2}$ ۴) $\sqrt[3]{e^2}$

۷. طول نقطه گسستگی تابع $y=\ln(x^2+1)$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $x=0$ ۲) $x \leqslant 0$

۳) $x<1$ ۴) تابعی همواره پیوسته است.

۸. حد عبارت $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1+2+3+\cdots+n}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $+\infty$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۹. مجموعه نقطه گسستگی تابع $y=\frac{x}{e^x+2}$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\{-1\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\{1\}$ ۴) ϕ

۱۰. به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<1 \\ ax^2+a & x \geqslant 1 \end{cases}$ در $x=1$ دارای حد است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۱. حد عبارت $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۲. حد $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{3}{2x})^{x}$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $e^{-\frac{3}{4}}$ ۲) $e^{-\frac{2}{3}}$ ۳) $e^{\frac{2}{3}}$ ۴) ۱

۱۳. حد چپ تابع $f(x)=\frac{x+2}{3^{-\frac{1}{x}}+1}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۱۴. حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\sqrt{x^2+12}-4}$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۴

۱۵. به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & x\leqslant 1\\ 2ax+4 & x>1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۲− ۲) ۳− ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶. نقطه گسستگی تابع $y=\frac{x-1}{\ln x-2}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) e ۴) e^2

۱۷. حد عبارت $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2x}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱ ۲) e ۳) e^{-2} ۴) e^{-4}

۱۸. حد عبارت $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-x^5}{h}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $5x^4$ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۰

۱۹. طول نقطه گسستگی تابع f با ضابطه $y=\frac{x^2}{e^x-3}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $\ln 3$

۲۰. حد راست تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x-[x]}{x-3}$ در نقطه $x=3$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $+\infty$

۲۱. حد عبارت $\lim_{x\to -1}\frac{\ln(x+2)}{x+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

۲۲. تعداد نقاط گسستگی تابعی با ضابطه $y=\frac{x}{5-[x]}$ که در آن $0\leqslant x\leqslant 4$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۳. مقدار $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x^2}$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) e

۲۴. مقدار حد $\lim_{n\to\infty} \frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{C_n^۳}$ کدام است؟ $(C_n^۳ = \binom{n}{۳})$ ۱۳۷۸

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

۲۵. اگر $\lim_{n\to\infty} \left(۱+\frac{a}{n}\right)^{۲n} = e^{\frac{۳}{۴}}$ باشد، مقدار a کدام است؟ ۱۳۷۸

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۶. طول نقطه گسستگی تابع f به ضابطه $f(x) = [۳x] + x^۲$ با شرط $۰ \leqslant x < ۱$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.) ۱۳۷۸

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}$ ۳) ۱, ۰ ۴) ۰

۲۷. نقطه گسستگی تابع $y = \frac{۳^x - ۱}{۴^x - ۸}$ کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\ln ۲$ ۳) $۳\ln ۳$ ۴) ۰

۲۸. حد عبارت $\frac{(n+۲)!n!}{۴[(n+۱)!]^۲}$ وقتی $n \to \infty$ کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۲۹. حد عبارت $\lim_{x\to+\infty} xe^{-۲x}$ برابر است با: ۱۳۸۰

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۲

۳۰. حد تابع $y = \left(۱ - \frac{۲}{x^۲}\right)^x$ هنگامی که x به سمت بی‌نهایت میل کند، برابر است با: ۱۳۸۱

۱) e ۲) ۱ ۳) $e^۲$ ۴) $۲e$

۳۱. مقدار حد عبارت $\lim_{x\to۶+} \frac{[x]-۶}{x^۲-۳۶}$ ، برابر است با: ۱۳۸۲

۱) صفر ۲) ∞ ۳) $-\infty$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۳۲. حاصل $\lim_{x\to۰} (e^x + ۳x)^{\frac{۱}{x}}$ کدام است؟ ۱۳۸۲

۱) e ۲) $e^۲$ ۳) $e^۳$ ۴) $e^۴$

۳۳. حاصل $\lim_{x\to-۲} \frac{x+\sqrt{۲-x}}{x^۲+۲x}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-۱}{x}\right)^{۲x} = \lim_{x\to\infty} \left(۱-\frac{۱}{x}\right)^{۲x} = e^{-۱\times۲} = e^{-۲}$$

۲. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to۱} \frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+x-۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{x\to۱} \frac{۴x-۳}{۲x+۱} = \frac{۱}{۳}$$

۳. گزینه‌ی ۴.

$$e^{۲x} - ۱۶ = ۰ \Longrightarrow e^{۲x} = ۱۶ \Longrightarrow ۲x = \ln ۱۶ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۲}\ln ۱۶ = \ln\sqrt{۱۶} \Longrightarrow x = \ln ۴$$

۴. گزینه‌ی ۳.

$$f(۰) = e^{۰} + e^{۰} = ۲,\ \lim_{x \to ۰^+} (e^{x} + e^{-x}) = ۲,\ \lim_{x \to ۰^-} (۲a - x) = ۲a$$

$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \lim_{x \to ۰^-} f(x) \Longrightarrow ۲ = ۲a \Longrightarrow a = ۱$$

۵. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{۲ + x}{۴ + ۳^{\frac{۱}{x}}} = \frac{۲ + ۰^+}{۴ + ۳^{+\infty}} = \frac{۲}{\infty} = ۰$$

۶. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x \to \infty} \left(۱ + \frac{۲}{۳x}\right)^{x} = \lim_{x \to \infty} \left(۱ + \frac{\frac{۲}{۳}}{x}\right)^{x} = e^{\frac{۲}{۳} \times ۱} = e^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{e^{۲}}$$

۷. گزینه‌ی ۴. $(x^{۲} + ۱)$ هیچ‌گاه صفر و منفی نمی‌شود، در نتیجه این تابع همواره پیوسته است.

۸. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{۱ + ۲ + \cdots + n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{\frac{n(n+۱)}{۲}} = \lim_{n \to \infty} \frac{۲(n-۱)(n-۲)!}{(n+۱)} = \lim_{n \to \infty} \frac{۲n\left(۱ - \frac{۱}{n}\right)(n-۲)!}{n\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{۲\left(۱ - \frac{۱}{n}\right)(n-۲)!}{\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)} = \frac{۲\left(۱ - \frac{۱}{\infty}\right)(\infty - ۲)!}{\left(۱ + \frac{۱}{\infty}\right)} = \frac{۲ \times ۱ \times \infty}{۱} = \infty$$

۹. گزینه‌ی ۴.

$$e^{x} + ۲ = ۰ \Longrightarrow \text{ریشه ندارد} \Longrightarrow \text{مجموعه نقاط گسستگی} = \phi$$

۱۰. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x \to ۱^+} (ax^{۲} + a) = ۲a,\ \lim_{x \to ۱^-} (۲x + ۱) = ۳$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) \Longrightarrow ۲a = ۳ \Longrightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

۱۱. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{۱ + x} - \sqrt{۱ - x}}{۲x} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to ۰} \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} - \frac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}}}{۲} = \frac{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۱۲. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x \to \infty} \left(۱ - \frac{۳}{۲x}\right)^{x} = \lim_{x \to \infty} \left(۱ - \frac{\frac{۳}{۲}}{x}\right)^{x} = e^{-\frac{۳}{۲} \times ۱} = e^{-\frac{۳}{۲}}$$

۱۳. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x \to ۰^-} \frac{x + ۲}{۳^{-\frac{۱}{x}} + ۱} = \frac{۰^- + ۲}{۳^{+\infty} + ۱} = \frac{۲}{\infty} = ۰$$

۱۴. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x \to ۲} \frac{۲x - ۴}{\sqrt{x^{۲} + ۱۲} - ۴} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to ۲} \frac{۲}{\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱۲}}} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

۱۵. گزینه‌ی ۲.

$$f(۱) = a + ۱,\ \lim_{x \to ۱+} (۲ax + ۴) = ۲a + ۴,\ \lim_{x \to ۱-} (ax^۲ + ۱) = a + ۱$$

$$\lim_{x \to ۱+} f(x) = \lim_{x \to ۱-} f(x) \Longrightarrow ۲a + ۴ = a + ۱ \Longrightarrow a = -۳$$

۱۶. گزینه‌ی ۴.

$$\ln x - ۲ = ۰ \Longrightarrow \ln x = ۲ \Longrightarrow x = e^۲$$

۱۷. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x \to \infty} \left(۱ - \frac{۲}{x}\right)^{۲x} = e^{-۲ \times ۲} = e^{-۴}$$

۱۸. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{h \to ۰} \frac{(x+h)^۵ - x^۵}{h} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{h \to ۰} \frac{۵(x+h)^۴}{۱} = ۵x^۴$$

۱۹. گزینه‌ی ۴.

$$e^x - ۳ = ۰ \Longrightarrow e^x = ۳ \Longrightarrow x = \ln ۳$$

۲۰. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x \to ۳+} \frac{x - [x]}{x - ۳} = \frac{x - ۳}{x - ۳} = ۱$$

۲۱. گزینه‌ی ؟.

$$\lim_{x \to -۱} \frac{\ln(x+۲)}{x + \sqrt[۳]{x}} = \frac{\ln ۱}{-۱ - ۱} = \frac{۰}{-۲} = ۰$$

۲۲. گزینه‌ی ۳.

$$۵ - [x] = ۰ \Longrightarrow [x] = ۵ \Longrightarrow ۵ \leqslant x < ۶$$

اما در فاصله $۴ \leqslant x \leqslant ۰$ تابع در نقاط $x = ۱, ۲, ۳, ۴$ پیوستگی ندارد.

۲۳. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{۱+x}\right)^{x^۲} = ۱^{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\text{توان})(\text{پایه} - ۱) = \lim_{x \to +\infty} (x^۲)(\frac{x}{۱+x} - ۱) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^۲}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{۱+x}\right)^{x^۲} = e^{-\infty} = \frac{۱}{e^\infty} = \frac{۱}{\infty} = ۰$$

۲۴. گزینه‌ی ۱.

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

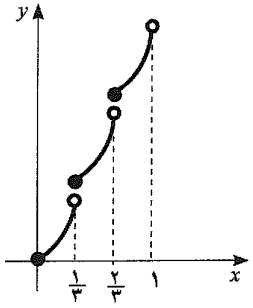
$$C_n^۳ = \frac{n!}{۳!(n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{۳!(n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}} = \lim_{n \to \infty} \frac{۳n^۲}{n^۳} = \lim_{n \to \infty} \frac{۳}{n} = ۰$$

۲۵. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{n \to \infty} \left(۱ + \frac{a}{n}\right)^{۲n} = e^{۲a} \Longrightarrow e^{۲a} = e^{\frac{۳}{۲}} \Longrightarrow ۲a = \frac{۳}{۲} \Longrightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

۲۶. گزینه‌ی ۲.



$$\circ \leqslant x < \frac{۱}{۳} \Longrightarrow \circ \leqslant ۳x < ۱ \Longrightarrow [۳x] = \circ \Longrightarrow f(x) = x^۲$$

$$\frac{۱}{۳} \leqslant x < \frac{۲}{۳} \Longrightarrow ۱ \leqslant ۳x < ۲ \Longrightarrow [۳x] = ۱ \Longrightarrow f(x) = ۱ + x^۲$$

$$\frac{۲}{۳} \leqslant x < \frac{۳}{۳} \Longrightarrow ۲ \leqslant ۳x < ۳ \Longrightarrow [۳x] = ۲ \Longrightarrow f(x) = ۲ + x^۲$$

۲۷. گزینه‌ی ۱.

$$۴^x - ۸ = \circ \Longrightarrow ۴^x = ۸ \Longrightarrow ۲^{۲x} = ۲^۳ \Longrightarrow ۲x = ۳ \Longrightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

۲۸. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+۲)!n!}{۴[(n+۱)!]^۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+۲)(n+۱)!n!}{۴(n+۱)!(n+۱)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+۲)n!}{۴(n+۱)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+۲)n!}{۴(n+۱)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+۲}{۴n+۴} = \frac{۱}{۴}$$

۲۹. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{۲x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲e^{۲x}} = \frac{۱}{\infty} = \circ$$

۳۰. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to\infty} \left(۱ - \frac{۲}{x^۲}\right)^x = ۱^\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} (\text{توان})(\text{پایه} - ۱) = \lim_{x\to\infty} (x)(۱ - \frac{۲}{x^۲} - ۱) = \lim_{x\to\infty} (\frac{-۲x}{x^۲}) = \circ$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(۱ - \frac{۲}{x^۲}\right)^x = e^\circ = ۱$$

۳۱. گزینه‌ی ۱. وقتی $x \to ۶^+$، $[x]$ برابر ۶ است و در نتیجه $[x] - ۶ = \circ$ است.

۳۲. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to\circ} (e^x + ۳x)^{\frac{۱}{x}} = ۱^\infty$$
$$\lim_{x\to\circ} (\text{توان})(\text{پایه} - ۱) = \lim_{x\to\circ} (\frac{۱}{x})(e^x + ۳x - ۱) = \frac{\circ}{\circ} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\circ} \frac{e^x + ۳}{۱} = ۴$$
$$\lim (e^x + ۳)^{\frac{۱}{x}} = e^۴$$

۳۳. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to-۲} \frac{x + \sqrt{۲ - x}}{x^۲ + ۲x} = \frac{\circ}{\circ} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-۲} \frac{۱ + \frac{-۱}{۲\sqrt{۲-x}}}{۲x + ۲} = \frac{۱ + \frac{-۱}{۴}}{-۴ + ۲} = \frac{-۳}{۸}$$

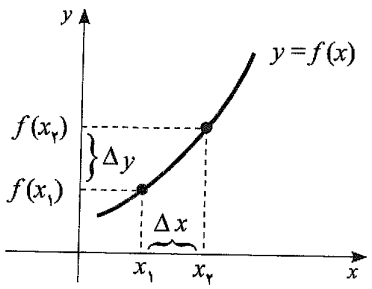
فصل ۵

مشتق

نمو تابع و نمو متغیر

۱ـ۵ همان‌طورکه در فصل تابع دیده شد، متغیر را با x و تابع را با y مشخص می‌کنند و بستگی میان آن‌ها را با f نشان می‌دهند و می‌نویسند: $y = f(x)$. حال اگر متغیر x را تغییر دهیم، تابع y نیز تغییر خواهد کرد.

۲ـ۵ تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$ را درنظر بگیرید. چنان‌چه مقدار x در این تابع از x_1 به x_2 تغییر کند، مقدار $f(x)$ از $f(x_1)$ به $f(x_2)$ تغییر خواهد کرد، یعنی تغییرات $f(x)$ وابسته به تغییرات x است، بنابراین x را متغیر مستقل و $f(x)$ را تابع یا متغیر وابسته می‌گوییم.



بنابه تعریف، مقدار تغییرات متغیر مستقل x را نمو متغیر می‌گویند و آن را با Δx نمایش می‌دهند، یعنی:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

و مقدار تغییرات تابع یا متغیر وابسته‌ی $f(x)$ را نمو تابع می‌گویند و آن را با Δy نمایش می‌دهند، یعنی:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

می‌دانیم که $\Delta x = x_2 - x_1$، بنابراین $x_2 = x_1 + \Delta x$، درنتیجه می‌توان نمو تابع را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

تست مشتق تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x(x-۱)(x-۲)(x-۳)$ در نقطه‌ی $x=۲$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) -۲

حل گزینه‌ی ۴.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x(x-۱)(x-۲)(x-۳)-۰}{x-۲}$$
$$=\lim_{x\to ۲}x(x-۱)(x-۳)=-۲$$

۶ـ۵ آخرین تعریفِ مشتق تابع در یک نقطه را می‌توان به‌صورت زیر در حل مسائل به‌کار برد:

$$(m-n)f'(x_۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+mh)-f(x_۰+nh)}{h}$$

مثال اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۵}{۳}$، آنگاه مقدار حد عبارت $\frac{f(۲+۴h)-f(۲+h)}{h}$ وقتی $h\to ۰$ را بیابید.

حل

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\Longrightarrow f'(۲)=\frac{۵}{۳}$$
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۴h)-f(۲+h)}{h}=(۴-۱)f'(۲)=۳f'(۲)=۳\times\frac{۵}{۳}=۵$$

مثال اگر $\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=۲\sqrt{x}$، آنگاه $f'(۴)$ را بیابید.

حل

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=(۱-(-۱))f'(x)=۲f'(x)$$
$$۲f'(x)=۲\sqrt{x}\Longrightarrow f'(x)=\sqrt{x}\Longrightarrow f'(۴)=\sqrt{۴}=۲$$

تست اگر $f'(۰)=۲$، آنگاه مقدار حد عبارت $\frac{f(۳h)-f(۵h)}{۲h}$ وقتی $h\to ۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

حل گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+۳h)-f(۰+۵h)}{۲h}=\frac{۱}{۲}(۳-۵)f'(۰)=-f'(۰)=-۲$$

تذکر: اگر $y=f(x)$ باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر y در واحد تغییر x، در $x_۱$ برابر با $f'(x_۱)$ است.

تست اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در واحد تغییر، در نقطه‌ی $x=۲$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ باشد، آنگاه حد عبارت $\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$ وقتی $h\to ۰$ کدام است؟

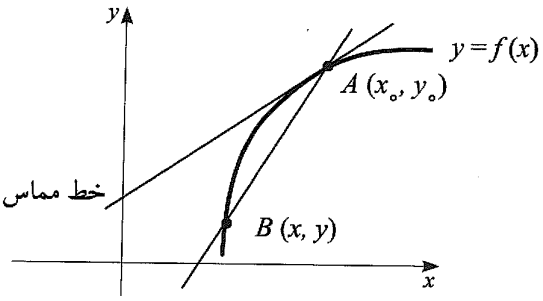
۱) -۳ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}=-f'(۲)=-\left(-\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۳}{۲}$$

تعبیر هندسی مشتق

۷ـ۵ اگر $A(x_0, y_0)$ نقطه‌ای روی نمودار $y = f(x)$ باشد، شیب خطی که از نقطه‌ی دلخواه $B(x, y)$ روی نمودار و نقطه‌ی A می‌گذرد برابر است با:



$$\text{شیب خط } AB = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

اگر B را خیلی نزدیک به A کنیم، آنگاه x به‌سمت x_0 میل خواهد کرد، خط AB بسیار نزدیک به خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی A خواهد بود. خواهیم داشت:

$$\underset{\text{حد شیب خط } AB}{B \to A} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

حد طرف چپ برابری بالا، شیب خط مماس بر منحنی تابع در نقطه‌ی A خواهد شد که آن را با m نشان می‌دهیم. از سوی دیگر حد طرف راست برابری بالا وقتی $x \to x_0$، همان مشتق $f(x)$ در نقطه‌ی x_0 یعنی $f'(x_0)$ است. پس:

$$m = f'(x_0)$$

و می‌توان گفت که شیب خط مماس بر منحنی تابع در A برابر است با آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع نسبت به تغییرات متغیر.

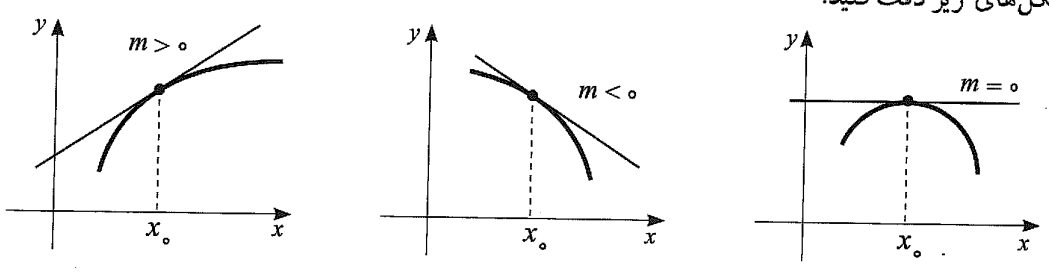
۸ـ۵ به‌طور خلاصه: مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ برابر است با شیب خط مماس بر منحنی، یعنی $m_{\text{مماس}} = f'(x_0)$.

مثال شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در نقطه‌ی $(2, 4)$ به‌دست آورید.

حل

$$m = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \Longrightarrow m = 4$$

۹ـ۵ به شکل‌های زیر دقت کنید.



۱۰ـ۵ اگر $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$، آنگاه خط مماس بر منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) بر محور xها عمود است و معادله‌ی آن $x = x_0$ است.

تعریف تابع مشتق

۵ـ۱۱ به تابع f' که با فرمول

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تعریف می‌شود، مشتق f نسبت به x می‌گوییم. دامنه‌ی f' عبارت است از مجموعه‌ی نقاطی که تابع f در آن‌جا مشتق‌پذیر است.

مثال مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را بیابید.

حل

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{۰}{۰}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \to ۰} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{۱}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

دستورها و قضیه‌های مشتق‌گیری

۵ـ۱۲ در دستورهای مشتق‌گیری u و v توابعی از x هستند و a، m و n اعداد ثابتند.

۵ـ۱۳ مشتق توابع جبری:

تابع	مشتق تابع	مثال	حل مثال
$y = a$	$y' = ۰$	$y = -\sqrt{۲}$	$y' = ۰$
$y = ax$	$y' = a$	$y = \frac{۱}{۳}x$	$y' = \frac{۱}{۳}$
$y = ax^n$	$y' = anx^{n-۱}$	$y = ۳x^۴$	$y' = ۱۲x^۳$
$y = u + v + \cdots$	$y' = u' + v' + \cdots$	$y = x^۳ - ۷x^۵$	$y' = ۳x^۲ - ۳۵x^۴$
$y = au^n$	$y' = anu'u^{n-۱}$	$y = (x - ۲x^۴)^۳$	$y' = ۳(۱ - ۸x^۳)(x - ۲x^۴)^۲$
$y = u.v$	$y' = u'v + v'u$	$y = x^۲(۵ + ۳x)^۵$	$y' = ۲x(۵ + ۳x)^۵ + ۵(۳)(۵ + ۳x)^۴x^۲$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^۲}$	$y = \frac{۳x^۲}{۲x + ۷}$	$y' = \frac{۶x(۲x+۷) - ۲(۳x^۲)}{(۲x+۷)^۲}$
$y = \frac{a}{v}$	$y' = \frac{-av'}{v^۲}$	$y = \frac{۵}{x^۴}$	$y' = \frac{-۵(۴x^۳)}{(x^۴)^۲}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y = \sqrt[۳]{(x^۲ - x)^۲}$	$y' = \frac{۲(۲x-۱)}{۳\sqrt[۳]{(x^۲ - x)}}$

مثال اگر $f(x)=\sqrt[۵]{x^۲+۴x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۴+h)-f(۴)}{h}$ را بیابید.

حل حد داده شده، تعریف $f'(۴)$ است. پس:

$$f'(x)=\frac{۲x+۴}{۵\sqrt[۵]{(x^۲+۴x)^۴}}\Longrightarrow f'(۴)=\frac{۱۲}{۵\sqrt[۵]{۳۲^۴}}=\frac{۳}{۲۰}$$

مثال مشتق تابع $f(x)=\dfrac{۲}{\sqrt{x+۳}-\sqrt{x+۱}}$ در نقطه‌ی $x=۱$ را بیابید.

حل ابتدا تابع داده شده را گویا می‌کنیم تا عمل مشتق‌گیری ساده‌تر شود.

$$f(x)=\frac{۲}{\sqrt{x+۳}-\sqrt{x+۱}}\times\frac{\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۱}}=\frac{۲(\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۱})}{x+۳-x-۱}$$
$$=\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۱}$$
$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}\Longrightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۴}$$

مثال اگر $f'(a)=۲$ و $f(a)=\dfrac{۱}{۲}$، مقدار مشتق تابع $g(x)=f^۲(x)+\dfrac{۱}{f(x)}$ در نقطه‌ی $x=a$ چقدر است؟

حل

$$g'(x)=۲f'(x)f(x)-\frac{f'(x)}{f^۲(x)}\Longrightarrow g'(a)=۲f'(a)f(a)-\frac{f'(a)}{f^۲(a)}$$
$$g'(a)=۲\times۲\times\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{\frac{۱}{۴}}=۲-۸=-۶$$

تست با فرض آن‌که $\dfrac{x}{۲x+۱}=f'\left(\dfrac{۱}{x-۱}\right)$ باشد، مقدار $f'(-۱)$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۱

حل گزینه‌ی ۳.

$$\frac{۱}{x-۱}=-۱\Longrightarrow -x+۱=۱\Longrightarrow x=۰\xrightarrow{\text{جاگذاری}}\frac{۰}{۰+۱}=۰$$

تست اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)g(۱+h)-f(۱)g(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

حل گزینه‌ی ۲. حد داده شده، تعریف مشتق تابع $t(x)=f(x)\cdot g(x)$ در نقطه‌ی $x=۱$ است. پس

$$t'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times\frac{۱}{x}+\frac{-۱}{x^۲}\times\sqrt{x}$$
$$t'(۱)=\frac{۱}{۲}\times۱+(-۱)(۱)=-\frac{۱}{۲}$$

۱۴ـ۵ عامل صفرکننده در مشتق: در برخی از توابع که به‌صورت حاصل‌ضرب چند عامل درهمند، اگر مشتق در نقطه‌ای که یکی از عامل‌ها به‌ازای آن صفر می‌شود را بخواهند، کافی است فقط از عامل صفرشونده مشتق بگیریم و در بقیه‌ی جملات ضرب کنیم و در آخر طول نقطه را در عبارت حاصل قرار دهیم.

مثال مقدار عددی مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(\sqrt{x}+۱)(x-۴)}{x^۲+۱}$ به‌ازای $x=۴$ چه‌قدر است؟

حل به‌ازای $x=۴$، عامل $x-۴$ صفر می‌شود. پس بقیه‌ی عبارت را $g(x)$ فرض می‌کنیم، $g(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{x^۲+۱}$ یعنی:

$$f(x)=(x-۴)g(x)\Longrightarrow f'(x)=۱\times g(x)\Longrightarrow f'(۴)=g(۴)=\frac{\sqrt{۴}+۱}{۱۶+۱}=\frac{۳}{۱۷}$$

تست فرض کنید $f(x)=(x-a)(۲x-a)(۳x-a)\cdots(nx-a)$. دراین‌صورت $f'(a)$ کدام است؟

۱) $n!a^{n-۱}$ ۲) $(n-۱)!a^n$ ۳) $(n-۱)!a^{n-۱}$ ۴) $n!a^n$

حل گزینه‌ی ۳. به‌ازای $x=a$، عامل $(x-a)$ صفر می‌شود، پس بقیه‌ی عبارت را $g(x)$ فرض کنیم،

$$f(x)=(x-a)g(x)\Longrightarrow f'(x)=۱\times g(x)$$

$$f'(a)=g(a)=(۲a-a)(۳a-a)\cdots(na-a)=a\times ۲a\times ۳a\times\cdots\times(n-۱)a$$

$$f'(a)=(۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times(n-۱))a^{n-۱}=(n-۱)!a^{n-۱}$$

۱۵ـ۵ مشتق توابع مثلثاتی:

تابع	مشتق تابع	مثال	حل مثال
$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	$y=\sin\sqrt{x}$	$y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$
$y=\sin^n u$	$y'=nu'\cos u\sin^{n-۱}u$	$y=\sin^۳(۲x)$	$y'=۳\times ۲\cos ۲x\sin^۲ ۲x$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\cos\frac{۱}{x}$	$y'=-\left(-\frac{۱}{x^۲}\right)\sin\frac{۱}{x}$
$y=\cos^n u$	$y'=-nu'\sin u\cos^{n-۱}u$	$y=\cos^۲ x$	$y'=-۲\sin x\cos x$
$y=\tan u$	$y'=u'(۱+\tan^۲ u)$	$y=\tan(۷x)$	$y'=۷(۱+\tan^۲ ۷x)$
$y=\tan^n u$	$y'=nu'(۱+\tan^۲ u)\tan^{n-۱}u$	$y=\tan^۴(۳x)$	$y'=۴\times ۳(۱+\tan^۲ ۳x)\tan^۳ ۳x$
$y=\cot u$	$y'=-u'(۱+\cot^۲ u)$	$y=\cot x$	$y'=-(۱+\cot^۲ x)$
$y=\cot^n u$	$y'=-nu'(۱+\cot^۲ u)\cot^{n-۱}u$	$y=\cot^۲(۴x)$	$y'=-۲\times ۴(۱+\cot^۲ ۴x)\cot ۴x$

مثال اگر $f(x) = x^۲ \sin x$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{۲}\right)}{x - \frac{\pi}{۲}}$ را بیابید.

حل حد داده شده، تعریف $f'\left(\dfrac{\pi}{۲}\right)$ است، پس:

$$f'(x) = ۲x \sin x + x^۲ \cos x \Longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲\left(\frac{\pi}{۲}\right) \sin \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi^۲}{۴} \cos \frac{\pi}{۲} = \pi + ۰ = \pi$$

تست اگر $f(۰) = ۰$ و $f(x) = \sin(۴x - f(x))$، آنگاه مقدار $f'(۰)$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$f'(x) = (۴ - f'(x)) \cos(۴x - f(x)) \Longrightarrow f'(۰) = (۴ - f'(۰)) \cos(۰ - f(۰))$$
$$\Longrightarrow f'(۰) = (۴ - f'(۰)) \cos(۰) \Longrightarrow f'(۰) = ۴ - f'(۰) \Longrightarrow f'(۰) = ۲$$

۱۶ـ۵ درکلیه‌ی فرمول‌های مشتق‌های مثلثاتی، کمان باید برحسب رادیان باشد، یعنی وقتی می‌گوییم $y = \sin x$ و $y' = \cos x$، کمان x برحسب رادیان است. می‌دانیم:

$$\text{رادیان} = \frac{\pi}{۱۸۰} \times \text{درجه}$$

بنابراین اگر کمان تابع مثلثاتی برحسب درجه باشد، ابتدا کمان‌ها را به رادیان تبدیل می‌کنیم، سپس از تابع حاصل نسبت به x مشتق می‌گیریم.

مثال اگر $f(x) = \tan x^\circ$، $f'(x)$ را بیابید.

حل

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{۱۸۰} x\right) \Longrightarrow f'(x) = \frac{\pi}{۱۸۰}\left(۱ + \tan^۲ \frac{\pi}{۱۸۰} x\right)$$

۱۷ـ۵ مشتق توابع معکوس مثلثاتی:

تابع	مشتق تابع	مثال	حل مثال
$y = \text{Arcsin}\, u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{۱ - u^۲}}$	$y = \text{Arcsin}\, x$	$y' = \dfrac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$
$y = \text{Arccos}\, u$	$y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{۱ - u^۲}}$	$y = \text{Arccos}\, x^۲$	$y' = \dfrac{-۲x}{\sqrt{۱ - (x^۲)^۲}}$
$y = \text{Arctan}\, u$	$y' = \dfrac{u'}{۱ + u^۲}$	$y = \text{Arctan}\, \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱ + (\sqrt{x})^۲}$
$y = \text{Arccot}\, u$	$y' = \dfrac{-u'}{۱ + u^۲}$	$y = \text{Arccos}\, \dfrac{۱}{x}$	$y' = \dfrac{-\left(-\frac{۱}{x^۲}\right)}{۱ + \left(\frac{۱}{x}\right)^۲}$

مثال مشتق تابع $y = \text{Arctan}\left(\frac{۱-x}{۱+x}\right)$ را حساب کنید و آن را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

حل

$$y' = \frac{\frac{-(۱+x)-(۱-x)}{(۱+x)^۲}}{۱+\left(\frac{۱-x}{۱+x}\right)^۲} = \frac{\frac{-۲}{(۱+x)^۲}}{\frac{(۱+x)^۲+(۱-x)^۲}{(۱+x)^۲}} = \frac{-۲}{۱+x^۲+۲x+۱+x^۲-۲x}$$
$$= \frac{-۲}{۲+۲x^۲} = \frac{-۱}{۱+x^۲}$$

مثال اگر $f(x) = \text{Arcsin}(\cos x)$ و $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$، مقدار $f'(x)$ چه‌قدر است؟

حل

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'}{\sqrt{۱-(\cos x)^۲}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{۱-\cos^۲ x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^۲ x}} = \frac{-\sin x}{|\sin x|}$$

و چون طبق فرض $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$، بنابراین $\sin x > ۰$ است. پس $|\sin x| = \sin x$، درنتیجه $f'(x) = -۱$.

تست اگر $y = \text{Arctan}(\text{Arccos}(\sin x^۳))$، آنگاه $\frac{dy}{dx}$ در نقطه‌ی $x = ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) وجود ندارد

حل گزینه‌ی ۲.

$$\text{Arccos}(\sin x^۳) = \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۲} - x^۳\right)\right) = \frac{\pi}{۲} - x^۳$$
$$y = \text{Arctan}(\frac{\pi}{۲} - x^۳) \Longrightarrow y' = \frac{-۳x^۲}{۱+\left(\frac{\pi}{۲}-x^۳\right)^۲} \Longrightarrow y'(۰) = ۰$$

۱۸ـ۵ مشتق توابع نمایی:

تابع	مشتق تابع	مثال	حل مثال
$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$	$y = ۲^x$	$y' = ۱ \times ۲^x \times \ln ۲$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = e^{\sin x}$	$y' = \cos x e^{\sin x}$

مثال مشتق توابع زیر را حساب کنید و آن را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۱) $y = \frac{a}{۲}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$ ۲) $y = \frac{۲^{۳x}-۱}{۲^x-۱}$

حل

۱) $$y' = \frac{a}{۲}\left(\frac{۱}{a}e^{\frac{x}{a}} + \frac{۱}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{a}{۲}\left(\frac{۱}{a}\right)(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = \frac{۱}{۲}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

۲) ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$y = \frac{(۲^x)^۳ - ۱^۳}{۲^x - ۱} = \frac{(۲^x - ۱)(۲^{۲x} + ۲^x + ۱)}{۲^x - ۱} = ۲^{۲x} + ۲^x + ۱$$
$$y' = ۲ \times ۲^{۲x} \times \ln ۲ + ۲^x \times \ln ۲ = (۲^{۱+۲x} + ۲^x) \ln ۲$$

مثال اگر $y = xe^{-\frac{x^۲}{۲}}$، آنگاه نشان دهید $xy' = (۱ - x^۲)y$.

حل

$$y' = e^{-\frac{x^۲}{۲}} + \left(-\frac{۲x}{۲}e^{\frac{-x^۲}{۲}}\right)x = e^{-\frac{x^۲}{۲}} - x^۲e^{-\frac{x^۲}{۲}} = (۱ - x^۲)e^{-\frac{x^۲}{۲}}$$

از ضابطه‌ی تابع نتیجه می‌شود: $\frac{y}{x} = e^{-\frac{x^۲}{۲}}$، پس:

$$y' = (۱ - x^۲)\frac{y}{x} \Longrightarrow xy' = (۱ - x^۲)y$$

تست فرض کنید $f(x) = \ln x$ و $f \circ g(x) = x \ln x$، دراین‌صورت $g'(۲)$ کدام است؟

۱) $۴ \ln ۲$ ۲) $۲ + \ln ۲$ ۳) $۲ \ln ۲$ ۴) $۴(۱ + \ln ۲)$

حل گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} f(g(x)) = x \ln x \\ f(g(x)) = \ln g(x) \end{cases} \Longrightarrow \ln g(x) = x \ln x \Longrightarrow g(x) = e^{x \ln x}$$
$$g'(x) = \left(\ln x + x \cdot \frac{۱}{x}\right) e^{x \ln x} = (\ln x + ۱) \cdot x^x \Longrightarrow g'(۲) = ۴(\ln ۲ + ۱)$$

۱۹ـ۵ مشتق توابع لگاریتمی:

تابع	مشتق تابع	مثال	حل مثال
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \ln x$	$y' = \frac{۱}{x}$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$	$y = \log(x^۲ + ۱)$	$y' = \frac{۲x}{(x^۲ + ۱) \ln ۱۰}$

مثال مشتق توابع زیر را حساب کنید و آن را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۱) $f(x) = \ln\left(\frac{۱ + \sqrt{x}}{۱ - \sqrt{x}}\right)$

۲) $y = e^x \operatorname{Arctan} e^x - \ln \sqrt{۱ + e^{۲x}}$

حل

۱) می‌دانیم:

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$f(x) = \ln(۱ + \sqrt{x}) - \ln(۱ - \sqrt{x}) \Longrightarrow f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱ + \sqrt{x}} - \frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱ - \sqrt{x}}$$

$$= \frac{۱}{۲\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \frac{۱-\sqrt{x}+۱-\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})(۱-\sqrt{x})} = \frac{۲}{۲\sqrt{x}(۱-x)} = \frac{۱}{\sqrt{x}(۱-x)}$$

۲)

$$y' = e^x.\operatorname{Arctan} e^x + \frac{e^x}{۱+(e^x)^۲}\cdot e^x - \frac{\frac{۲e^{۲x}}{۲\sqrt{۱+e^{۲x}}}}{\sqrt{۱+e^{۲x}}}$$

$$= e^x \operatorname{Arctan} e^x + \frac{e^{۲x}}{۱+e^{۲x}} - \frac{e^{۲x}}{۱+e^{۲x}} = e^x \operatorname{Arctan} e^x$$

مثال اگر $f(x) = \ln \sqrt[۳]{x}$ و $g(x) = \sin^۲ x$، مشتق $(f\,o\,g)(x)$ کدام است؟

حل

$$y = (f\,o\,g)(x) = \ln \sqrt[۳]{\sin^۲ x} = \ln(\sin x)^{\frac{۲}{۳}} = \frac{۲}{۳}\ln(\sin x)$$

$$y' = \frac{۲}{۳}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{۲}{۳}\cot x$$

تست مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x^۲-۱}$ ۲) $\frac{۱}{۱+x^۲}$ ۳) $\frac{۲}{۱-x^۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱-x^۲}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$y = \ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right) = \frac{۱}{۲}(\ln(۱+x) - \ln(۱-x))$$

$$y' = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱+x} - \frac{-۱}{۱-x}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۱-x^۲}\right) = \frac{۱}{۱-x^۲}$$

۲۰ـ۵ مشتق تابع u^v:

$$f(x) = u^v \Longrightarrow f'(x) = u^v\left(v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right)$$

مثال مشتق توابع زیر را حساب کنید و آن را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۱) $y = (\cos x)^x$ ۲) $y = (x^۲)^{\ln x}$

حل

۱) $$y' = (\cos x)^x\left(۱\times\ln\cos x + x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\right) = (\cos x)^x(\ln\cos x - x\tan x)$$

۲) $$y' = (x^۲)^{\ln x}\left(\frac{۱}{x}\ln x^۲ + \ln x\cdot\frac{۲x}{x^۲}\right) = x^{۲\ln x}\left(\frac{۲\ln x}{x} + \frac{۲\ln x}{x}\right) = \frac{۴}{x}\cdot x^{۲\ln x}\cdot\ln x$$

تست اگر $y = (x^۲ + ۱)^x$، آنگاه $y'(۱)$ کدام است؟

۱) $۱ + \ln ۴$ ۲) $۱ + \ln ۲$ ۳) $۲ + \ln ۴$ ۴) $۲ + \ln ۲$

حل گزینه‌ی ۳.

$$y' = (x^۲ + ۱)^x \left(۱ \times \ln(x^۲ + ۱) + x \cdot \frac{۲x}{x^۲ + ۱} \right)$$
$$= (x^۲ + ۱)^x \left(\ln(x^۲ + ۱) + \frac{۲x^۲}{x^۲ + ۱} \right)$$
$$y'(۱) = ۲(\ln ۲ + ۱) = ۲ \ln ۲ + ۲ = \ln ۴ + ۲$$

۵ـ۲۱ مشتق تابع قدرمطلق:

$$f(x) = |u| \Longrightarrow f'(x) = \frac{u \cdot u'}{|u|} = \begin{cases} u' & u > ۰ \\ -u' & u < ۰ \end{cases}$$

مثال اگر $y = |۳ \cos^۲ x + \sin x + ۱|$، آنگاه y'_x را بیابید.

حل چون عبارت داخل قدرمطلق، همواره مثبت است، پس:

$$y = ۳ \cos^۲ x + \sin x + ۱ \Longrightarrow y'_x = -۶ \sin x \cos x + \cos x$$

تست اگر $f(x) = |x||x - ۱|$، دراین‌صورت $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۱. تابع f را به‌صورت $f(x) = |x^۲ - x|$ می‌نویسیم، پس:

$$f'(x) = \frac{(x^۲ - x)(۲x - ۱)}{|x^۲ - x|} \Longrightarrow f'(۲) = \frac{(۴ - ۲)(۴ - ۱)}{|۴ - ۲|} = ۳$$

مشتق مراتب بالاتر

۵ـ۲۲ اگر تابع $y = f(x)$ در ناحیه‌ای مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن یعنی $f'(x)$ یا y' خود تابعی از x است که می‌توان مشتق آن را به‌دست آورد و آن را مشتق مرتبه‌ی دوم تابع $y = f(x)$ می‌نامیم که به‌صورت $f''(x)$ یا y'' یا $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ نشان داده می‌شود. اگر این عمل را n مرتبه ادامه دهیم، آن را مشتق مرتبه‌ی nام می‌نامیم و با نماد $f^{(n)}_{(x)}$ یا $y^{(n)}$ یا $\frac{d^n y}{dx^n}$ نشان می‌دهیم. بنابه تعریف مشتق، می‌توان مشتق مرتبه‌ی nام را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$f^{(n)}_{(x)} = \lim_{h \to ۰} \frac{f^{(n-۱)}(x + h) - f^{(n-۱)}(x)}{h}$$

مثال اگر $f(x) = \frac{x^۲ + ۱}{x}$، دراین‌صورت حاصل $\lim_{h \to ۰} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}$ را بیابید.

حل بنابه تعریف مشتق دوم، حد داده شده برابر $f''(x)$ است.

$$f'(x)=\frac{۲x^۲-x^۲-۱}{x^۲}=\frac{x^۲-۱}{x^۲}\Longrightarrow f''(x)=\frac{۲x^۳-۲x^۳+۲x}{x^۴}=\frac{۲}{x^۳}$$

مثال اگر مقدار مشتق مرتبه‌ی دوم تابع $f(x)=\ln(ax+۱)$ در $x=۰$ برابر -۱ باشد، مقدار a را بیابید.

حل

$$f'(x)=\frac{a}{(ax+۱)}\Longrightarrow f''(x)=\frac{-a^۲}{(ax+۱)^۲}, f''(۰)=-۱\Longrightarrow -a^۲=-۱\Longrightarrow a=\pm ۱$$

مثال اگر $y=(ax+b)e^x$ باشد، $y''-۲y'+y$ را بیابید.

حل

$$y'=ae^x+(ax+b)e^x\Longrightarrow y''=ae^x+ae^x+(ax+b)e^x$$
$$y''-۲y'+y=۲ae^x+(ax+b)e^x-۲ae^x-۲(ax+b)e^x+(ax+b)e^x=۰$$

مثال فرض کنید $f(x)=xe^{x^۲}$، دراین‌صورت حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f'(۱+h)-f'(۱)}{h}$ را بیابید.

حل حد داده شده برابر با $f''(۱)$ است، پس

$$f'(x)=e^{x^۲}+۲x^۲e^{x^۲}\Longrightarrow f''(x)=۲xe^{x^۲}+۴xe^{x^۲}+۴x^۳e^{x^۲}$$
$$f''(۱)=۲e+۴e+۴e\Longrightarrow f''(۱)=۱۰e$$

تست مشتق دوم تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{e^{۳x}+۱}{e^x+۱}$ در نقطه‌ی $x=\ln ۲$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

حل گزینه‌ی ۴. ابتدا بهتر است ضابطه‌ی تابع را ساده کنیم.

$$y=\frac{(e^x)^۳+۱}{e^x+۱}=\frac{(e^x+۱)(e^{۲x}-e^x+۱)}{e^x+۱}=e^{۲x}-e^x+۱$$
$$y'=۲e^{۲x}-e^x\Longrightarrow y''=۴e^{۲x}-e^x$$
$$y''(\ln ۲)=۴e^{۲\ln ۲}-e^{\ln ۲}=۴e^{\ln ۴}-e^{\ln ۲}=(۴\times ۴)-۲=۱۴$$

تست مقدار مشتق مرتبه‌ی دوم تابع $f(x)=(۲x-۱)^۲\sqrt{x^۲+۴x}$ به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) صفر

حل گزینه‌ی ۱. با فرض $g(x)=\sqrt{x^۲+۴x}$، داریم:

$$f(x)=(۲x-۱)^۲g(x)\Longrightarrow f'(x)=۴(۲x-۱)g(x)+(۲x-۱)^۲g'(x).$$
$$f''(x)=۸g(x)+(۸x-۴)g'(x)+۴(۲x-۱)g'(x)+(۲x-۱)^۲g''(x)$$
$$f''\left(\frac{۱}{۲}\right)=۸g\left(\frac{۱}{۲}\right)=۸\sqrt{\frac{۱}{۴}+۲}=۸\times\frac{۳}{۲}=۱۲$$

۲۳ـ۵ برای تعیین مشتق مرتبه‌ی nام باید مشتقات اولیه را بررسی کنیم، درصورتی که روندی بین مشتقات وجود داشته باشد، به آن دست یابیم و از روی آن، فرمول مشتق مرتبه‌ی n ام را به‌دست می‌آوریم.

مثال مشتق مرتبه‌ی nام تابع $y = ۲^x$ را به‌دست آورید.

حل

$$y' = ۲^x \ln ۲ \Longrightarrow y'' = ۲^x \ln ۲ \times \ln ۲ = ۲^x (\ln ۲)^۲ \Longrightarrow y''' = ۲^x \ln ۲ (\ln ۲)^۲$$
$$= ۲^x (\ln ۲)^۳ \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow y^{(n)} = ۲^x (\ln ۲)^n$$

تست مشتق مرتبه‌ی nام تابع $y = xe^x$ در نقطه‌ی $x = \ln ۲$ کدام است؟

۱) $۲n + \ln ۲$ ۲) $۱ + n \ln ۲$ ۳) $۲(n + \ln ۲)$ ۴) $n + \ln ۲$

حل گزینه‌ی ۳.

$$y' = e^x + xe^x = (۱ + x)e^x$$
$$y'' = e^x + (۱ + x)e^x = (۲ + x)e^x$$
$$y''' = e^x + (۲ + x)e^x = (۳ + x)e^x$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = e^x + (n - ۱ + x)e^x = (n + x)e^x$$
$$\Longrightarrow y^{(n)}_{(\ln ۲)} = (n + \ln ۲)e^{\ln ۲} = (n + \ln ۲)(۲)$$

۲۴ـ۵ مشتق مرتبه‌ی nام برخی از توابع:

$y = (ax + b)^m$	$\Longrightarrow y^{(n)} = m(m - ۱)(m - ۲)\cdots(m - n + ۱)a^n (ax + b)^{m-n}$
$y = \dfrac{ax + b}{cx + d}, c \neq ۰$	$\Longrightarrow y^{(n)} = \dfrac{(-c)^{n-۱} n!(ad - bc)}{(cx + d)^{n+۱}}$
$y = \ln(ax + b)$	$\Longrightarrow y^{(n)} = \dfrac{(-۱)^{n-۱}(n - ۱)! a^n}{(ax + b)^n}$
$y = \sin(ax + b)$	$\Longrightarrow y^{(n)} = a^n \sin(ax + b + \dfrac{n\pi}{۲})$
$y = \cos(ax + b)$	$\Longrightarrow y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + b + \dfrac{n\pi}{۲}\right)$
$y = u.v$	$\Longrightarrow y^{(n)} = \sum_{i=۱}^{n} \binom{n}{i} u^{n-i}.v^i$

مثال مشتق مرتبه‌ی هفتم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{۲x + ۱}{x + ۱}$ در نقطه‌ی $x = ۰$ را بیابید.

حل

$$f^{(۷)}(x) = \frac{(-۱)^۶ ۷!(۲ - ۱)}{(x + ۱)^۸} \Longrightarrow f^{(۷)}(۰) = ۷!$$

مثال مشتق مرتبه‌ی nام تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{۲x+۱}{x^۲+x-۲}$ را به‌دست آورید.

حل

$$y = \frac{(x+۲)+(x-۱)}{(x+۲)(x-۱)} = \frac{۱}{x+۲} + \frac{۱}{x-۱}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-۱)^{n-۱}n!(۰-۱)}{(x+۲)^{n+۱}} + \frac{(-۱)^{n-۱}n!(۰-۱)}{(x-۱)^{n+۱}}$$

$$= -(-۱)^{n-۱}n!\left[\frac{۱}{(x+۲)^{n+۱}} + \frac{۱}{(x-۱)^{n+۱}}\right]$$

مثال مشتق مرتبه‌ی بیستم تابع $y = \ln(۲x+۱)$ در نقطه‌ی $x = ۰$ چه‌قدر است؟

حل

$$y^{(۲۰)} = \frac{(-۱)^{۱۹}(۱۹!)۲^{۲۰}}{(۲x+۱)^{۲۰}} \Longrightarrow y^{(۲۰)}_{(۰)} = -۲^{۲۰} \times ۱۹!$$

مثال مشتق مرتبه‌ی دوازدهم تابع $y = x\sin x$ به‌ازای $x = \pi$ چه‌قدر است؟

حل با فرض $u = \sin x$ و $v = x$، داریم:

$$y^{(۱۲)} = \sum_{i=۱}^{۱۲} \binom{۱۲}{i} (\sin x)^{۱۲-i}(x)^i$$

از طرفی:

$$u^{(۱)} = \cos x, u^{(۲)} = -\sin x, u^{(۳)} = -\cos x, \cdots$$

$$v^{(۱)} = ۱, v^{(۲)} = ۰, v^{(۳)} = ۰, \cdots$$

درنتیجه:

$$y^{(۱۲)} = \binom{۱۲}{۱}(\sin x)^{۱۱}x^۱ + \binom{۱۲}{۲}(\sin x)^{۱۰}(x)^۲ + \cdots = ۱۲(-\cos x)(۱) + ۰$$

$$y^{(۱۲)}_{(\pi)} = ۱۲(-\cos\pi) = ۱۲$$

تست مشتق مرتبه‌ی سیزدهم تابع $y = \frac{۱+\sin ۲x}{\sin x + \cos x}$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) -۲

حل گزینه‌ی ۲. می‌دانیم $(\sin x + \cos x)^۲ = ۱ + \sin ۲x$، پس:

$$y = \frac{(\sin x + \cos x)^۲}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$$

$$y^{(۱۳)} = \sin\left(x + \frac{۱۳\pi}{۲}\right) + \cos\left(x + \frac{۱۳\pi}{۲}\right) = \cos x - \sin x$$

$$y^{(۱۳)}_{(\frac{\pi}{۲})} = \cos\frac{\pi}{۲} - \sin\frac{\pi}{۲} = ۰ - ۱ = -۱$$

مشتق تابع مرکب

۵ـ۲۵ اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد، مانند $y = f(u)$ و $u = g(x)$، آنگاه مشتق y نسبت به x برابر است با:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{یا} \qquad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

مثال اگر $y = \ln u$ و $u = e^x$، مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید.

حل

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot e^x = \frac{1}{e^x} \cdot e^x = 1$$

راه‌حل دوم:

$$y = \ln u, u = e^x \Longrightarrow y = \ln(e^x) = x \ln e \Longrightarrow y = x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

تست اگر $y = e^{-\sqrt{u}}$ و $u = \frac{2}{x-1}$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به‌ازای $x = 3$ کدام است؟

۱) $\frac{e}{4}$ ۲) $\frac{e^{-1}}{4}$ ۳) $\frac{e^{-1}}{2}$ ۴) $\frac{e}{2}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$x = 3 \Longrightarrow u = \frac{2}{3-1} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{u}} e^{-\sqrt{u}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \xrightarrow[u=1]{x=3} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} e^{-1} \cdot \frac{-2}{4} = \frac{e^{-1}}{4}$$

۵ـ۲۶ قاعده‌ی (۵ـ۲۵) را می‌توان به بیش از دو تابع هم تعمیم داد، یعنی اگر $y = f(u)$ و $u = g(v)$ و $v = h(x)$ باشد، داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

تست اگر $y = \frac{z+1}{z-1}$، $z = x^2 - 2x$ و $x = \sqrt{t+3}$، مقدار $\frac{dy}{dt}$ به‌ازای $t = 1$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -1

حل گزینه‌ی ۴.

$$t = 1 \Longrightarrow x = \sqrt{1+3} = 2, z = 4 - 4 = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-2}{(z-1)^2} \cdot (2x-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t+3}} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -2 \times 2 \times \frac{1}{4} = -1$$

۵ـ۲۷ بنابر مشتق تابع مرکب داریم:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

مثال اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\ln x$، آنگاه مشتق $f\circ g(x)$ را بیابید.

حل

$$f(x)=\frac{۱}{x}\Longrightarrow f'(x)=\frac{-۱}{x^{۲}},\ g(x)=\ln x\Longrightarrow g'(x)=\frac{۱}{x}$$

$$(f\circ g)(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=f'(\ln x)\cdot\frac{۱}{x}=\frac{-۱}{(\ln x)^{۲}}\cdot\frac{۱}{x}=\frac{-۱}{x(\ln x)^{۲}}$$

راه‌حل دوم، بهتر است ابتدا $f\circ g(x)$ را پیدا کنیم.

$$y'=(f\circ g)(x)=\frac{۱}{\ln x}=(\ln x)^{-۱}\Longrightarrow y'=-\left(\frac{۱}{x}\right)(\ln x)^{-۲}=\frac{-۱}{x(\ln x)^{۲}}$$

مثال اگر $(f\circ g)'(۱)=-۱۲$ و $g(۱)=۰$ و $f'(۰)=-۲$، مقدار $g'(۱)$ را بیابید.

حل

$$(f\circ g)'(۱)=f'(g(۱))\cdot g'(۱)\Longrightarrow -۱۲=f'(۰)\cdot g'(۱)\Longrightarrow -۱۲=-۲g'(۱)\Longrightarrow g'(۱)=۶$$

تست اگر $f'(x)=\frac{۱}{x-۲}$ و $g(x)=x-\frac{۱}{x}$، مقدار مشتق $f\circ g(x)$ در نقطه‌ی $x=۱$ چه‌قدر است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۱.

$$g(x)=x-\frac{۱}{x}\Longrightarrow g'(x)=۱+\frac{۱}{x^{۲}}\Longrightarrow g'(۱)=۲,g(۱)=۰$$

$$(f\circ g)'(۱)=f'(g(۱))\cdot g'(۱)=f'(۰)\times ۲=\frac{۱}{۰-۲}\times ۲=-۱$$

۲۸ـ۵ بنابر مشتق تابع مرکب داریم:

$$\boxed{y=f(u)\Longrightarrow y'=u'f'(u)}$$

مثال مشتق توابع زیر را بیابید.

۱) $y=f(e^{\sqrt{x}})$ ۲) $y=f\left(\frac{۱}{x}\right)$

۳) $y=x^{۲}f(\sin x)$ ۴) $y=\frac{f(۲x)}{x}$

حل

۱) $y=f(e^{\sqrt{x}})\Longrightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}f'(e^{\sqrt{x}})$

۲) $y=f\left(\frac{۱}{x}\right)\Longrightarrow y'=-\frac{۱}{x^{۲}}f'\left(\frac{۱}{x}\right)$

۳) $y=x^{۲}f(\sin x)\Longrightarrow y'=۲xf(\sin x)+x^{۲}\cdot\cos x f'(\sin x)$

۴) $y=\frac{f(۲x)}{x}\Longrightarrow y'=\frac{۲f'(۲x)\cdot x-f(۲x)}{x^{۲}}$

مثال اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\sqrt{۳}$ باشد، مشتق عبارت $f(۱+۲\sin x)$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ چه‌قدر است؟

حل

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)=\sqrt{۳}$$

$$y=f(۱+۲\sin x)\Longrightarrow y'_x=۲\cos x f'(۱+۲\sin x)$$

$$y'_{(\frac{\pi}{۶})}=۲\cos\frac{\pi}{۶}f'(۱+۲\sin\frac{\pi}{۶})=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}f'(۱+۱)=\sqrt{۳}f'(۲)=\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=۳$$

مثال اگر $g(x)=e^{x\cdot f(۲x)}$، مقدار $g'(۱)$ با توجه به جدول زیر کدام است؟

x	$f(x)$	$f'(x)$
۱	۱۰	۲
۲	۸	۴

حل

$$g'(x)=[۱\times f(۲x)+۲f'(۲x)\cdot x]e^{x\cdot f(۲x)}$$

$$g'(۱)=[f(۲)+۲f'(۲)]e^{۱\times f(۲)}=(۸+۲\times ۴)e^{۸}=۱۶e^{۸}$$

مثال اگر $f(۲x)=۶x+\sin f(x)$ و $f(۰)=۰$ باشد، آنگاه $f'(۰)$ را بیابید.

حل

مشتق : $۲f'(۲x)=۶+f'(x)\cos f(x)$

$$x=۰\Longrightarrow ۲f'(۰)=۶+f'(۰)\cos\underbrace{(f(۰))}_{۰}\Longrightarrow ۲f'(۰)=۶+f'(۰)\Longrightarrow f'(۰)=۶$$

تست اگر $f'(x)=\frac{۲x^{۲}-۱}{۱-x^{۲}}$، آنگاه مشتق تابع $y=f(\cos x)$ در $x=\frac{\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$y'=-\sin x f'(\cos x)=-\sin x\times\frac{۲\cos^{۲}x-۱}{۱-\cos^{۲}x}=-\sin x\times\frac{\cos ۲x}{\sin^{۲}x}=-\frac{\cos ۲x}{\sin x}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-\frac{\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right)}=-\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

تست اگر $f'(۲)=۳$ و $f''(۲)=-۲$ باشد، مشتق مرتبه‌ی دوم $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ در نقطه‌ی $x=\frac{۱}{۲}$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

حل گزینه‌ی ۱.

$$y = f\left(\frac{۱}{x}\right) \Longrightarrow y' = \frac{-۱}{x^۲} f'\left(\frac{۱}{x}\right) \Longrightarrow y'' = \frac{۲}{x^۳} f'\left(\frac{۱}{x}\right) + \frac{۱}{x^۴} f''\left(\frac{۱}{x}\right)$$

$$y''\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۲}{\frac{۱}{۸}} f'(۲) + \frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}} f''(۲) = ۱۶ \times ۳ + ۱۶ \times (-۲) = ۱۶$$

مشتق‌گیری ضمنی

۲۹ـ۵ گاهی در تعریف ضابطه‌ی یک تابع حقیقی می‌توان متغیر وابسته‌ی y را برحسب متغیر مستقل x بیان کرد. به این نوع تعریف ضابطه‌ی یک تابع، تعریف تابع با ضابطه‌ی صریح می‌گویند. صورت کلی ضابطه‌ی صریح، تابع حقیقی f به‌شکل $y = f(x)$ است.

۳۰ـ۵ هرگاه در تعریف ضابطه‌ی یک تابع، متغیر وابسته‌ی y از متغیر مستقل x قابل‌تفکیک نباشد یا آن‌ها را تفکیک نکنیم، دراین‌صورت، ضابطه‌ی تابع را ضابطه‌ی ضمنی می‌گویند. صورت کلی ضابطه‌ی تابع ضمنی f، به‌شکل $f(x,y) = c$ است.

۳۱ـ۵ برای مشتق‌گیری از تابع با ضابطه‌ی ضمنی $f(x,y) = c$، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} \quad , \quad x'_y = -\frac{f'_y}{f'_x}$$

f'_x : مشتق نسبت به x، y عدد ثابت است.

f'_y : مشتق نسبت به y، x عدد ثابت است.

مثال مشتق توابع زیر را محاسبه کنید (y'_x).

۱) $x^۲y - x^۳y^۲ + ۵x - ۲y = ۰$

۲) $\sqrt{xy} - ۲x = ۱ + x\sqrt{y}$

۳) $x \ln y - e^{xy} + \frac{x}{y} = ۰$

۴) $x \sin y = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

حل

۱) $$y'_x = -\frac{۲xy - ۳x^۲y^۲ + ۵}{x^۲ - ۲x^۳y - ۲}$$

۲) $$\sqrt{xy} - ۲x - ۱ - x\sqrt{y} = ۰ \Longrightarrow y'_x = -\frac{\frac{y}{۲\sqrt{xy}} - ۲ - \sqrt{y}}{\frac{x}{۲\sqrt{xy}} - \frac{x}{۲\sqrt{y}}}$$

۳) $$y'_x = -\frac{\ln y - ye^{xy} + \frac{۱}{y}}{x \cdot \frac{۱}{y} - xe^{xy} - \frac{x}{y^۲}}$$

۴) $$\cos\left(\frac{y}{x}\right) - x \sin y = ۰ \Longrightarrow y'_x = -\frac{\frac{y}{x^۲} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \sin y}{-\frac{۱}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \cos y}$$

مثال مشتق تابع با ضابطه‌ی $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cdots}}}$ را به‌دست آورید.

حل طرفین رابطه‌ی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$y^۲ = \cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cdots}}} \Longrightarrow y^۲ = \cos x + y \Longrightarrow y^۲ - \cos x - y = ۰$$
$$y'_x = -\frac{\sin x}{۲y - ۱} = \frac{\sin x}{۱ - ۲y}$$

تست اگر مشتق تابع $ae^x + be^y = ۳$ در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ برابر ۲ باشد، آنگاه $a - b$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -۹ ۳) ۳ ۴) -۳

حل گزینه‌ی ۱. اولاً، نقطه‌ی $(۰, ۰)$ در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند.

$$ae^۰ + be^۰ = ۳ \Longrightarrow a + b = ۳$$
$$y' = -\frac{ae^x}{be^y} \Longrightarrow y'(۰, ۰) = -\frac{a}{b} \Longrightarrow -\frac{a}{b} = ۲ \Longrightarrow a = -۲b$$
$$a + b = ۳ \Longrightarrow -۲b + b = ۳ \Longrightarrow b = -۳, a = ۶, a - b = ۹$$

تست اگر $\ln \frac{x+y}{x-y} = ۳$ باشد، حاصل $\lim\limits_{y \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ کدام است؟

۱) $\frac{y}{x}$ ۲) $\frac{-x}{y}$ ۳) $\frac{x}{y}$ ۴) $-\frac{y}{x}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{y \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy} \ , \ \ln \frac{x+y}{x-y} = ۳ \Longrightarrow \frac{x+y}{x-y} = e^۳$$
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{\frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^۲}}{\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^۲}} = -\frac{۲x}{-۲y} = \frac{x}{y}$$

۳۲ـ۵ یک روش دیگر برای مشتق‌گیری از توابع حقیقی مشتق‌پذیر که ضابطه‌ی آن‌ها ضمنی است، این است که از اجزای ضابطه‌ی تابع، به‌کمک قضایا مشتق‌گیری می‌کنیم و در عمل مشتق‌گیری، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-۱} \quad ; \quad \frac{d(y^n)}{dx} = ny' y^{n-۱}$$

مثال مشتق تابع $x^۲ - ۲xy^۲ + y^۳ - x + y = ۰$ را محاسبه کنید.

حل

$$۲x - ۲y^۲ + ۴xyy' + ۳y^۲y' - ۱ + y' = ۰ \Longrightarrow (۴xy + ۳y^۲ + ۱)y' = ۲y^۲ - ۲x + ۱$$
$$\Longrightarrow y' = \frac{۲y^۲ - ۲x + ۱}{۴xy + ۳y^۲ + ۱}$$

تست از رابطه‌ی $x^۲ + y^۲ - y = ۰$، مقدار y''_x در مبدای مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۲. باید دو بار مشتق ضمنی بگیریم:

$$۲x + ۲y'y - y' = ۰ \Longrightarrow y' = -\frac{۲x}{۲y - ۱},\ (۰,۰) \Longrightarrow y' = ۰$$

$$۲ + ۲(y')^۲ + ۲y''y - y'' = ۰$$

$$(۰,۰), y' = ۰ \Longrightarrow ۲ - y'' = ۰ \Longrightarrow y'' = ۲$$

مشتق منحنی‌های پارامتری

۳۳ـ۵ هرگاه مختصات (x,y) یک نقطه‌ی غیرمشخص از یک منحنی برحسب پارامتر دیگری مانند t به‌وسیله‌ی معادلات $x = f(t)$ و $y = g(t)$ داده شوند، می‌گوییم منحنی به‌صورت پارامتری است. برای مثال $x = r\sin t$ و $y = r\cos t$ معادلات پارامتری دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = r^۲$ است.

۳۴ـ۵ اگر $x = f(t)$ و $y = g(t)$ توابعی مشتق‌پذیر برحسب t باشند، داریم:

$$y'_x = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال تابع پارامتری $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ مفروض است، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

حل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t - \cos t + t\sin t}{-\sin t + \sin t + t\cos t} = \frac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$$

مثال اگر $x = \sqrt{۲t+۱}$ و $y = \sqrt[۳]{t+۴}$، مقدار y'_x به‌ازای $t = ۴$ چه‌قدر است؟

حل

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(t+۴)^۲}}}{\frac{۲}{۲\sqrt{۲t+۱}}} = \frac{\sqrt{۲t+۱}}{۳\sqrt[۳]{(t+۴)^۲}} \xrightarrow{t=۴} y'_x = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

تست اگر $x = t - t^۲$ و $y = t - t^۳$، مقدار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ به‌ازای $t = ۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۲

حل گزینه‌ی ۴.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{۱ - ۳t^۲}{۱ - ۲t} = T$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dT}{dx} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-۶t(۱-۲t) + ۲(۱-۳t^۲)}{(۱-۲t)^۳} = \frac{۶t^۲ - ۶t + ۲}{(۱-۲t)^۳}$$

$$t = ۱ \Longrightarrow \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{۶ - ۶ + ۲}{-۱} = -۲$$

۳۵ـ۵ اگر $y = f(x)$ و $u = g(x)$ توابعی مشتق‌پذیر برحسب x باشند، $y' = f'(x)$ و $u' = g'(x)$ و بنابه مشتق توابع پارامتری y نسبت به تابع u عبارت است از:

$$y'_u = y'_{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال در نقطه‌ی $x = -۱$ مشتق تابع $y = x^۲ - \sqrt[۳]{x}$ نسبت به $۷x + ۴$ را بیابید.

حل

$$y'_{(۷x+۴)} = \frac{(x^۲ - \sqrt[۳]{x})'}{(۷x+۴)'} = \frac{۲x - \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{۷}, \ , \ x = -۱ \Longrightarrow y' = \frac{-۲ - \frac{۱}{۳}}{۷} = -\frac{۱}{۳}$$

تست در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۴}$ نسبت تغییرات عبارت $\sin x - \cos x$ به تغییرات عبارت $\tan x + ۳$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل گزینه‌ی ۲. منظور از نسبت تغییرات، مشتق دو عبارت است که مشتق اولی در صورت و دیگری در مخرج است.

$$\text{نسبت تغییرات} = \frac{(\sin x - \cos x)'}{(\tan x + ۳)'} = \frac{(\cos x + \sin x)\Delta x}{(۱ + \tan^۲ x)\Delta x}$$

$$x = \frac{\pi}{۴} \text{ نسبت تغییرات در } = \frac{\cos\frac{\pi}{۴} + \sin\frac{\pi}{۴}}{۱ + \tan^۲\frac{\pi}{۴}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱ + ۱} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مشتق توابع معکوس

۳۶ـ۵ معکوس تابع f را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهند و مشتق تابع معکوس از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$(f^{-۱})'(x) = \frac{۱}{f'(x)}$$

۳۷ـ۵ اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = b$ باشد، آنگاه مشتق تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطه‌ی $x = b$ (طول روی تابع معکوس و عرض روی تابع اصلی) از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$(f^{-۱})'(b) = \frac{۱}{f'(a)}$$

مثال اگر $f(x) = x^۳ + x$، آنگاه $(f^{-۱})'(۰)$ را بیابید.

حل $x = ۰$ مربوط به تابع معکوس، عرض تابع اصلی است، یعنی:

$$x^۳ + x = ۰ \Longrightarrow x(x^۲ + ۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰$$

$$(f^{-۱})'(x) = \frac{۱}{۳x^۲ + ۱} \Longrightarrow (f^{-۱})'(۰) = \frac{۱}{۰ + ۱} = ۱$$

تست اگر $f(x) = (۵ + x^۳)e^{\sin x}$، مقدار $(f^{-۱})'(۵)$ را بیابید.

۱) ۵ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) -۵ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

حل گزینه‌ی ۲. $x = ۵$ مربوط به تابع معکوس، عرض تابع اصلی است، یعنی:

$$۵ = (۵ + x^۳)e^{\sin x} \Longrightarrow x = ۰$$
$$f'(x) = ۳x^۲e^{\sin x} + (۵ + x^۳)\cos x \cdot e^{\sin x} \Longrightarrow f'(۰) = ۵$$
$$(f^{-۱})'(۵) = \frac{۱}{f'(۰)} \Longrightarrow (f^{-۱})'(۵) = \frac{۱}{۵}$$

مشتق راست و مشتق چپ

۳۸ـ۵ فرض کنیم تابع حقیقی f در یک بازه، حول نقطه‌ی $x = x_۰$ تعریف شده باشد، دراین‌صورت می‌گوییم:

۱) تابع f در نقطه‌ی $x = x_۰$ مشتق راست دارد، هرگاه یکی از حدود زیر موجود و متناهی باشد. مقدار حد را درصورت وجود مشتق راست تابع f در نقطه‌ی $x = x_۰$ می‌نامیم و آن را با علامت $f'_+(x_۰)$ یا $f'(x_۰^+)$ نشان می‌دهیم.

$$f'(x_۰^+) = \lim_{x \to x_۰^+} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰}$$
$$f'(x_۰^+) = \lim_{\Delta x \to ۰^+} \frac{f(x_۰ + \Delta x) - f(x_۰)}{\Delta x}$$
$$f'(x_۰^+) = \lim_{h \to ۰^+} \frac{f(x_۰ + h) - f(x_۰)}{h}$$
$$f'(x_۰^+) = \lim_{h \to ۰^+} \frac{f(x_۰ + mh) - f(x_۰ + nh)}{(m - n)h}$$

۲) تابع f در نقطه‌ی $x = x_۰$ مشتق چپ دارد، هرگاه یکی از حدود زیر موجود و متناهی باشد. مقدار حد را درصورت وجود مشتق چپ تابع f در نقطه‌ی $x = x_۰$ می‌نامیم و آن را با علامت $f'_-(x_۰)$ یا $f'(x_۰^-)$ نشان می‌دهیم.

$$f'(x_۰^-) = \lim_{x \to x_۰^-} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰}$$
$$f'(x_۰^-) = \lim_{\Delta x \to ۰^+} \frac{f(x_۰ + \Delta x) - f(x_۰)}{\Delta x}$$
$$f'(x_۰^-) = \lim_{h \to ۰^-} \frac{f(x_۰ + h) - f(x_۰)}{h}$$
$$f'(x_۰^-) = \lim_{h \to ۰^-} \frac{f(x_۰ + mh) - f(x_۰ + nh)}{(m - n)h}$$

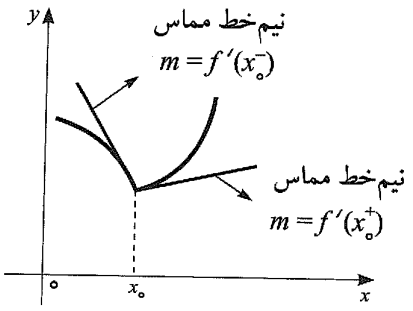
تذکر: عدد $f'(x_۰^+)$ برابر شیب نیم‌خط مماس بر منحنی تابع در طرف راست نقطه‌ی $x_۰$ و عدد $f'(x_۰^-)$ برابر شیب نیم‌خط مماس بر منحنی تابع در طرف چپ نقطه‌ی $x_۰$ است.

۵ـ۳۹ تابع f را در نقطه‌ی $x = x_0$ مشتق‌پذیر می‌خوانیم، هرگاه مشتقات چپ و راست f در نقطه‌ی $x = x_0$ موجود و مساوی باشند، یعنی:

$$f \text{ در } x = x_0 \text{ مشتق‌پذیر است} \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$$

در غیر این‌صورت مشتق‌پذیر نیست.

مثال در شکل زیر تابع f در نقطه‌ی $x = x_0$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا شیب نیم‌خط مماس در طرف راست x_0 مقداری مثبت $(f'(x_0^+) > 0)$ و شیب نیم‌خط مماس در طرف چپ x_0 مقداری منفی $(f'(x_0^-) < 0)$ است.



تذکر: معمولاً مواقعی مشتق چپ و راست را به‌طور جداگانه حساب می‌کنیم که در نقطه‌ی داده شده، قانون تابع در دو طرف این نقطه متفاوت باشد.

مثال مشتق‌پذیری تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید.

حل راه‌حل اول: توجه کنید که $f(1) = 1$ و

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$$
$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} (x^2+x+1) = 3$$

پس f در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

راه‌حل دوم:

$$x > 1 \Longrightarrow f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(1^+) = 2$$
$$x < 1 \Longrightarrow f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'(1^-) = 3$$

پس f در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^۲-۵x+۴|$ را در نقطه‌ی $x=۴$ بررسی کنید.

حل

$$f(x)=|x^۲-۵x+۴|=|(x-۴)(x-۱)|=|x-۴||x-۱|$$

$$x>۴\Longrightarrow f(x)=(x-۴)(x-۱)=x^۲-۵x+۴\Longrightarrow f'(x)=۲x-۵\Longrightarrow f'(۴^+)=۳$$

$$۱<x<۴\Longrightarrow f(x)=-(x-۴)(x-۱)=-x^۲+۵x-۴\Longrightarrow f'(x)=-۲x+۵$$

$$\Longrightarrow f'(۴^-)=-۳$$

پس f در نقطه‌ی $x=۴$ مشتق‌پذیر نیست.

تذکر: هر تابع حقیقی f با ضابطه‌ی $y=|f(x)|$ در ریشه‌های ساده‌ی معادله‌ی $f(x)=۰$ مشتق‌پذیر نیست و این ریشه‌ها طول نقاط زاویه‌دار[۱] تابع هستند. بنابراین در مثال قبل:

$$x^۲-۵x+۴=۰\Longrightarrow(x-۴)(x-۱)=۰\Longrightarrow x=۱, x=۴$$

چون $x=۱$ و $x=۴$ ریشه‌های ساده‌ی معادله هستند، پس f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست.

مثال مشتق‌پذیری تابع $f(x)=(x^۲-۲)[x]$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی کنید.

حل

$$۲<x<۳\Longrightarrow f(x)=(x^۲-۲)(۲)=۲x^۲-۴\Longrightarrow f'(x)=۴x\Longrightarrow f'(۲^+)=۸$$

$$۱<x<۲\Longrightarrow f(x)=(x^۲-۲)(۱)=x^۲-۲\Longrightarrow f'(x)=۲x\Longrightarrow f'(۲^-)=۴$$

پس f در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال به‌ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^۳+۲x & x\geqslant ۱\\ x^۲+۱+a & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟

حل

$$x>۱\Longrightarrow f(x)=ax^۳+۲x\Longrightarrow f'(x)=۳ax^۲+۲\Longrightarrow f'(۱^+)=۳a+۲$$

$$x<۱\Longrightarrow f(x)=x^۲+۱+a\Longrightarrow f'(x)=۲x\Longrightarrow f'(۱^-)=۲$$

$$f\text{ در }x=۱\text{ مشتق‌پذیر است}\Longrightarrow f'(۱^+)=f'(۱^-)\Longrightarrow ۳a+۲=۲\Longrightarrow a=۰$$

تست اگر $f(x)=x(|x|+x[x]+۱)$، آنگاه مقدار $f'(۰^+)+f'(۰^-)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۳.

$$۰<x<۱\Longrightarrow f(x)=x(x+x(۰)+۱)=x^۲+x\Longrightarrow f'(x)=۲x+۱\Longrightarrow f'(۰^+)=۱$$

$$-۱<x<۰\Longrightarrow f(x)=x(-x+x(-۱)+۱)=-۲x^۲+x$$

$$\Longrightarrow f'(x)=-۴x+۱\Longrightarrow f'(۰^-)=۱$$

$$f'(۰^+)+f'(۰^-)=۱+۱=۲$$

۱. نقطه‌ی زاویه‌دار در (۵ـ۴۰) تعریف شده است.

تست تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}[x]$ تعریف شده، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) f در $x=۰$، مشتق چپ دارد، ولی مشتق راست ندارد.

۲) f در $x=۰$، مشتق راست دارد، ولی مشتق چپ ندارد.

۳) f در $x=۰$، مشتق چپ و مشتق راست ندارد.

۴) f در $x=۰$، دارای مشتق است.

حل گزینه‌ی ۴.

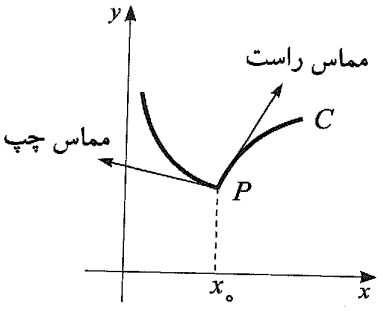
$$-۱<x<۰ \Longrightarrow [x]=-۱ \Longrightarrow f(x)=-x^{۲} \Longrightarrow f'(x)=-۲x \Longrightarrow f'(۰^{-})=۰$$

$$۰<x<۱ \Longrightarrow [x]=۰ \Longrightarrow f(x)=۰ \Longrightarrow f'(x)=۰ \Longrightarrow f'(۰^{+})=۰$$

بنابراین، f در $x=۰$، مشتق دارد $f'(۰)=۰$ است.

نقطه‌ی زاویه‌دار

۵ـ۴۰ منحنی (C) نمایش تابع f در نقطه‌ی $x_۰$ دارای دو نیم مماس است: نیم مماس راست و نیم مماس چپ. در این‌جا نقطه‌ی $x_۰$ را نقطه‌ی زاویه‌دار می‌نامند.



۵ـ۴۱ نقطه‌ی P واقع بر منحنی $y=f(x)$ یک نقطه‌ی زاویه‌دار است هرگاه در این نقطه، مشتق چپ و راست وجود داشته باشد ولی مساوی نباشند.

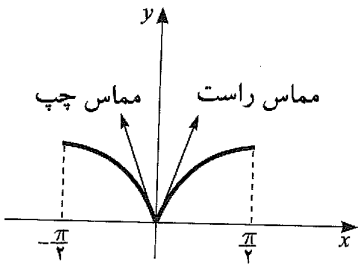
مثال تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|\sin x|$ مفروض است. نشان دهید مبداء مختصات یک نقطه‌ی زاویه‌دار برای تابع f است.

حل

$$f'(۰^{+})=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sin x}{x}=۱$$

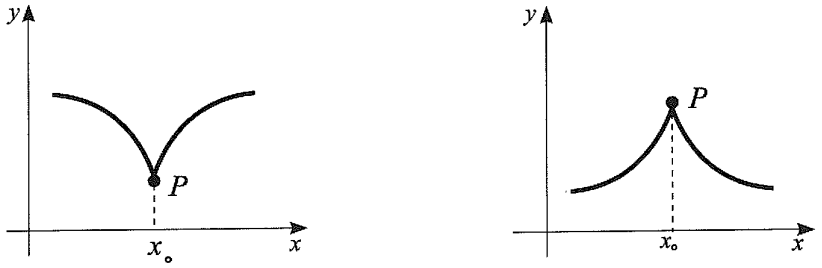
$$f'(۰^{-})=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-\sin x}{x}=-۱$$

چون $f'(۰^{+})$ و $f'(۰^{-})$ وجود دارند ولی با هم مساوی نیستند، پس مبداء مختصات یک نقطه‌ی زاویه‌دار است.



نقطه‌ی بازگشت

۴۲ـ۵ منحنی (C) نمایش تابع f در نقطه‌ی x_0 دارای مماسی موازی محور yها است. مانند شکل‌های زیر، نقطه‌ی P را نقطه‌ی بازگشت منحنی می‌گویند.



۴۳ـ۵ می‌گوییم نمودار تابع f در نقطه‌ی x_0 دارای یک نقطه‌ی بازگشت است هرگاه f در x_0 پیوسته بوده و مشتق‌های راست و چپ در نقطه‌ی x_0 نامتناهی و مختلف‌العلامه باشند. یعنی:

$$f'(x_0^+) = +\infty \quad , \quad f'(x_0^-) = -\infty$$

یا:

$$f'(x_0^+) = -\infty \quad , \quad f'(x_0^-) = +\infty$$

مثال نشان دهید مبداء مختصات یک نقطه‌ی بازگشت برای تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ است.

حل

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0^+} \to +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0^-} \to -\infty$$

پس $x = 0$ یک نقطه‌ی بازگشت برای تابع f است.

مشتق‌پذیری و پیوستگی

۴۴ـ۵ اگر تابع f در نقطه‌ی $x = x_0$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه پیوسته است.

مثال اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax\lfloor x\rfloor + 1 & x \geqslant 1 \\ bx^2 + 2ax - 1 & x < 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر باشد، a و b را تعیین کنید.

حل چون f در $x = 1$ مشتق‌پذیر است، بنابراین f در این نقطه پیوسته است. در نتیجه باید:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Longrightarrow a + 1 = b + 2a - 1 \Longrightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

از مشتق‌پذیری f در $x=۱$، نتیجه می‌شود $f'(۱^-)=f'(۱^+)$.

$$۱<x<۲ \Longrightarrow f(x)=ax+۱ \Longrightarrow f'(x)=a \Longrightarrow f'(۱^+)=a$$
$$x<۱ \Longrightarrow f(x)=bx^۲+۲ax-۱ \Longrightarrow f'(x)=۲bx+۲a \Longrightarrow f'(۱)=۲b+۲a$$
$$۲b+۲a=a \Longrightarrow ۲b+a=۰ \quad (۲)$$
$$(۱),(۲) \Longrightarrow a=۴, b=-۲$$

تست فرض کنید تابع $f(x)=(x^۲+ax+b)[x]$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $a+b$ کدام است؟

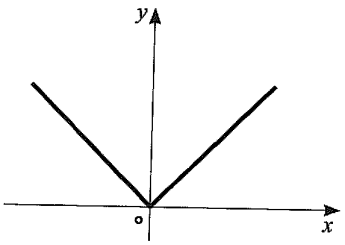
۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

حل گزینه‌ی ۲. چون f در $x=۱$ مشتق‌پذیر است، بنابراین f در $x=۱$ پیوسته است. پس:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x) \Longrightarrow a+b+۱=۰ \Longrightarrow a+b=-۱$$

۵ـ۴۵ عکس قضیه‌ی (۵ـ۴۴) درست نیست، یعنی اگر تابع f در $x=x_۰$ پیوسته باشد، نتیجه نمی‌گیریم که f در $x=x_۰$ مشتق‌پذیر است. به عبارت دیگر، ممکن است که تابع f در یک نقطه پیوسته باشد ولی مشتق‌پذیر نباشد.

مثال تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است، ولی در $x_۰=۰$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا نمودار تابع در این نقطه زاویه‌دار است.



۵ـ۴۶ بنا به قانون عکس نقیض از قضیه‌ی (۵ـ۴۴) نتیجه‌ی مهم زیر را داریم: اگر تابع f در $x=x_۰$ ناپیوسته باشد، آنگاه f در $x=x_۰$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال آیا تابع به معادله‌ی $f(x)=[x]$ در نقاط $x_۰\in Z$ مشتق‌پذیر است؟

حل خیر، زیرا تابع در $x_۰\in Z$ پیوسته نیست، به دلیل حل زیر:

$$\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=[x_۰^+]=x_۰ \ , \ \lim_{x\to x_۰^-} f(x)=[x_۰^-]=x_۰-۱ \ , \ f(x_۰)=[x_۰]=x_۰$$

پس این تابع در $x_۰\in Z$ پیوسته نیست. بنابراین f در $x_۰\in Z$ مشتق‌پذیر نیست.

۵ـ۴۷ اگر f در یک نقطه دارای مشتق مرتبه nام باشد، آنگاه تمام مشتقات f از مراتب کوچک‌تر از n موجودند و هم‌چنین f در آن نقطه پیوسته است. عکس این قضیه برقرار نیست.

مثال برای چه مقادیری از a، b و c تابع $f(x)=\begin{cases} x^۴-۲x^۲+a & x\geqslant ۰ \\ bx^۲+cx-۱ & x<۰ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق مرتبه‌ی دوم دارد؟

حل چون f در $x = ۰$ مشتق مرتبه‌ی دوم دارد، بنابراین f در $x = ۰$ مشتق‌پذیر و پیوسته است.

$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \lim_{x \to ۰^-} f(x) \Longrightarrow a = -۱$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x^۳ - ۴x & x > ۰ \\ ۲bx + c & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow f'(۰^+) = f'(۰^-) \Longrightarrow ۰ = c$$

$$f''(x) = \begin{cases} ۱۲x^۲ - ۴ & x > ۰ \\ ۲b & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow f''(۰^+) = f''(۰^-) \Longrightarrow -۴ = ۲b \Longrightarrow b = -۲$$

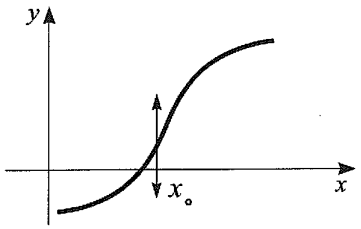
دسته‌بندی نقاط مشتق‌ناپذیر

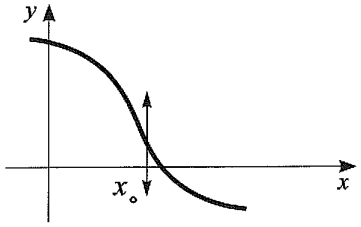
۴۸ـ۵ چندین حالت است که تابع f در $x = x_۰$ مشتق‌پذیر نیست.

۱) وقتی که عدد مشتق در $x = x_۰$ بی‌نهایت است. یعنی

$$\lim_{x \to x_۰} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰} = +\infty \text{ یا } -\infty$$

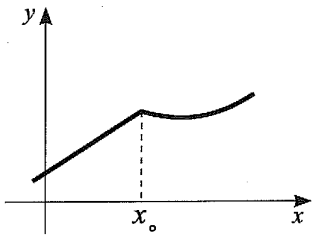
در این صورت مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور yها است.

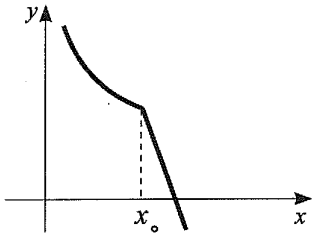




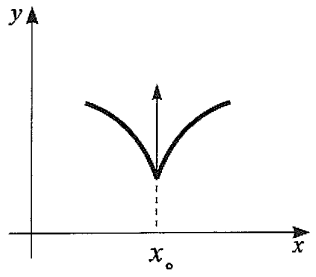
۲) وقتی که عدد مشتق راست در نقطه‌ی $x = x_۰$ با عدد مشتق چپ در این نقطه برابر نیستند. یعنی $f'(x_۰^+) = f'(x_۰^-)$.

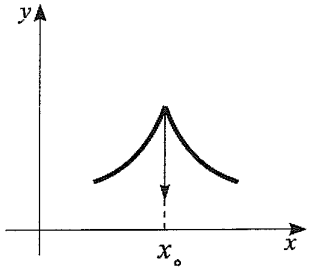
۳) نقطه‌ی زاویه‌دار: دیدیم که در این نقاط مشتق راست و چپ وجود دارد ولی مساوی نیستند. در نقاط زاویه‌دار مماس وجود ندارد ولی تابع در این نقاط مماس چپ و راست دارد.





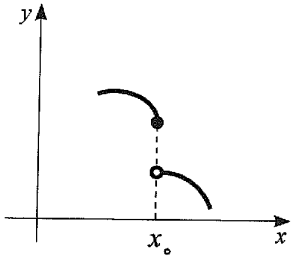
۴) نقطه‌ی بازگشت: دیدیم که در این نقاط مشتق‌های راست و چپ نامتناهی و مختلف العلامه هستند.





تذکر: خلاصه‌ی (۱) و (۳) و (۴)، در نمودارها هر جا زاویه وجود داشته باشد، یا خط مماس بر منحنی در یک نقطه موازی محور yها باشد. آن تابع در نقاط زاویه‌دار و در نقاطی که خط مماس بر منحنی موازی محور yها باشد مشتق‌پذیر نیست.

۵) نقاط ناپیوستگی: در این نقاط تابع مشتق‌پذیر نیست. به علاوه خط مماس نیز در نقاط ناپیوسته وجود ندارد.



۶) وقتی که نسبت $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ حد ندارد (حد آن نه یک محدود و نه بینهایت و حد چپ و راست هم ندارد).

مشتق‌پذیری تابع در یک بازه

۵ـ۴۹ تابع f را بر بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر گویند که f در همه‌ی نقاط (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

مثال تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax+b & x\geqslant ۱ \\ x^۲-a & x<۱ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، b چقدر است؟

حل چون هر یک از ضابطه‌های تابع f در دامنه‌شان همواره مشتق‌پذیرند، بنابراین f وقتی در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که فقط در $x=۱$ مشتق‌پذیر و پیوسته باشد. در نتیجه باید:

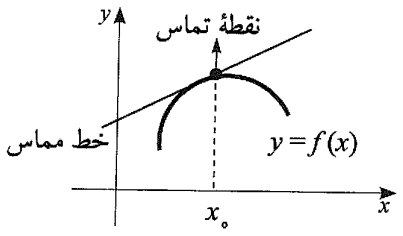
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x) \Longrightarrow a+b=۱-a \Longrightarrow ۲a+b=۱$$

$$f'(x)=\begin{cases} a & x\geqslant ۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$$

$$f'(۱^+)=f'(۱^-) \Longrightarrow a=۲ \Longrightarrow ۴+b=۱ \Longrightarrow b=-۳$$

خط مماس بر منحنی

۵ـ۵۰ خط مماس بر نمودار تابع مشتق‌پذیر f، خطی است که نمودار تابع را در دو نقطه‌ی منطبق بر هم قطع کند این دو نقطه منطبق بر هم را نقطه‌ی تماس گوییم.



۵ـ۵۱ اگر منحنی f در بازه‌ی (a,b) مشتق داشته باشد و $a<x_\circ<b$، شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ی $P(x_\circ,y_\circ)$ واقع بر منحنی برابر است با مشتق معادله‌ی منحنی به‌ازای مختصات نقطه‌ی P. یعنی اگر در عبارت مشتق معادله‌ی منحنی فقط x وجود داشته باشد، دراین‌صورت شیب خط مماس بر منحنی برابر است با: مشتق معادله‌ی منحنی به‌ازای

طول نقطه‌ی تماس، و اگر در عبارت مشتق، هم x و هم y وجود داشته باشد. دراین‌صورت، شیب خط مماس بر منحنی برابر است با: مشتق معادله‌ی منحنی به‌ازای مختصات نقطه‌ی تماس.

مثال شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=(x+۱)e^x$ در نقطه‌ی $x=۰$ را بیابید.

حل

$$f(x)=(x+۱)e^x \Longrightarrow f'(x)=e^x+(x+۱)e^x$$
$$m_{\text{مماس}}=f'(۰)=e^۰+(۰+۱)e^۰=۱+۱ \Longrightarrow m_{\text{مماس}}=۲$$

مثال شیب خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $e^{۲x-y}+x^۲-y=۰$ در نقطه‌ی $(۱,۲)$ چه‌قدر است؟

حل

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲e^{۲x-y}+۲x}{-e^{۲x-y}-۱}$$
$$(۱,۲) \Longrightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{۲e^{۲-۲}+۲}{-e^{۲-۲}-۱}=-\frac{۴}{-۲}=۲$$

۵ـ۵۲ اگر مشتق نسبت به x معادله‌ی منحنی $y=f(x)$ یا $f(x,y)=۰$ را برابر شیب خط مماس قرار دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

۱) اگر مشتق نسبت به x معادله‌ی منحنی برحسب x باشد، طول نقطه‌ی تماس به‌دست می‌آید.

۲) اگر مشتق نسبت به x معادله‌ی منحنی برحسب x و y باشد، رابطه‌ی بین مختصات نقطه یا نقاط تماس به‌دست می‌آید. اگر این رابطه را با معادله‌ی منحنی تقاطع دهیم، مختصات نقطه یا نقاط تماس به‌دست می‌آید.

مثال درکدام نقطه از نمودار تابع $y=x^۲$ خط مماس بر نمودار این تابع موازی وتر واصل بین $A(۱,۱)$ و $B(۲,۴)$ است؟

حل

$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۴-۱}{۲-۱}=۳ \quad , \quad y=x^۲ \Longrightarrow y'=۲x$$
$$y'=m_{AB} \Longrightarrow ۲x=۳ \Longrightarrow x=\frac{۳}{۲} \Longrightarrow y=\frac{۹}{۴} \Longrightarrow \left(\frac{۳}{۲},\frac{۹}{۴}\right)$$

۵ـ۵۳ دو نکته:

۱) شرط لازم وکافی برای آن که خط مماس در نقطه به طول $x=x_۰$، بر منحنی تابع f موازی محور طول‌ها باشد، آن است که $f'(x_۰)=۰$.

۲) شرط لازم وکافی برای آن که منحنی تابع f، در نقطه‌ی $x=x_۰$ بر محور طول‌ها مماس باشد آن است که $f(x_۰)=f'(x_۰)=۰$، یعنی معادله‌ی $f(x)=۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف $x=x_۰$ باشد.

مثال به‌ازای کدام مقدار a، خط مماس بر منحنی $y=\frac{ax+۱}{x-۲}$ در نقطه‌ی $x=۳$ موازی محور xهاست؟

حل

$$y' = \frac{a(x-۲) - (ax+۱)}{(x-۲)^۲} \Longrightarrow y' = \frac{-۲a-۱}{(x-۲)^۲}$$
$$y'(۳) = ۰ \Longrightarrow \frac{-۲a-۱}{۱} = ۰ \Longrightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۵ـ۵۴ طرز نوشتن معادله‌ی خط مماس بر منحنی: اگر نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ بر منحنی تابع $y = f(x)$ قرار داشته باشد. معادله‌ی خط مماس بر منحنی عبارت است از:

$$y - y_۰ = m_{\text{مماس}}(x - x_۰)$$

مثال معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y = \ln(x^۲ - ۳)$ در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ واقع بر آن را بیابید.

حل

$$x = ۲ \Longrightarrow y = \ln ۱ = ۰ \Longrightarrow \text{نقطه‌ی تماس } (۲, ۰)$$
$$f'(x) = \frac{۲x}{x^۲ - ۳} \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = f'(۲) = ۴$$
$$y - ۰ = ۴(x - ۲) \Longrightarrow y = ۴x - ۸ \text{ معادله خط مماس}$$

تست خط مماس بر منحنی تابع $ye^y = e^{x+۱}$ در نقطه‌ی $x = ۰$، محور طول‌ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) -۲

حل گزینه‌ی ۴.

$$x = ۰ \Longrightarrow ye^y = e \Longrightarrow y = ۱ \Longrightarrow \text{نقطه‌ی تماس } (۰, ۱)$$
$$y' = -\frac{f'x}{f'y} = -\frac{e^{x+۱}}{-e^y - ye^y} \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = -\frac{e}{-e-e} = \frac{۱}{۲}$$
$$y - ۱ = \frac{۱}{۲}(x - ۰) \Longrightarrow ۲y - ۲ = x \text{ معادله خط مماس}$$
$$y = ۰ \Longrightarrow x = -۲ : \text{محور طول‌ها}$$

تست معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع پارامتری $x = \frac{t-۱}{t+۱}$ و $y = \frac{t+۱}{t-۱}$ در نقطه $t = ۲$ کدام است؟

۱) $۹x + y = ۶$ ۲) $۳x + y = ۳$ ۳) $x + ۹y = ۶$ ۴) $x + ۳y = ۳$

حل گزینه‌ی ۱.

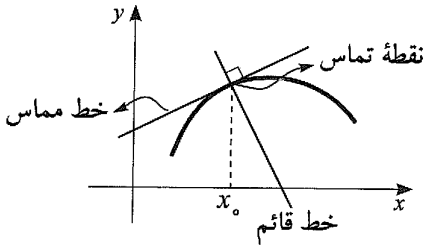
$$t = ۲ \Longrightarrow x = \frac{۲-۱}{۲+۱} = \frac{۱}{۳} \ , \ y = \frac{۲+۱}{۲-۱} = ۳$$

از $x = \frac{t-۱}{t+۱}$ و $y = \frac{t+۱}{t-۱}$ نتیجه می‌شود $xy = ۱$ و یا $y = \frac{۱}{x}$.

$$y' = -\frac{۱}{x^۲} \Longrightarrow m = y'(\frac{۱}{۳}) = -۹$$
$$y - ۳ = -۹(x - \frac{۱}{۳}) \Longrightarrow ۹x + y = ۶ \text{ معادله‌ی خط مماس}$$

خط قائم بر منحنی

۵ـ۵۵ خط قائم یا خط عمود بر منحنی، خطی است که در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود باشد.



۵ـ۵۶ شیب خط قائم بر منحنی برابر است با عکس و قرینه‌ی مشتق معادله‌ی منحنی به‌ازای مختصات نقطه‌ی تماس، یعنی کافی است شیب خط مماس را عکس و قرینه کنیم.

$$m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{m_{\text{مماس}}}$$

مثال شیب خط قائم بر منحنی $y = be^{-\frac{x}{a}}$ در نقطه‌ی برخورد این منحنی با محور yها را بیابید.

حل

$$x = 0, f'(x) = -\frac{b}{a}e^{-\frac{x}{a}} \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = f'(0) = -\frac{b}{a} \Longrightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{a}{b}$$: محور yها

تست شیب خط قائم بر نمودار تابع $xy^3 = 2$ در نقطه‌ای به‌طول $x = \frac{-1}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{3}{8}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$x = -\frac{1}{4} \Longrightarrow -\frac{1}{4}y^3 = 2 \Longrightarrow y = -2 \Longrightarrow \text{نقطه‌ی تماس } \left(-\frac{1}{4}, -2\right)$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y^3}{3xy^2} \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = -\frac{-8}{-\frac{3}{4}\times 4} = -\frac{8}{3} \Longrightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{3}{8}$$

۵ـ۵۷ طرز نوشتن معادله‌ی خط قائم بر منحنی: اگر نقطه‌ی (x_0, y_0) بر روی منحنی $y = f(x)$ قرار داشته باشد، معادله‌ی خط قائم بر منحنی عبارت است از:

$$y - y_0 = m_{\text{قائم}}(x - x_0)$$

مثال معادله‌ی خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y = x - 2\ln x$ در نقطه $x = 1$ واقع بر آن را بیابید.

حل

$$x = 1 \Longrightarrow y = 1 - 2\ln 1 = 1 - 0 = 1 \rightarrow \text{نقطه تماس } (1, 1)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x} \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = f'(1) = -1 \Longrightarrow m_{\text{قائم}} = 1$$

$$y - 1 = 1(x - 1) \Longrightarrow y = x \text{ معادله‌ی خط قائم}$$

تست معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y = x\sin x$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ واقع بر آن، محور عرض‌ها را در چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۰ ۴) ۲π

حل گزینه‌ی ۱.

$$x = \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow y = \frac{\pi}{۲}\cdot\sin\frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \text{نقطه تماس } \left(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$$

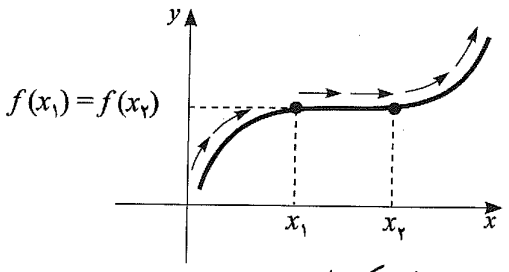
$$y' = \sin x + x\cos x \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = \sin\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲} = ۱ \Longrightarrow m_{\text{قائم}} = -۱$$

$$y - \frac{\pi}{۲} = -\left(x - \frac{\pi}{۲}\right) \Longrightarrow \text{معادله‌ی خط قائم } y = -x + \pi$$

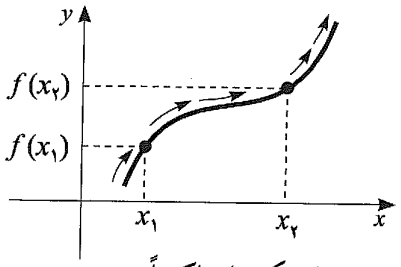
$$\text{محور عرض‌ها : } x = ۰ \Longrightarrow y = \pi$$

تابع صعودی و نزولی

۵ـ۵۸ تابع f را روی یک فاصله صعودی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر دو عضو این فاصله مانند $x_۱$ و $x_۲$ که $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) \leqslant f(x_۲)$ و آن را اکیداً صعودی می‌نامیم، هرگاه $f(x_۱) < f(x_۲)$.

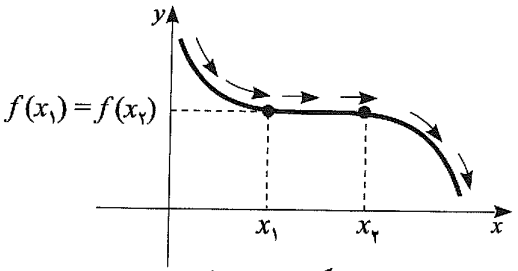


نمودار یک تابع صعودی

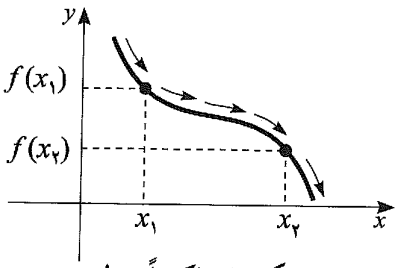


نمودار یک تابع اکیداً صعودی

۵ـ۵۹ تابع f را روی یک فاصله نزولی می‌نامیم. هرگاه به‌ازای هر دو عضو این فاصله مانند $x_۱$ و $x_۲$ که $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) \geqslant f(x_۲)$ و آن را اکیداً نزولی می‌نامیم هرگاه $f(x_۱) > f(x_۲)$.

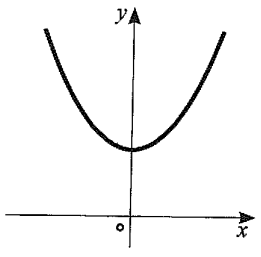


نمودار یک تابع نزولی

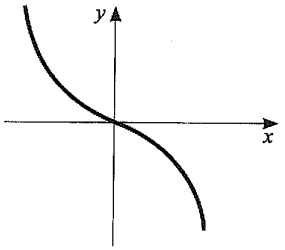


نمودار یک تابع اکیداً نزولی

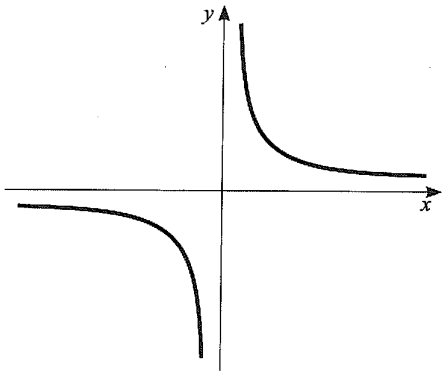
مثال تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ در بازه‌ی $[۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است، و در بازه‌ی $(-\infty, ۰]$ اکیداً نزولی است.



مثال تابع $f(x) = -x^3$ در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ اکیداً نزولی است.



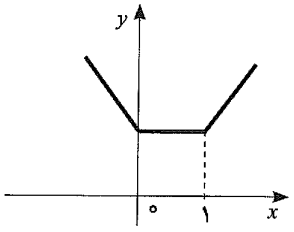
مثال تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{x}$ در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است، ولی این تابع در $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ نه اکیداً صعودی و نه اکیداً نزولی است. علت این امر وجود مجانب قائم $x = 0$ است.



تست تابع $f(x) = |x| + |x - 1|$ درکدام بازه اکیداً صعودی است؟

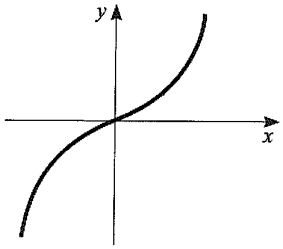
۱) $(0, +\infty)$ ۲) $(1, +\infty)$ ۳) $(0, 1)$ ۴) $(-\infty, 0)$

حل گزینه‌ی ۲. نمودار تابع f به شکل زیر است. و همان‌طورکه مشاهده می‌شود این تابع در بازه‌ی $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



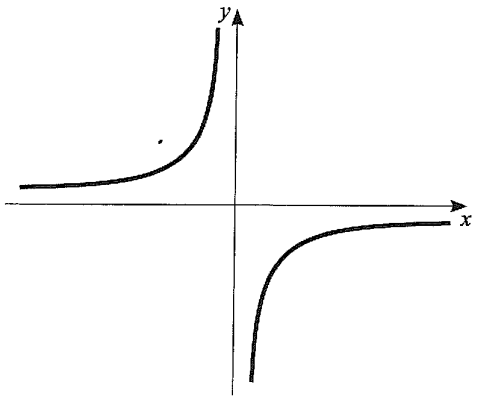
۵ـ۶۰ تابع f روی یک بازه یکنوا (اکیداً یکنوا) است، هرگاه در این بازه صعودی یا نزولی (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) باشد.

مثال تابع $f(x) = x^3$، $x \in \mathbb{R}$ در دامنه‌اش اکیداً یکنوا (در واقع یکنوای صعودی) است.

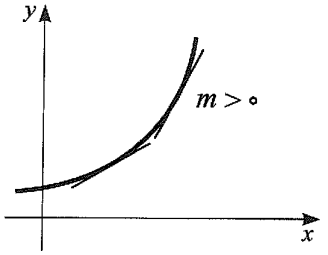


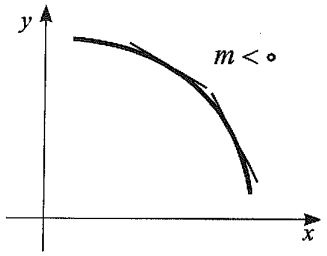
۵ـ۶۱ ممکن است یک تابع در بازه‌هایی از دامنه‌ی خودش اکیداً یکنوا باشد، ولی در دامنه‌اش اکیداً یکنوا نباشد.

مثال تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{-۱}{x}$ در هر یک از بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً یکنوا است، ولی در دامنه‌اش $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$، یکنوا نیست.



۵ـ۶۲ در شکل‌های زیر معلوم است که اگر نمودار یک تابع روی یک بازه، دارای خط مماس با شیب‌های مثبت باشد $(m>۰)$، آنگاه f روی آن بازه اکیداً صعودی است. به‌طور مشابه اگر شیب خطوط مماس منفی باشد $(m<۰)$ تابع اکیداً نزولی است.





۵ـ۶۳ آزمون مشتق اول برای تعیین صعودی و نزولی بودن: فرض کنید f روی فاصله‌ی (a,b) مشتق‌پذیر و در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد. دراین‌صورت اگر به‌ازای هر x در (a,b) داشته باشیم:

۱) $f'(x)>۰$، آنگاه f بر (a,b) اکیداً صعودی است.

۲) $f'(x)<۰$، آنگاه f بر (a,b) اکیداً نزولی است.

به‌طور مشابه:

۱) $f'(x)\geqslant ۰$، آنگاه f بر (a,b) صعودی است.

۲) $f'(x)\leqslant ۰$، آنگاه f بر (a,b) نزولی است.

۵ـ۶۴ نتیجه: برای بررسی جهت تغییرات تابع، ابتدا مشتق تابع را گرفته و نقاطی از دامنه را که به‌ازای آن‌ها مشتق مساوی صفر باشد $(y'=۰)$ و یا تعریف نشده باشد، تعیین می‌کنیم. به کمک آن‌ها y' را در جدول، تعیین علامت می‌کنیم. در فواصلی که مشتق مثبت است (و تابع در آن فاصله پیوسته باشد) تابع اکیداً صعودی (صعودی) و در فواصلی که مشتق منفی است (و تابع در آن فاصله پیوسته باشد) تابع اکیداً نزولی (نزولی) است.

مثال جهت تغییرات توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $y=x^۲e^{-x}$

۲) $y=۲x^۲-\ln x$

حل

$$y'=۲xe^{-x}-x^۲e^{-x}=(۲x-x^۲)e^{-x}=۰\Longrightarrow x=۰,x=۲$$

با توجه به این‌که همواره $e^{-x}>۰$، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

پس f روی $(-\infty, ۰)$ و $(۲, +\infty)$ نزولی و روی $(۰, ۲)$ صعودی است.

۲)

$$y' = ۴x - \frac{۱}{x} = \frac{۴x^۲ - ۱}{x}, D_f = (۰, +\infty)$$
$$y' = ۰ \Longrightarrow ۴x^۲ - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۲} \in D_f$$

x	۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

پس f روی $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ نزولی و روی $(\frac{۱}{۲}, +\infty)$ صعودی است.

تست نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x}{۱ - x^۲}$ بر کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-۲, ۰)$ ۲) $(-\infty, -۲)$ ۳) $(۰, ۲)$ ۴) $(-۲, ۲)$

حل گزینه‌ی ۲.

$$y' = \frac{۱ - x^۲ + ۲x^۲}{(۱ - x^۲)^۲} = \frac{۱ + x^۲}{(۱ - x^۲)^۲} \Longrightarrow y' > ۰$$

اما به‌ازای $x = \pm ۱$ مشتق وجود ندارد (مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند).

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
y		$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$	

گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ نادرست هستند زیرا تابع در این فواصل دارای نقطه‌ی ناپیوستگی است.

تست کدام یک از توابع زیر همواره صعودی است؟

۱) $f(x) = -x - \frac{۱}{x}$ ۲) $f(x) = x - \frac{۱}{x}$ ۳) $f(x) = -x + \frac{۱}{x}$ ۴) $f(x) = x + \frac{۱}{x}$

حل گزینه‌ی ۲.

۱) $f'(x) = -۱ + \frac{۱}{x^۲} \leqslant ۰$ ۲) $f'(x) = ۱ + \frac{۱}{x^۲} > ۰$

۳) $f'(x) = -۱ - \frac{۱}{x^۲} < ۰$ ۴) $f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} \leqslant ۰$

تست به‌ازای کدام مقدار a تابع $y = \frac{a\cos x}{1+\cos x}$ در فاصله‌ی $(0, \pi)$ نزولی است؟

۱) $a > 0$ ۲) $a < 0$ ۳) $-1 < a < 0$ ۴) $-4 < a < 0$

حل گزینه‌ی ۱.

$$y' = \frac{-a\sin x(1+\cos x) - (-\sin x)(a\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{-a\sin x}{(1+\cos x)^2} < 0 \Longrightarrow -a\sin x < 0$$

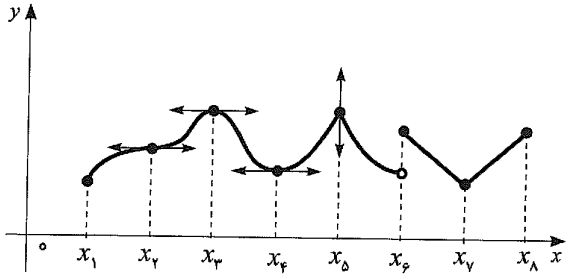
در فاصله‌ی $(0, \pi)$، تابع سینوس همواره مثبت است، پس از نامساوی فوق داریم $-a < 0$ یا $a > 0$.

۶۵ـ۵ اگر f و g هر دو اکیداً صعودی باشند، $g \circ f$ و $f \circ g$ نیز اکیداً صعودی‌اند. اگر یکی از f یا g صعودی و دیگری نزولی باشد. آنگاه $f \circ g$ و $g \circ f$ نیز نزولی است. به علاوه اگر f و g هر دو نزولی باشند، آنگاه $f \circ g$ و $g \circ f$ نیز هر دو صعودی‌اند.

نقطه‌ی بحرانی

۶۶ـ۵ نقطه‌ی x_0 یک نقطه بحرانی تابع f است هرگاه f در x_0 تعریف شده باشد $(x_0 \in D_f)$ و $f'(x_0) = 0$ یا $f'(x_0)$ وجود نداشته باشد.

مثال نقاط بحرانی نمودار تابع f در شکل زیر را مشخص کنید.



حل اولاً تابع f در نقاط x_1 و x_2، x_3 و x_4، x_5، x_6، x_7 و x_8 تعریف شده است.

ثانیاً:

۱) $f'(x_1)$ وجود ندارد، زیرا تابع f در x_1 پیوسته نیست.

۲) $f'(x_2) = 0$، زیرا خط مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xها است.

۳) $f'(x_3) = 0$، زیرا خط مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xهاست.

۴) $f'(x_4) = 0$، زیرا خط مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xهاست.

۵) $f'(x_5)$ وجود ندارد، زیرا خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه موازی محور yهاست.

۶) $f'(x_6)$ وجود ندارد، زیرا تابع در این نقطه ناپیوسته است.

۷) $f'(x_7)$ وجود ندارد، زیرا، این نقطه، نقطه‌ی زاویه‌دار است.

۸) $f'(x_8)$ وجود ندارد، زیرا تابع f در x_8 پیوسته نیست.

تذکر: طبق قرارداد، اگر f روی بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشد، آنگاه نقاط ابتدایی و انتهایی a و b نیز نقاط بحرانی تابع f هستند.

مثال نقاط بحرانی توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}$

۲) $f(x)=\dfrac{x+۱}{۲x-۳}$

۳) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۶x}$

۴ $f(x)=xe^{x-x^{۲}}$

۵) $f(x)=۲^{x}-x\ln ۲$

۶) $f(x)=x^{\frac{۸}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$

۷) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۲x+۳ & x<۲\\ x^{۲}-۶x & x\geqslant ۲\end{cases}$

۸) $f(x)=۳x^{۲}-|x|$

حل باید دید که $f'(x)$ در چه نقاطی وجود ندارد یا صفر است.

۱) چون تابع f چند جمله‌ای است و چند جمله‌ای‌ها در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند بنابراین نقاط بحرانی تابع f جواب‌های معادله‌ی $f'(x)=۰$ است.

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۰\Longrightarrow ۳x(x-۲)=۰\Longrightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$

نقاط بحرانی f نقاط ۰ و ۲ هستند.

۲)

$$f'(x)=\frac{۲x-۳-۲x-۲}{(۲x-۳)^{۲}}=\frac{-۵}{(۲x-۳)^{۲}}$$

مشتق این تابع در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود. از طرفی $f'(x)$ به‌ازای ریشه‌ی مخرج وجود ندارد، یعنی

$$(۲x-۳)^{۲}=۰\Longrightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

چون تابع f در $x=\frac{۳}{۲}$ تعریف نشده است پس $x=\frac{۳}{۲}$، هم یک نقطه بحرانی برای تابع f نیست. در نتیجه تابع f نقطه بحرانی ندارد.

۳)

$$f'(x)=\frac{۲x-۶}{۲\sqrt{x^{۲}-۶x}}=\frac{x-۳}{\sqrt{x^{۲}-۶x}}$$
$$f'(x)=۰\Longrightarrow x-۳=۰\Longrightarrow x=۳$$

چون تابع f در $x=۳$ تعریف نشده است $(۳\notin D_f)$ پس $x=۳$، یک نقطه بحرانی برای تابع f نیست از طرفی $f'(x)$ به‌ازای ریشه‌های مخرج وجود ندارد، یعنی:

$$\sqrt{x^{۲}-۶x}=۰\Longrightarrow x(x-۶)=۰\Longrightarrow x=۰, x=۶$$

پس f' هیچ صفری ندارد. بنابراین، ۰ و ۶ تنها نقاط بحرانی تابع f هستند.

۴)

$$f'(x)=e^{x-x^{۲}}+x[(۱-۲x)e^{x-x^{۲}}]=(-۲x^{۲}+x+۱)e^{x-x^{۲}}$$
$$f'(x)=۰\Longrightarrow -۲x^{۲}+x+۱=۰\Longrightarrow x=۱,-\frac{۱}{۲}\in D_f$$

نقاط بحرانی f نقطه‌های $-\frac{۱}{۲}$ و ۱ هستند.

۵)

$$f'(x) = ۲^x . \ln ۲ - \ln ۲ = (۲^x - ۱) \ln ۲$$
$$f'(x) = ۰ \Longrightarrow ۲^x - ۱ = ۰ \Longrightarrow ۲^x = ۱ \Longrightarrow x = ۰ \in D_f$$

تنها نقطه بحرانی f نقطه‌ی ۰ است.

۶)

$$f'(x) = \frac{۸}{۳} x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳} x^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۸x^۲ - ۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$
$$f'(x) = ۰ \Longrightarrow ۸x^۲ - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = \pm \frac{۱}{۲} \in D_f$$

از طرفی $f'(x)$ به‌ازای ریشه‌ی مخرج، وجود ندارد.

$$۳\sqrt[۲]{x} = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \in D_f$$

پس نقاط[۱] بحرانی f نقاط $-\frac{۱}{۲}$ و ۰ و $\frac{۱}{۲}$ هستند.

۷) تابع f در نقطه‌ی $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا در این نقطه پیوسته نیست[۱] پس:

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۲ & x < ۲ \\ ۲x - ۶ & x > ۲ \end{cases}, f'(x) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} ۲x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \\ ۲x - ۶ = ۰ \Longrightarrow x = ۳ \end{cases}$$

لذا، نقاط بحرانی تابع f نقاط ۱، ۲ و ۳ هستند.

۸)

$$f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - x & x \geqslant ۰ \\ ۳x^۲ + x & x < ۰ \end{cases}$$

تابع f در نقطه‌ی $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا در این نقطه مشتق راست و چپ مساوی نیستند. بنابراین:

$$f'(x) = \begin{cases} ۶x - ۱ & x > ۰ \\ ۶x + ۱ & x < ۰ \end{cases}, f'(x) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} ۶x - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۶} \\ ۶x + ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -\frac{۱}{۶} \end{cases}$$

بنابراین نقاط بحرانی f نقاط $\frac{۱}{۶}$، ۰ و $-\frac{۱}{۶}$ هستند.

تست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^۲ - ۱| + ۱$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ندارد

حل گزینه‌ی ۳.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ + ۱ & x^۲ - ۱ \geqslant ۰ \\ -x^۲ + ۱ + ۱ & x^۲ - ۱ < ۰ \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geqslant ۱ \text{ یا } x \leqslant -۱ \\ -x^۲ + ۲ & -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

---

۱. اگر تابع چند ضابطه‌ی باشد، مشتق‌پذیری تابع را در xهای مرزی بررسی می‌کنیم. در همه‌ی موارد ریشه‌های به‌دست آمده باید در بازه‌ی $[a, b]$ باشد.

تابع f در نقاط $x=1$ و $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین.

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>1 \text{ یا } x<-1\\ -2x & -1<x<1\end{cases} \Longrightarrow f'(x)=0 \Longrightarrow x=0$$

بنابراین نقاط -1 و 0 و 1 نقاط بحرانی تابع f هستند.

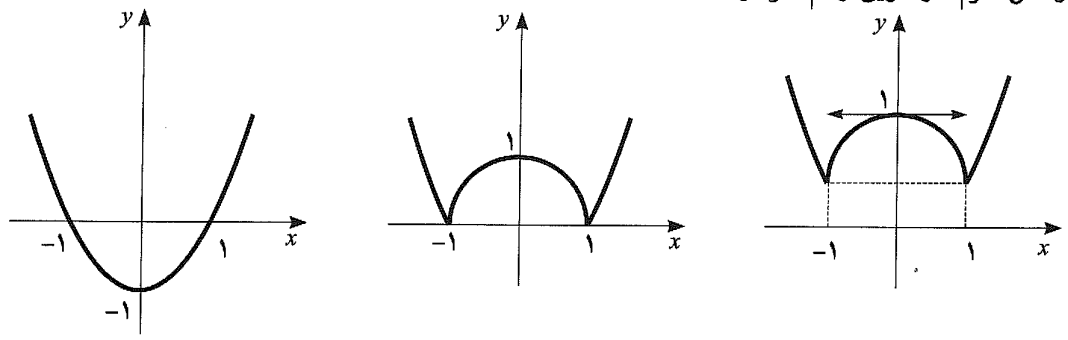
راه‌حل دوم:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)}{|x^2-1|} \Longrightarrow f'(x)=0 \Longrightarrow 2x=0 \Longrightarrow x=0$$

$f'(x) \Longrightarrow x^2-1=0 \Longrightarrow x=\pm 1$ موجود نباشد.

بنابراین نقاط -1 و 0 و 1 نقاط بحرانی تابع f هستند.

راه‌حل سوم (از طریق رسم نمودار):



$f'(1)$ و $f'(-1)$ وجود ندارد، زیرا -1 و 1 نقاط زاویه‌دار تابع هستند و $f'(0)=0$ زیرا خط مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xها است.

تست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ندارد.

حل گزینه‌ی ۴.

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|} \Longrightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+x} & x\geqslant 0\\ \frac{x}{1-x} & x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1+x)^2} & x>0\\ \frac{1}{(1-x)^2} & x<0\end{cases} \qquad f'(0^+)=f'(0^-)=1$$

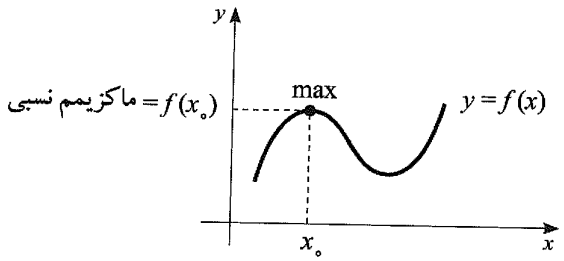
چون همواره مشتق‌پذیر است و مشتق آن ناصفر است، بنابراین f نقطه‌ی بحرانی ندارد.

ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی (اکسترمم‌های نسبی)

۶۷ـ۵ فرض کنید f در یک بازه‌ی I (بسته، باز، نیم باز، نامتناهی) تعریف شده است و x_0 یک نقطه درونی بازه‌ی I است:

۱) اگر به‌ازای هر x متعلق به یک همسایگی x_0، $f(x_0)$ از عرض‌های نقاط مجاور (x_0^-, x_0^+) بیش‌تر باشد:

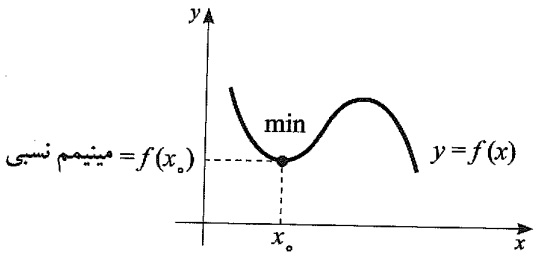
$$f(x_0)\geqslant f(x)$$



دراین‌صورت $f(x_\circ)$ مقدار ماکزیمم نسبی برای تابع f است و $x_\circ$ را یک نقطه‌ی ماکزیمم نسبی f می‌نامیم.

۲) اگر به‌ازای هر x متعلق به یک همسایگی $x_\circ$، $f(x_\circ)$ از عرض‌های نقاط مجاور $(x_\circ^-, x_\circ^+)$ کم‌تر باشد:

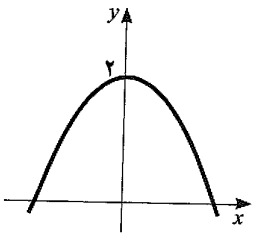
$$f(x_\circ) \leqslant f(x)$$



دراین‌صورت $f(x_\circ)$ مقدار مینیمم نسبی برای تابع f است و $x_\circ$ را یک نقطه‌ی مینیمم نسبی f می‌نامیم.

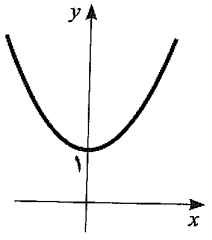
۶۸ـ۵ اگر تابع f در $x = x_\circ$ دارای ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی باشد، می‌گویند f در $x = x_\circ$ دارای اکسترمم نسبی است و $x = x_\circ$ را که طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی است، در اصطلاح نقطه‌ی اکسترمم تابع می‌گویند و مقدار $f(x_\circ)$ را اکسترمم نسبی f می‌نامند.

مثال تابع $f(x) = -x^2 + 2$، در نقطه‌ی $x = 0$ ماکزیمم نسبی دارد.



ماکزیمم نسبی این تابع ۲ است $(f(0) = 2)$.

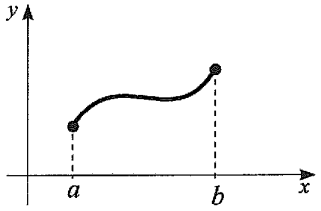
مثال تابع $f(x) = x^2 + 1$، در نقطه‌ی $x = 0$ مینیمم نسبی دارد.



مینیمم نسبی این تابع ۱ است $(f(0) = 1)$.

۶۹ـ۵ اگر f در یک همسایگی چپ یا راست نقطه‌ی $x = x_0$ تعریف نشده باشد، آنگاه نقطه‌ی $x = x_0$ اکسترمم نسبی تابع f نیست. به بیان ساده‌تر، نقاط ابتدا و انتهای یک تابع هیچوقت اکسترمم نسبی نیستند.

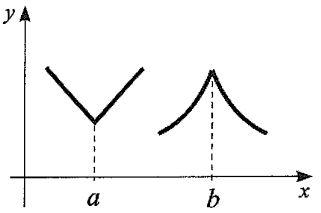
مثال در شکل زیر، تابع f در نقطه‌ی $x = a$ اکسترمم نسبی ندارد زیرا f در همسایگی چپ این نقطه تعریف نشده است. تابع f در نقطه‌ی $x = b$ اکسترمم نسبی ندارد زیرا f در همسایگی راست این نقطه تعریف نشده است.



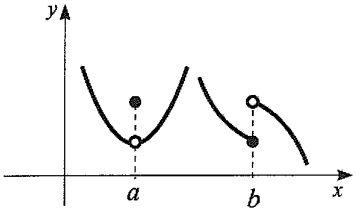
مثال در تابع به معادله‌ی $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ داریم $D_f = [-1, 1]$، پس این تابع نمی‌تواند در نقاطی به‌طول $x_0 = 1$ و $x_0 = -1$ اکسترمم نسبی داشته باشد. زیرا تابع f در همسایگی نقاطی به طول‌های $x_0 = 1$ و $x_0 = -1$ تعریف نشده است.

۷۰ـ۵ اگر تابع f در نقطه‌ی به طول x_0 اکسترمم نسبی باشد. لزومی ندارد تابع f در $x = x_0$ مشتق‌پذیر یا حتی پیوسته باشد. پس، اکسترمم بودن هیچ ربطی به پیوستگی و مشتق‌پذیری ندارد. یعنی ممکن است یک نقطه اکسترمم باشد ولی اصلاً پیوسته یا مشتق‌پذیر نباشد.

مثال در شکل زیر، تابع f در نقطه‌ی $x = a$ مینیمم نسبی دارد، اما $f'(a)$ وجود ندارد زیرا تابع f در این نقطه زاویه‌دار است. تابع f در نقطه‌ی $x = b$ ماکزیمم نسبی دارد، اما $f'(b)$ وجود ندارد زیرا خط مماس بر منحنی تابع موازی محور yهاست.



مثال در شکل زیر، تابع f در نقطه‌ی $x_0 = a$ ماکزیمم نسبی و در $x_0 = b$ مینیمم نسبی دارد. اما تابع f در a و b نه پیوسته است، و نه مشتق‌پذیر.



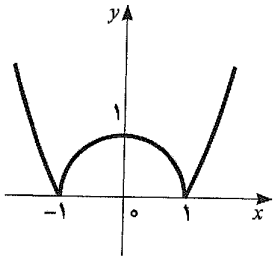
مثال به‌کمک رسم نمودار نقاط اکسترمم نسبی هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

$$۱) f(x) = |x^2 - 1| \qquad ۲) f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

حل

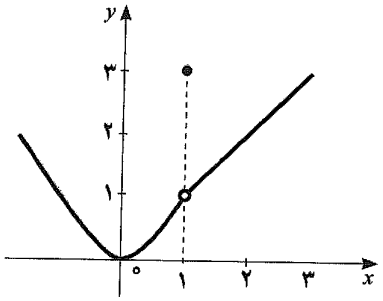
۱) تابع f در نقطه‌ی $x = ۱$ و $x = -۱$ مینیمم نسبی دارد. مینیمم نسبی این تابع ۰ است، زیرا

$$f(۱) = ۰, f(-۱) = ۰$$



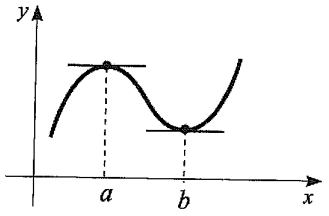
تابع در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. تابع f در نقطه‌ی $x = ۰$ ماکزیمم نسبی دارد. ماکزیمم نسبی این تابع ۱ است، زیرا $f(۰) = ۱$.

۲) تابع f در نقطه‌ی $x = ۰$ مینیمم نسبی دارد. مینیمم نسبی این تابع ۰ است، زیرا $f(۰) = ۰$. تابع f در نقطه $x = ۱$ ماکزیمم نسبی دارد. ماکزیمم نسبی این تابع ۳ است، زیرا $f(۱) = ۳$. تابع در این نقطه نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر.



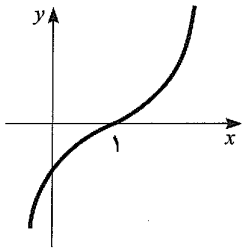
۵ـ۷۱ اگر تابع f در $x = x_۰$ اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(x_۰)$ وجود داشته باشد، آنگاه $f'(x_۰) = ۰$ است.

مثال در شکل زیر، تابع f در نقطه‌ی $x_۰ = a$ ماکزیمم نسبی و در $x_۰ = b$ مینیمم نسبی دارد و نیز $f'(a) = ۰$ و $f'(b) = ۰$. زیرا شیب خط مماس در این نقاط مساوی صفر است.



۵ـ۷۲ باید قضیه‌ی (۵ـ۷۱) را درست به‌کاربرد. این قضیه نمی‌گوید اگر $f'(x_۰) = ۰$، آن‌گاه تابع f در $x = x_۰$ دارای اکسترمم نسبی است به بیان ساده‌تر، ممکن است در تابع f، $f'(x_۰)$ مساوی صفر باشد، ولی $x_۰$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی نباشد.

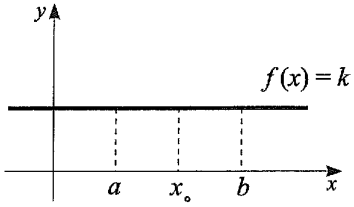
مثال در تابع به معادله‌ی $f(x) = (x-۱)^۳$، در $x = ۱$ داریم $f'(۱) = ۰$. اما در $x = ۱$، تابع f اکسترمم نسبی ندارد.



۷۳ـ۵ اگر تابع حقیقی f در $x = x_0$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(x_0) \neq 0$ آنگاه f در $x = x_0$ اکسترمم نسبی ندارد.

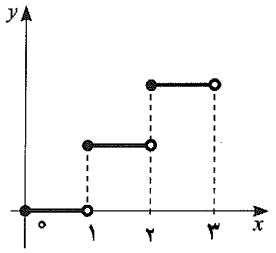
مثال در تابع به معادله‌ی $f(x) = x^3$، در $x = 1$ داریم $f'(1) = 3 \neq 0$، پس f در $x = 1$ اکسترمم نسبی ندارد.

۷۴ـ۵ برای تابع ثابت با ضابطه‌ی $f(x) = k$ هر نقطه از دامنه که f در پیرامون آن تعریف شده باشد. هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است. اگر این تابع بر بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشد، دراین‌صورت هر نقطه‌ی $a < x_0 < b$ هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.



پس، اگر در یک بازه تابع ثابت باشد نقاط این بازه هم ماکزیمم نسبی هستند و هم مینیمم نسبی.

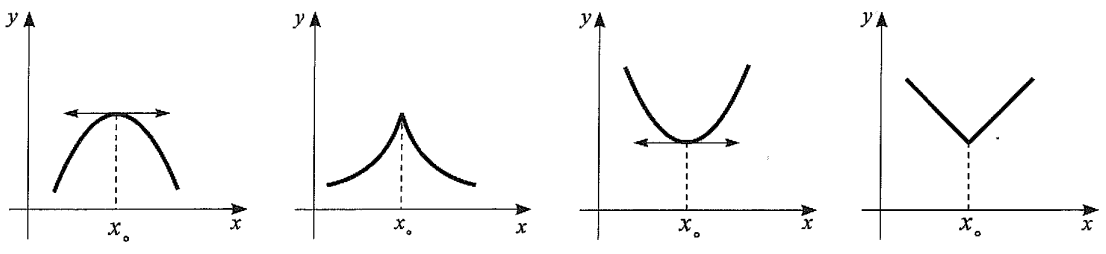
۷۵ـ۵ برای تابع جزء صحیح $f(x) = [x]$ هر نقطه‌ی صحیح یک ماکزیمم نسبی است، ولی هر نقطه‌ی غیرصحیح، هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.

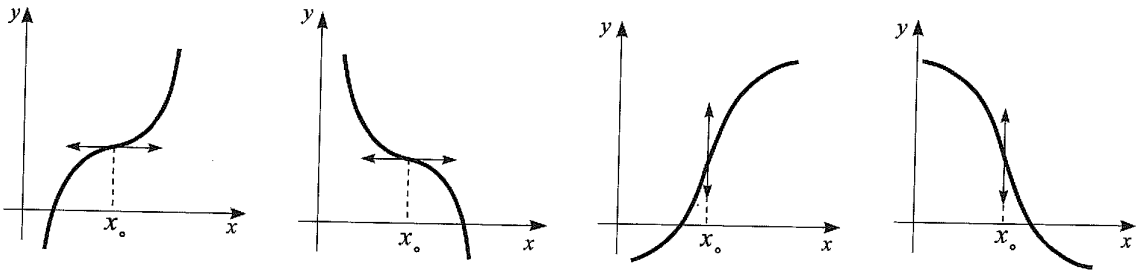


مثلاً در $x = 2$ تابع ماکزیمم نسبی دارد، و در $x = 1/3$ هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی دارد، زیرا f در یک همسایگی $x = 1/3$ تابع ثابت است.

آزمون مشتق اول برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی

۷۶ـ۵ به شکل‌های زیر دقت کنید





(۵) (۶) (۷) (۸)

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید، اگر منحنی، در سمت چپ x_0 صعودی و در سمت راست آن نزولی باشد، در x_0 یک ماکزیمم نسبی دارد (شکل‌های ۱ و ۲). اگر منحنی، در سمت چپ x_0 نزولی و در سمت راست آن صعودی باشد، در x_0 یک مینیمم نسبی دارد (شکل‌های ۳ و ۴). اگر منحنی، در هر دو سمت x_0 صعودی و یا در هر دو سمت x_0 نزولی باشد، آنگاه در x_0 هیچ اکسترمم نسبی وجود ندارد (شکل‌های ۵، ۶، ۷ و ۸).

x	x_0		
$f'(x)$	$+$	نقطه بحرانی	$-$
$f(x)$	↗	$f(x_0)$ max	↘

x	x_0		
$f'(x)$	$-$	نقطه بحرانی	$+$
$f(x)$	↘	$f(x_0)$ min	↗

۷۷ـ۵ قضیه فرض کنید تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، هم‌چنین فرض کنید x_0 نقطه‌ای بحرانی در بازه‌ی (a,b) باشد.

۱) اگر f' در x_0 از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، f در نقطه‌ی x_0 ماکزیمم نسبی دارد.

۲) اگر f' در x_0 از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، f در نقطه‌ی x_0، مینیمم نسبی دارد.

۳) اگر f' در x_0 تغییر علامت ندهد، f در نقطه‌ی x_0 اکسترمم نسبی ندارد.

۷۸ـ۵ چگونه نقاط اکسترمم نسبی یک تابع حقیقی را پیدا می‌کنیم؟ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم، سپس ریشه‌های معادله‌ی مشتق ($y'=0$) و نقاطی از دامنه که مشتق در آن‌ها وجود ندارد را می‌یابیم (به‌طور خلاصه نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم)، سپس تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم. اگر f' در این نقاط، تغییر علامت دهد، آنگاه این نقاط اکسترمم تابع f هستند، و طبق جدول مطلب (۵ـ۷۶) می‌توان ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع f را مشخص کرد.

مثال نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x)=x^3-3x$

۲) $f(x)=\sqrt{-x^2+4}$

۳) $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$

۴) $f(x)=x\ln x$

۵) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

۶) $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2-2x-3 & 2<x\leqslant 3\end{cases}$

حل

۱)

$$f'(x)=3x^2-3,\ f'(x)=0\Longrightarrow 3x^2-3=0\Longrightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\underset{\max}{۲}$	$\searrow$	$\underset{\min}{-۲}$	$\nearrow$	

نقطه $(-۲, -۱)$ نقطه مینیمم نسبی و نقطه‌ی $(۲, -۱)$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است.

۲) می‌دانیم $D_f = [-۲, ۲]$ و:

$$f'(x) = \frac{-۲x}{۲\sqrt{-x^۲ + ۴}} = \frac{-x}{\sqrt{-x^۲ + ۴}} \Longrightarrow f'(x) = \circ \Longrightarrow x = \circ \in D_f$$

$f'(x)$ موجود نباشد $\Longrightarrow -x^۲ + ۴ = \circ \Longrightarrow x = \pm ۲$

x	-۲		$\circ$		۲
$f'(x)$		$+$	$\circ$	$-$	
$f(x)$	$\circ$	$\nearrow$	$\underset{\max}{۲}$	$\searrow$	$\circ$

نقطه‌ی $(\circ, ۲)$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است.

۳)

$$f'(x) = ۲e^{۲x} - ۲e^{-۲x} \Longrightarrow f'(x) = \circ \Longrightarrow ۲e^{۲x} - ۲e^{-۲x} = \circ \Longrightarrow x = \circ$$

x	$-\infty$		$\circ$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\circ$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\underset{\min}{۲}$	$\nearrow$	

نقطه‌ی $(\circ, ۲)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f است.

۴)

$$f'(x) = \ln x + ۱ \Longrightarrow f'(x) = \circ \Longrightarrow \ln x = -۱ \Longrightarrow x = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

x	$\circ$		$e^{-۱}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\circ$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\underset{\min}{\frac{-۱}{e}}$	$\nearrow$	

نقطه‌ی $(e^{-۱}, -e^{-۱})$ نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f است.

۵)

$$f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}} \Longrightarrow f'(x) = \circ \Longrightarrow \text{ ریشه ندارد}$$

$f'(x)$ موجود نباشد $\Longrightarrow x - ۱ = \circ \Longrightarrow x = ۱$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	∞	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\circ$	$\nearrow$	

نقطه $(۱, \circ)$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f نیست.

۶)

$$f'(x) = \begin{cases} -۲x & \circ < x < ۲ \\ ۲x - ۲ & ۲ < x < ۳ \end{cases}$$

$$f'(x) = \circ \Longrightarrow \begin{cases} -۲x = \circ \Longrightarrow x = \circ \notin (\circ, ۲) \\ ۲x - ۲ = \circ \Longrightarrow x = ۱ \notin (۲, ۳) \end{cases}$$

در نقطه $x = ۲$، مشتق وجود ندارد زیرا $f'(۲^+) = ۲$ و $f'(۲^-) = -۴$.

x	$\circ$		۲		۳
$f'(x)$		$-$	∞	$+$	
$f(x)$	۱	$\searrow$	$\underset{\min}{-۳}$	$\nearrow$	$\circ$

نقطه $(-۳, ۲)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f است.

مثال به‌ازای کدام مقدار از m، مجموع طول‌های ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = mx^۳ - ۳x^۲ - x$ برابر یک می‌باشد؟

حل طول‌های ماکزیمم و مینیمم جواب‌های معادله $y' = \circ$ است.

$$y' = ۳mx^۲ - ۶x - ۱, x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} \Longrightarrow ۱ = \frac{۶}{۳m} \Longrightarrow m = ۲$$

تست تابع $f(x) = ۳\sqrt[۳]{x^۲} - x^۲$:

۱) ماکزیمم و مینیمم ندارد

۲) یک ماکزیمم و یک مینیمم دارد.

۳) دو ماکزیمم و یک مینیمم دارد.

۴) یک ماکزیمم و دو مینیمم دارد.

حل گزینه‌ی ۳.

$$f'(x) = \frac{۳ \times ۲}{۳\sqrt[۳]{x}} - ۲x = \frac{۲}{\sqrt[۳]{x}} - ۲x = \frac{۲ - ۲x\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x) = \circ \Longrightarrow ۲ - ۲x\sqrt[۳]{x} = \circ \Longrightarrow x\sqrt[۳]{x} = ۱ \Longrightarrow x = \pm ۱$$

$f'(x) \Longrightarrow \sqrt[۳]{x} = \circ \Longrightarrow x = \circ$ موجود نباشد.

x	$-\infty$		-۱		$\circ$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\circ$	$-$	∞	$+$	$\circ$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

تست ماکزیمم تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ برابر است با:

۱) e^e ۲) $\left(\frac{1}{e}\right)^e$ ۳) $(e)^{\frac{1}{e}}$ ۴) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

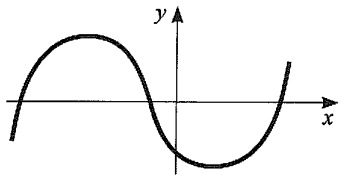
حل گزینه‌ی ۳.

$$f(x) = (x)^{-x} \Longrightarrow y' = -x^{-x}(1 + \ln x)$$

$$y' = 0 \Longrightarrow 1 + \ln x = 0 \Longrightarrow \ln x = -1 \Longrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

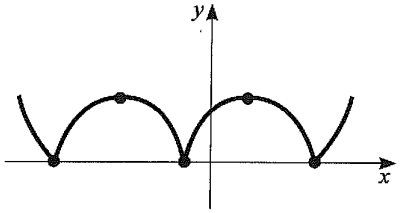
$$y_{\max} = \left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right)^{\frac{1}{e}} = (e)^{\frac{1}{e}}$$

تست اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار $y = |f(x)|$ چند نقطه‌ی اکسترمم نسبی خواهد داشت؟



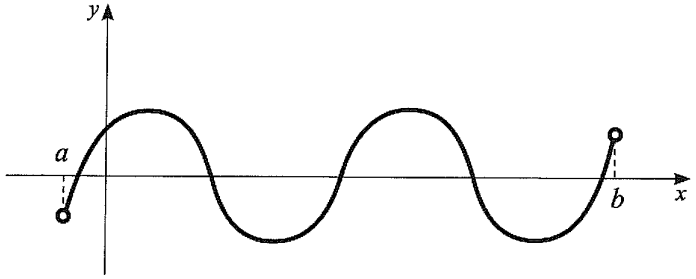
۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

حل گزینه‌ی ۴. با توجه به نمودار $y = f(x)$ نمودار $y = |f(x)|$ را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم و این نمودار پنج نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارد.



۵ـ۷۹ نقاطی که نمودار f' محور xها را قطع کرده و از محور xها بگذرد، نقاط اکسترمم نسبی نمودار f هستند. در این حالت اگر نمودار f' از پایین محور xها به‌سمت بالای محور xها باشد، نقطه‌ی تقاطع نمودار f' نقطه‌ی مینیمم نسبی نمودار f است و اگر نمودار f' از بالای محور xها به‌سمت پایین محور xها باشد، نقطه‌ی تقاطع نمودار f' با محور xها نقطه‌ی ماکزیمم نسبی نمودار f است.

تست نمودار مشتق تابع f در بازه‌ی (a, b) به‌صورت زیر است. تابع f در این بازه چند نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارد؟



۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۷

حل گزینه‌ی ۱. محل تلاقی نمودار f' با محور xها از چپ به راست به ترتیب min، max، min، max و min می‌باشد.

۵ـ۸۰ ویژگی نقطه‌ی اکسترمم نسبی: فرض کنید تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در نقطه‌ی به طول $x_0 \in D_f$ مشتق داشته باشد و این تابع در نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ اکسترمم نسبی داشته باشد، بنابراین داریم:

اولاً: مختصات نقطه‌ی A در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند، یعنی $y_0 = f(x_0)$.

ثانیاً: مشتق تابع f به‌ازای طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی برابر صفر است، یعنی $f'(x_0) = 0$.

مثال مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 3$ در نقطه‌ی $(1, 2)$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد.

حل

$$(1,2) \Longrightarrow a + b - 1 + 3 = 2 \Longrightarrow a + b = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 1 \Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b - 1 = 0 \Longrightarrow 3a + 2b = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2a - 2b = 0 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1, b = -1$$

تست اگر نقطه‌ی $M(1, 2)$ یکی از نقاط ماکزیمم یا مینیمم تابع $y = \dfrac{x^2 + 3}{ax + b}$ باشد، $a - b$ چه‌قدر است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱−

حل گزینه‌ی ۱.

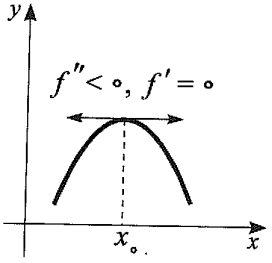
$$f(1) = 2 \Longrightarrow \frac{1 + 3}{a + b} = 2 \Longrightarrow a + b = 2$$

$$f'(x) = \frac{2x(ax + b) - a(x^2 + 3)}{(ax + b)^2} \Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow -2a + 2b = 0$$

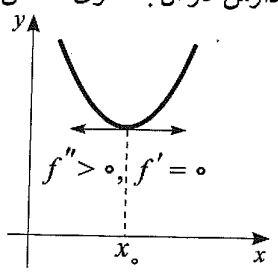
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a + 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 4 \\ -2a + 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow 4b = 4 \Longrightarrow b = 1, a = 1 \Longrightarrow a - b = 0$$

آزمون مشتق دوم برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی[1]

۵ـ۸۱ آزمون دیگری برای تعیین اکسترمم‌های نسبی یک تابع وجود دارد. به این صورت که یک تابع مشتق‌پذیر در جایی که ماکزیمم نسبی دارد نمودارش در آن‌جا دارای مماس افقی بوده و تقعرش به‌طرف پایین باشد (شکل ۱) و مینیمم نسبی دارد، هرگاه نمودارش در آن‌جا دارای مماس افقی بوده و تقعرش رو به بالا باشد (شکل ۲).



(۱)



(۲)

۱. دانشجویان می‌توانند این مبحث را پس از مطالعه‌ی «جهت تقعر یک منحنی» بخوانند.

۵ـ۸۲ قضیه: اگر $x = x_0$ نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد، به‌طوری‌که $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0)$ نیز موجود باشد، دراین‌صورت:

۱) اگر $f''(x_0) > 0$، آنگاه f در نقطه‌ی x_0 مینیمم نسبی دارد.

۲) اگر $f''(x_0) < 0$، آنگاه f در نقطه‌ی x_0 ماکزیمم نسبی دارد.

۳) اگر $f''(x_0) = 0$، آنگاه آزمون نتیجه‌ای ندارد.

۵ـ۸۳ نتیجه: بنابر آزمون مشتق دوم، برای پیدا کردن نقاطی که تابع مشتق‌پذیر f در آن‌ها ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی دارد، ابتدا معادله‌ی $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم. اگر x_0 یک جواب معادله‌ی اخیر باشد، آن را در مشتق مرتبه‌ی دوم یعنی $f''(x)$ قرار می‌دهیم و چنانچه $f''(x_0)$ مثبت شود، f در x_0 یک مینیمم نسبی برابر با $f(x_0)$ دارد و اگر $f''(x_0)$ منفی شود، f در x_0 یک ماکزیمم نسبی برابر با $f(x_0)$ دارد.

مثال نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$۱) f(x) = xe^{-x} \qquad ۲) f(x) = ۱ + x\ln x$$

حل

۱)

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (۱ - x)e^{-x} \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow x = ۱$$
$$f''(x) = -e^{-x} - (۱ - x)e^{-x} = (x - ۲)e^{-x}$$
$$f''(۱) = (۱ - ۲)e^{-۱} = \frac{-۱}{e} < 0$$

پس f در $x = ۱$ یک ماکزیمم نسبی برابر با $\frac{-۱}{e}$ دارد، $\max(۱, \frac{-۱}{e})$.

۲)

$$f'(x) = \ln x + x.\frac{۱}{x} = \ln x + ۱ \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow x = e^{-۱}$$
$$f''(x) = \frac{۱}{x} \Longrightarrow f''(e^{-۱}) = \frac{۱}{e^{-۱}} = e > 0$$

پس f در $x = e^{-۱}$ یک مینیمم نسبی برابر با $(۱ - e^{-۱})$ دارد، $\min(e^{-۱}, ۱ - e^{-۱})$

تست اگر f'' موجود باشد و $x_۱$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی و $x_۲$ نقطه‌ی مینیمم نسبی f باشند، کدام گزاره درست است؟

۱) $f''(x_۱)f''(x_۲) > 0$ ۲) $f''(x_۱)f''(x_۲) < 0$

۳) $f'(x_۱)f'(x_۲) > 0$ ۴) $f(x_۱)f(x_۲) = 0$

حل گزینه‌ی ۲..

$$\left.\begin{array}{l} \max \text{نقطه‌ی } x_۱ \Longrightarrow f'(x_۱) = 0, f''(x_۱) < 0 \\ \min \text{نقطه‌ی } x_۲ \Longrightarrow f'(x_۲) = 0, f''(x_۲) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f''(x_۱)f''(x_۲) < 0$$

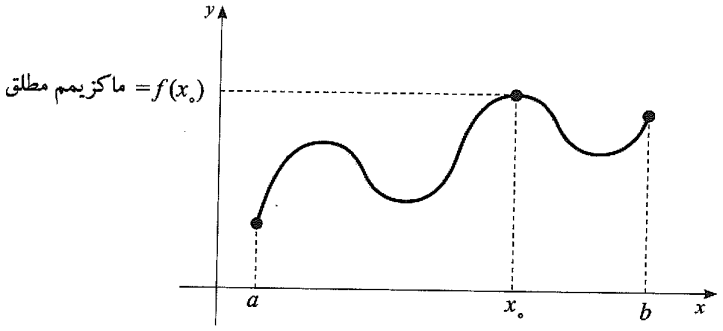
ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق (اکسترمم‌های مطلق)

۸۴ـ۵ فرض کنید تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده است و x_0 نقطه‌ای از این بازه است. اگر به‌ازای هر $x \in [a,b]$:

۱) $f(x_0)$ ازکلیه‌ی عرض‌های نقاط این بازه بیش‌تر باشد:

$$f(x_0) \geqslant f(x)$$

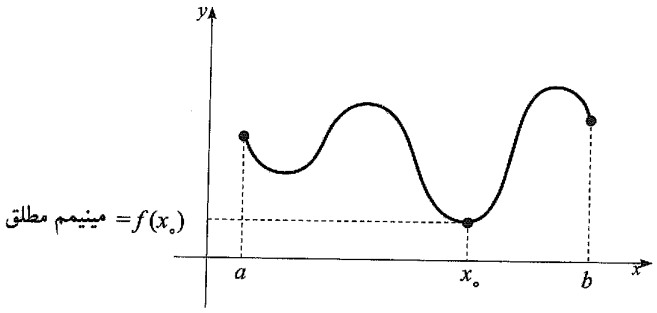
دراین‌صورت می‌گوییم f در x_0 ماکزیمم مطلق دارد و $f(x_0)$ را مقدار ماکزیمم مطلق تابع f گوییم.



۲) $f(x_0)$ ازکلیه‌ی عرض‌های نقاط این بازه کم‌تر باشد:

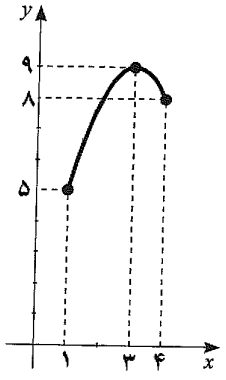
$$f(x_0) \leqslant f(x)$$

دراین‌صورت می‌گوییم f در x_0 مینیمم مطلق دارد و $f(x_0)$ را مقدار مینیمم مطلق تابع f گوییم.



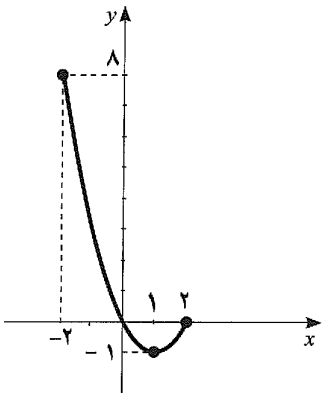
۸۵ـ۵ اگر تابع f در $x = x_0$ دارای ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق باشد، می‌گویند f در $x = x_0$ دارای اکسترمم مطلق است و $x = x_0$ را که طول نقطه‌ی اکسترمم مطلق است، در اصطلاح نقطه‌ی اکسترمم تابع می‌گویند و مقدار $f(x_0)$ را اکسترمم مطلق f می‌نامند.

۸۶ـ۵ دقت کنید که لزومی ندارد تابع در همسایگی x_0 تعریف شده باشد تا نقطه به طول x_0 ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع باشد.



مثال تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^2 + 6x$ در بازه‌ی $[1,4]$ دارای مینیمم مطلق $f(1) = 5$ است. زیرا برای هر $x \in [1,4]$، داریم $f(1) \leqslant f(x)$.

توجه کنید که تابع f درست چپ نقطه‌ی $x = 1$ تعریف نشده است و بنابراین f در نقطه‌ی $x = 1$ مینیمم نسبی ندارد.



مثال تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۲ - ۲x$ در فاصله‌ی $[-۲, ۲]$ دارای ماکزیمم مطلق $f(-۲) = ۸$ است. زیرا برای هر $x \in [-۲, ۲]$، داریم $f(x) \leqslant f(-۲)$.

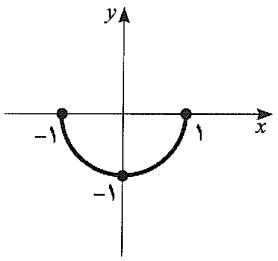
توجه کنید که تابع f در سمت چپ نقطه‌ی $x = -۲$ تعریف نشده است و بنابراین f در نقطه‌ی $x = -۲$ ماکزیمم نسبی ندارد.

مثال به کمک رسم نمودار نقاط اکسترمم مطلق هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

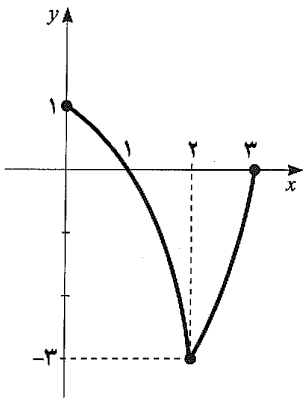
۱) $f(x) = -\sqrt{۱ - x^۲}$ $\quad [-۱, ۱]$

۲) $f(x) = \begin{cases} -x^۲ + ۱ & ۰ \leqslant x \leqslant ۲ \\ x^۲ - ۲x - ۳ & ۲ < x \leqslant ۳ \end{cases}$

حل

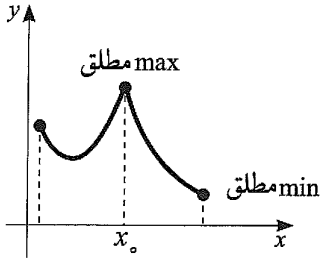


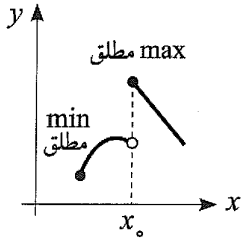
۱) تابع f در $x = ۰$ مینیمم مطلق دارد. چون f در اطراف این نقطه، تعریف شده است، در نتیجه $x = ۰$ نقطه‌ی مینیمم نسبی نیز هست و هم‌چنین f در $x = \pm ۱$ دارای ماکزیمم مطلق است. این نقاط ماکزیمم نسبی نیستند. چرا؟ بنابراین مینیمم مطلق تابع برابر -۱ و ماکزیمم مطلق تابع برابر ۰ است.



۲) تابع f در نقطه‌ی $x = ۲$ دارای مینیمم مطلق است. چون f در اطراف این نقطه، تعریف شده است، در نتیجه $x = ۲$ نقطه مینیمم نسبی نیز هست. هم‌چنین f در $x = ۰$ دارای ماکزیمم مطلق است. بنابراین مینیمم مطلق تابع برابر -۳ و ماکزیمم مطلق برابر ۱ است.

۸۷ـ۵ لزومی ندارد که تابع f در نقاط اکسترمم مطلق پیوسته و یا مشتق‌پذیر باشد مانند نمودارهای زیر:



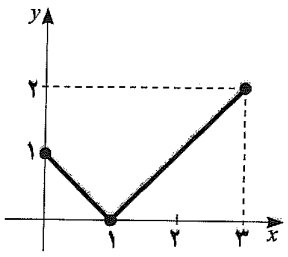


مثال به کمک رسم نمودار نقاط اکسترمم نسبی و مطلق هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

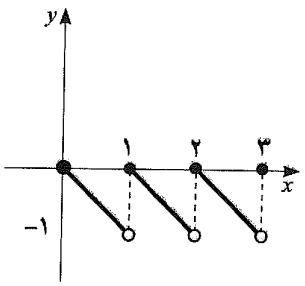
۱) $f(x) = |x - ۱|, x \in [۰, ۳]$ ۲) $f(x) = [x] - x, x \in [۰, ۳]$

حل

۱) تابع f در نقطه‌ی $x = ۱$ مینیمم مطلق دارد. چون f در اطراف این نقطه، تعریف شده است، در نتیجه $x = ۱$ نقطه مینیمم نسبی نیز هست (f در $x = ۱$ مشتق‌پذیر نیست). تابع در $x = ۳$ ماکزیمم مطلق دارد.



۲) تابع f در $x = ۰, ۱, ۲, ۳$ ماکزیمم مطلق دارد و $f(x) = ۰$



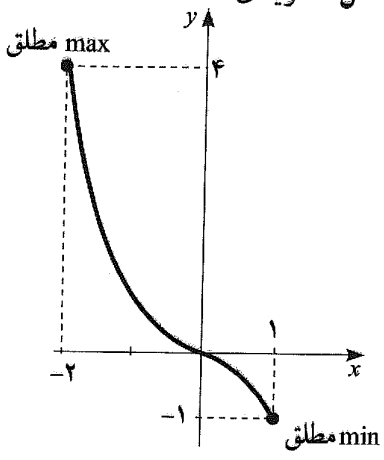
این تابع در $x = ۱, ۲$ ماکزیمم نسبی دارد و $f(x) = ۰$.

تست ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $y = -x|x|$ بر $[-۲, ۱]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۴.

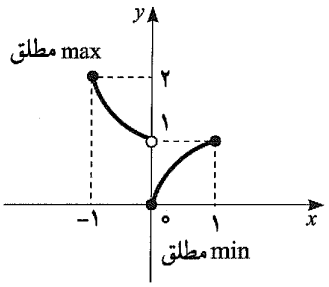
$$y = -x|x| = \begin{cases} -x^۲ & x \geqslant ۰ \\ x^۲ & x < ۰ \end{cases}$$



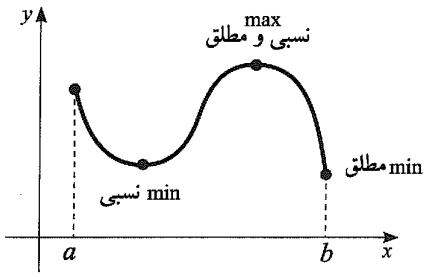
تست مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & -۱ \leqslant x < ۰ \\ \sqrt{x} & ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \end{cases}$ برابر است با:

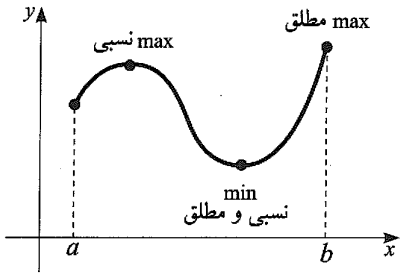
۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۳. نمودار تابع داده شده را رسم می‌کنیم.

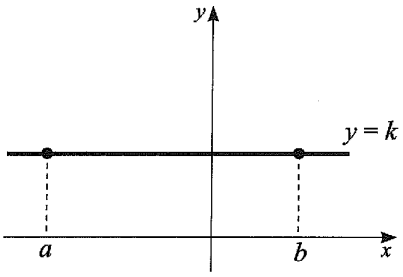


۸۸ـ۵ اگر x_0 یک نقطه درونی بازه‌ی $[a,b]$ باشد. به‌طوری‌که تابع f در x_0 اکسترمم مطلق (ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق) داشته باشد، دراین‌صورت f در x_0 اکسترمم نسبی (ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی) دارد. مانند نمودارهای زیر:

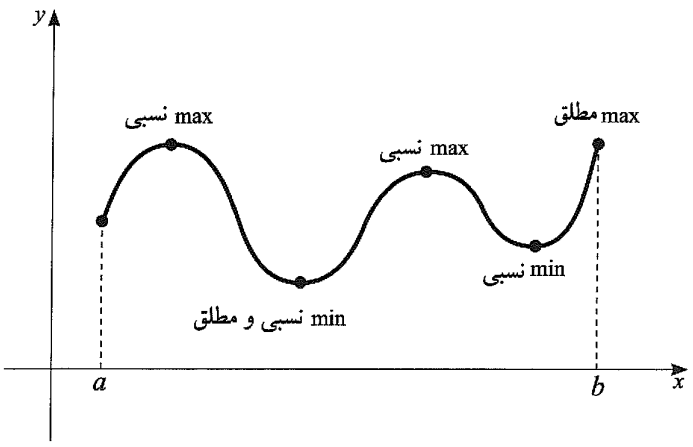




۸۹ـ۵ اگر تابع ثابت با ضابطه‌ی $f(x)=k$ بر بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد، تمام نقاط بازه‌ی $[a,b]$ هم ماکزیمم و هم مینیمم مطلق هستند.

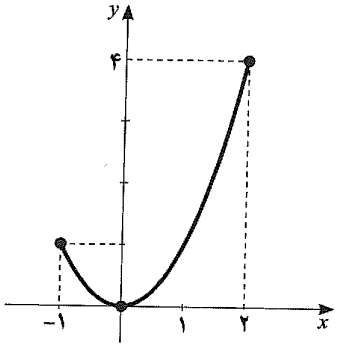


۹۰ـ۵ ممکن است یک تابع در یک بازه دارای چندین ماکزیمم و مینیمم نسبی باشد ولی ماکزیمم و مینیمم مطلق آن در صورت وجود منحصر به‌فرد هستند. مانند نمودار زیر:

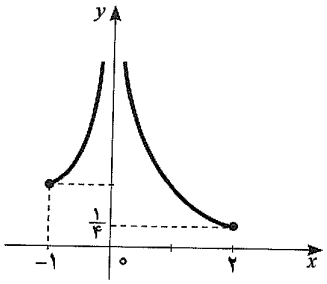


۹۱ـ۵ اگر تابع f روی بازه‌ی بسته‌ای مانند $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی $[a,b]$ دارای ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق است.

مثال تابع $f(x)=x^۲$ روی بازه‌ی $[-۱,۲]$ در نقطه‌ی $x=۰$ مینیمم مطلق برابر با $f(۰)=۰$ و در نقطه‌ای $x=۲$ ماکزیمم مطلق برابر با $f(۲)=۴$ دارد. توجه کنید که f روی بازه‌ی $[-۱,۲]$ پیوسته است.



مثال تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ روی بازه‌ی $[-۱,۲]$ ماکزیمم مطلق ندارد. اما در نقطه‌ی $x=۲$ مینیمم مطلق برابر با $f(۲)=\frac{۱}{۴}$ دارد. توجه کنید که f روی بازه $[-۱,۲]$ پیوسته نیست و بنابراین نمی‌توانیم قضیه فوق را برای آن به‌کار ببریم.



آزمون مشتق اول برای تعیین نقاط اکسترمم مطلق

۹۲ـ۵ قضیه: نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق یک تابع در نقاط بحرانی آن رخ می‌دهد. پس اگر تابع f در نقطه‌ی $x_۰$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد، $x_۰$ حتماً نقطه‌ی بحرانی f است.

۹۳ـ۵ قضیه فوق را می‌توان برای مشخص کردن مقادیر اکسترمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ به کار بُرد: برای تعیین ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق f، ابتدا همه‌ی نقاط بحرانی f روی بازه‌ی (a,b) را پیدا می‌کنیم. بعد مقادیر f در این نقاط و هم‌چنین $f(a)$ و $f(b)$ را حساب می‌کنیم. بین این مقادیر، بزرگ‌ترین مقدار ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار مینیمم مطلق f روی $[a,b]$ است.

مثال نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=x^۵-۵x^۴+۵x^۳+۴, x\in[-۱,۲]$

۲) $f(x)=\frac{۱}{x^۲+۱}, x\in\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right]$

۳) $f(x)=(x+۱)^{\frac{۲}{۳}}, x\in[-۲,۱]$

۴) $f(x)=\begin{cases}-x^۲ & -۱\leqslant x<۰\\ ۲x^۲-۴x & ۰\leqslant x\leqslant ۳\end{cases}$

حل

۱)

$$f'(x)=۵x^۴-۲۰x^۳+۱۵x^۲ \Longrightarrow f'(x)=۰ \Longrightarrow ۵x^۲(x^۲-۴x+۳)=۰$$
$$\Longrightarrow x=۰, x^۲-۴x+۳=۰ \Longrightarrow x=۱, x=۳$$

پس نقاط بحرانی f روی بازه‌ی $[-۱, ۲]$ نقاط ۰ و ۱ هستند.

x	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	-۷	۴	۵	-۴

ماکزیمم مطلق f برابر ۵ و مینیمم مطلق f برابر -۷ است.

۲)

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(x^۲+۱)^۲} \Longrightarrow f'(x)=۰ \Longrightarrow -۲x=۰ \Longrightarrow x=۰ \in \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right]$$

x	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$
$f(x)$	$\frac{۴}{۵}$	۱	$\frac{۴}{۵}$

ماکزیمم مطلق f برابر ۱ و مینیمم مطلق f برابر $\frac{۴}{۵}$ است.

۳)

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}(x+۱)^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x+۱}} \Longrightarrow f'(x)\neq ۰$$

$f'(x)$ موجود نباشد $\Longrightarrow x+۱=۰ \Longrightarrow x=-۱ \in [-۲, ۱]$

x	-۲	-۱	۱
	۱	۰	$\sqrt[۳]{۴}$

ماکزیمم مطلق f برابر $\sqrt[۳]{۴}$ و مینیمم مطلق f برابر ۰ است.

۴)

$$f'(x)=\begin{cases}-۲x & -۱<x<۰\\ ۴x-۴ & ۰<x<۳\end{cases}$$

$f'(-۱)$ و $f'(۳)$ وجود ندارد. پس -۱ و ۳ طول‌های نقاط بحرانی‌اند. از طرفی $f'(۰^-)=۰, f'(۰^+)=-۴$، پس $x=۰$ طول نقطه‌ی بحرانی است.

$$f'(x)=۰ \Longrightarrow \begin{cases}-۲x=۰ \Longrightarrow x=۰ \notin (-۱, ۰)\\ ۴x-۴=۰ \Longrightarrow x=۱ \in (۰, ۳)\end{cases}$$

$x=۱$ هم طول نقطه بحرانی است.

x	-۱	۰	۱	۳
$f(x)$	-۱	۰	-۲	۶

ماکزیمم مطلق تابع برابر ۶ و مینیمم تابع برابر -۲ است.

تست بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=x^{۳}+|x+۲|$ روی بازه‌ی $[-۳,-۱]$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۱.

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}+x+۲ & -۲\leqslant x\leqslant -۱\\ x^{۲}-x-۲ & -۳\leqslant x\leqslant -۲\end{cases}$$

$f'(-۲^{+})\neq f'(-۲^{-})$، پس $x=-۲$ نقطه بحرانی f است.

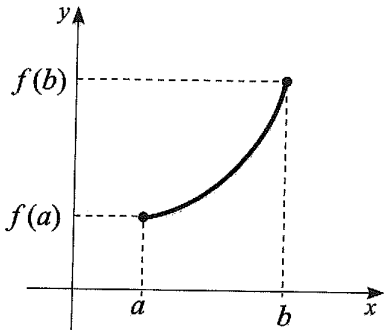
$$f'(x)=\begin{cases}۲x+۱ & -۲<x<-۱\\ ۲x-۱ & -۳<x<-۲\end{cases}\Longrightarrow f'(x)=۰\Longrightarrow\begin{cases}x=-\frac{۱}{۲}\notin(-۲,-۱)\\ x=\frac{۱}{۲}\notin(-۳,-۲)\end{cases}$$

x	-۳	-۲	-۱
$f(x)$	۱۰	۴	۲

$\Longrightarrow \max(-۳,۱۰)$

۹۴ـ۵ درصورتی‌که تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و معین باشد.

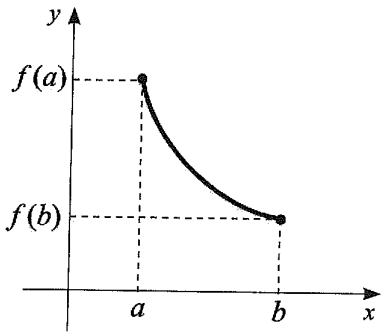
۱) اگر تابع f در این بازه اکیداً صعودی باشد، آنگاه:



ماکزیمم مطلق $=f(b)$

مینیمم مطلق $=f(a)$

۲) اگر تابع f در این بازه اکیداً نزولی باشد، آنگاه:



ماکزیمم مطلق $=f(a)$

مینیمم مطلق $=f(b)$

مثال مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۴-x}-\sqrt{x}-۲x$ را به‌دست آورید.

حل

$$\begin{cases}۴-x\geqslant ۰\\ x\geqslant ۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\leqslant ۴\\ x\geqslant ۰\end{cases}\Longrightarrow D_f=[۰,۴]$$

$$f'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۴-x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-۲=-\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۴-x}}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۲\right)<۰$$

چون $f'(x) < ۰$، لذا تابع اکیداً نزولی است و در نتیجه اکسترمم‌های مطلق آن در $x = ۰$ و $x = ۴$ رخ می‌دهد.

x	۰	۴
$f(x)$	۲	-۱۰

$\Longrightarrow \min(۴, -۱۰)$

تست مجموع ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x}{x+۲}$ در $[-۱, ۱]$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{-۱}{۳}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$f'(x) = \frac{x+۲-x}{(x+۲)^۲} = \frac{۲}{(x+۲)^۲} > ۰$$

تابع f در بازه‌ی $[-۱, ۱]$، اکیداً صعودی است و در نتیجه ماکزیمم و مینیمم مطلق در نقاط انتهایی بازه به‌دست می‌آیند.

$$f(۱) + f(-۱) = \frac{۱}{۳} - ۱ = \frac{-۲}{۳}$$

طرز تعیین عرض‌های ماکزیمم و مینیمم تابع f بدون استفاده از مشتق

۹۵ـ۵ اگر نقطه‌ی $M(a, b)$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی منحنی تابع f باشد، خط $y = b$ بر منحنی تابع در نقطه‌ی M مماس است. اگر در تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$، خط غیرمشخص $y = b$ را با معادله‌ی منحنی تقاطع دهیم، چنانچه $y = b$ عرض نقطه اکسترمم منحنی تابع f باشد، باید معادله‌ی تقاطع ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، لذا باید $\Delta = ۰$ باشد. از حل معادله‌ی $\Delta = ۰$ مقادیر b یا مقادیر اکسترمم (عرض‌های ماکزیمم و مینیمم نسبی) منحنی تابع f به‌دست می‌آید.

چنانچه به جای عدد b همان y را درنظر بگیریم و خط $y = y$ را با معادله منحنی تقاطع دهیم مانند آن است که معادله منحنی را برحسب x مرتب بنویسیم، سپس دلتای معادله حاصل را مساوی صفر قرار دهیم.

مثال عرض‌های ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به معادله $y = \frac{۲x}{x^۲+۱}$ را بیابید.

حل

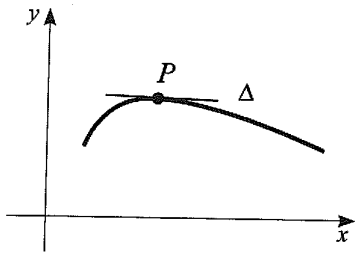
$$y = \frac{۲x}{x^۲+۱} \Longrightarrow yx^۲ + y = ۲x \Longrightarrow yx^۲ - ۲x + y = ۰$$

$$\Delta' = ۰ \Longrightarrow ۱ - y^۲ = ۰ \Longrightarrow y = \pm ۱$$

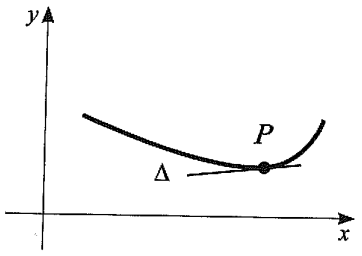
چون منحنی تابع این مسأله، مجانب قائم ندارد. دراین‌صورت $y_{\max} = ۱$ و $y_{\min} = -۱$.

تحدب و تعقر منحنی یک تابع

۹۶ـ۵ منحنی C به معادله‌ی $y = f(x)$ و نقطه‌ی $P(x, y)$ از آن و خط مماس Δ بر C در نقطه‌ی P را درنظر می‌گیریم. چنانچه منحنی در همسایگی نقطه‌ی P بالای خط مماس Δ باشد (شکل ۱) تعقر آن به سوی بالا یعنی به‌سمت yهای مثبت است (تابع در این نقطه محدب است) و اگر منحنی در همسایگی نقطه‌ی P زیر خط Δ باشد (شکل ۲) تقعر آن به سوی پایین یعنی به‌سمت yهای منفی است (تابع در این نقطه مقعر است).

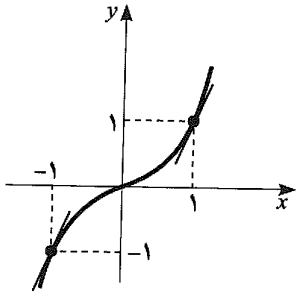


(۱)

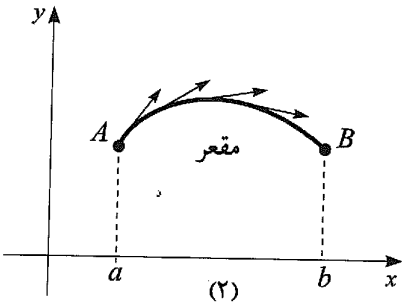


(۲)

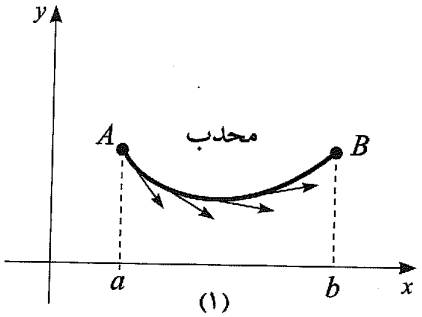
مثال تابع $f(x) = x^3$ را درنظر بگیرید. در نقطه‌ی $(1, 1)$ تابع f محدب است و در نقطه‌ی $(-1, -1)$ تابع f مقعر است.



۵ـ۹۷ تابع $f(x)$ را که در بازه‌ی $[a, b]$ معین و پیوسته است، محدب گویند هرگاه نمودار منحنی بالای خط مماس بر منحنی در نقاط آن بازه باشد. به همین‌ترتیب $f(x)$ را در بازه‌ی $[a, b]$ مقعر می‌نامند، هرگاه نمودار منحنی آن زیر خط مماس بر منحنی در نقاط بازه قرارگیرد. هنگامی که تابع محدب است، جهت تقعر (گودی منحنی) رو به سمت بالا می‌باشد و بالعکس برای یک تابع مقعر جهت تقعر رو به‌سمت پایین است.



(۲)



(۱)

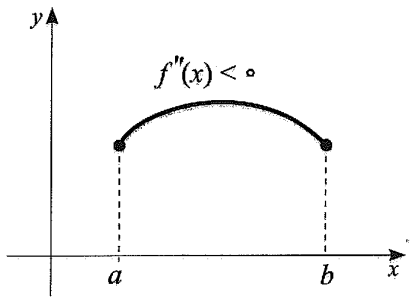
۵ـ۹۸ در شکل (۱) اگر روی محور از a به b حرکت کنیم، شیب خط مماس زیاد می‌شود. پس f' روی بازه‌ی (a, b) اکیداً صعودی است و در نتیجه مشتق آن f'' مثبت است. در شکل (۲) اگر روی محور x از a به b حرکت کنیم، شیب خط مماس کم می‌شود. پس f' روی بازه‌ی (a, b) اکیداً نزولی است و در نتیجه مشتق آن f'' منفی است. به‌طور خلاصه:

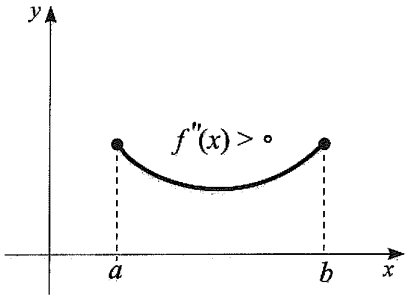
نمودار تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ در بازه‌ای که f' زیاد می‌شود، محدب و در بازه‌ای که f' کم می‌شود، مقعر است.

۵ـ۹۹ قضیه (آزمون مشتق دوم برای تعیین تقعر و تحدب): اگر تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$، دوبار مشتق‌پذیر باشد. آنگاه:

الف) f در بازه‌ای که $f''(x) > 0$، محدب (تقعر رو به بالا) است.

ب) f در بازه‌ای که $f''(x) < 0$، مقعر (تقعر رو به پایین) است.





۵ـ۱۰۰ نتیجه: برای تعیین تحدب و تقعر نمودار تابع حقیقی f، باید نقاط بحرانی f' (نقاطی که f'' در آن‌ها وجود ندارد یا برابر صفر است) را تعیین علامت کنیم در قسمت‌هایی از دامنه‌ی تابع که $f''(x)$ مثبت است، تقعر رو به بالا (محدب) است و در قسمت‌هایی که $f''(x)$ منفی است، تقعر رو به پایین (مقعر) است.

مثال تقعر و تحدب منحنی تابع $f(x) = ۱ + \sqrt[۳]{x}$ را در نقطه $A(-۱, ۰)$ و $B(۱, ۲)$ تعیین کنید.

حل

$$f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \Longrightarrow f''(x) = \frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}$$

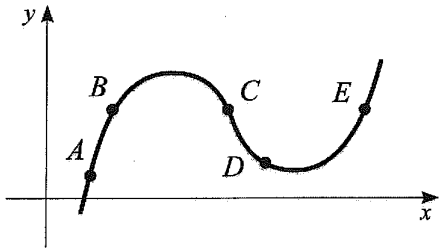
$$A(-۱, ۰) \Longrightarrow f''(-۱) = \frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{-۱}} = \frac{۲}{۹} > ۰ \Longrightarrow \text{تقعر رو به بالا (محدب)}$$

$$B(۱, ۲) = f''(۱) = \frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{۱}} = \frac{-۲}{۹} < ۰ \Longrightarrow \text{تقعر رو به پایین (مقعر)}$$

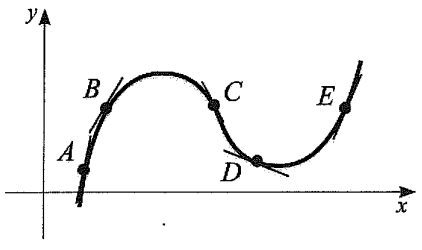
مثال شکل زیر نمودار تابعی چون $y = f(x)$ را نشان می‌دهد در کدام نقاط از پنج نقطه‌ی مشخص شده بر نمودار،

۱) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی‌اند؟

۲) $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است؟



حل کافی است خطوط مماس را در نقاط داده شده، رسم کنیم.



در نقاط A و B داریم: $f' > ۰$ و $f'' < ۰$. در نقطه‌ی C داریم: $f' < ۰$ و $f'' < ۰$. در نقطه‌ی D داریم: $f' < ۰$ و $f'' > ۰$ و در نقطه‌ی E داریم: $f' > ۰$ و $f'' > ۰$.

مثال جهت تقعر نمودار و توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x) = x^۳ - ۳x^۲$

۲) $f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}$

۳) $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x<۰\\ \sqrt{x} & x\geqslant ۰\end{cases}$

۴) $f(x)=x^۲\ln x$

۵) $f(x)=xe^x$

۶) $f(x)=\dfrac{x+۲}{۲x-۴}$

حل

۱) $$f'(x)=۳x^۲-۶x\Longrightarrow f''(x)=۶x-۶=۰\Longrightarrow x=۱$$

جهت تقعر f روی $(-\infty,۱)$ به‌طرف پایین (مقعر) و روی $(۱,+\infty)$ به‌طرف بالا (محدب) است.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	

۲) $$f'(x)=\frac{۲x}{(x^۲+۱)^۲}\Longrightarrow f''(x)=\frac{۲-۶x^۲}{(x^۲+۱)^۳}=۰\Longrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

جهت تقعر f روی $\left(-\infty,\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳}\right)$ و $\left(\dfrac{\sqrt{۳}}{۳},+\infty\right)$ به‌طرف پایین (مقعر) و روی $\left(-\dfrac{\sqrt{۳}}{۳},\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ به‌طرف بالا (محدب) است.

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

۳)
$$f'(x)=\begin{cases}۲x & x<۰\\ \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} & x>۰\end{cases}\Longrightarrow f'(۰)=\text{وجود ندارد}$$

$$f''(x)=\begin{cases}۲ & x<۰\\ \dfrac{-۱}{۴x\sqrt{x}} & x>۰\end{cases}\Longrightarrow f''(۰)=\text{وجود ندارد}$$

جهت تقعر f روی $(-\infty,۰)$ به‌طرف بالا (محدب) و روی $(۰,+\infty)$ به‌طرف پایین (مقعر) است.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	∞	$-$	

۴) $$f'(x)=۲x\ln x+x\Longrightarrow f''(x)=۲\ln x+۳=۰\Longrightarrow x=e^{-\frac{۳}{۲}}$$

جهت تقعر f روی $\left(۰,e^{-\frac{۳}{۲}}\right)$ رو به پایین (مقعر) و روی $\left(e^{-\frac{۳}{۲}},+\infty\right)$ رو به بالا (محدب) است.

x	۰		$e^{-\frac{۳}{۲}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	

۵)

$$f'(x)=e^x+xe^x \Longrightarrow f''(x)=e^x+e^x+xe^x=(۲+x)e^x=۰ \Longrightarrow x=-۲$$

جهت تقعر f روی $(-\infty,-۲)$ رو به پایین (مقعر) و روی $(-۲,+\infty)$ رو به بالا (محدب) است.

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	

۶)

$$f'(x)=\frac{-۸}{(۲x-۴)^۲} \Longrightarrow f''(x)=\frac{۳۲}{(۲x-۴)^۳} \Longrightarrow x=۲ \Longrightarrow f'' \text{ وجود ندارد}$$

جهت تقعر f روی $(-\infty,۲)$ رو به پایین (مقعر) و روی $(۲,+\infty)$ رو به بالا (محدب) است.

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	

تست تابع $f(x)=x^۲+e^x$ درکدام فاصله محدب است؟

۱) فقط $(-\infty,۰)$ ۲) فقط $(-۱,۱)$ ۳) فقط $(۰,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$f'(x)=۲x+e^x \Longrightarrow f''(x)=۲+e^x>۰$$

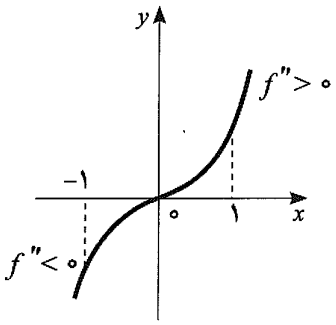
به‌ازای جمیع مقادیر x، $f''(x)$ مثبت است، پس $x\in\mathbb{R}$.

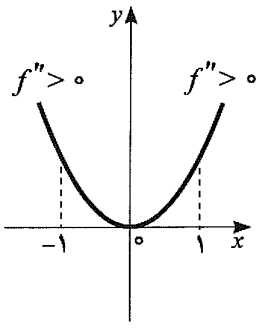
تست هرگاه تقعر تابعی فرد بر $[۰,۱]$ رو به بالا باشد بر $[-۱,۰]$ رو به . . .است و هرگاه تقعر تابعی زوج بر $[۰,۱]$ رو به بالا باشد بر $[-۱,۰]$ رو به . . .است.

۱) بالا ـ پایین ۲) بالا ـ بالا ۳) پایین ـ بالا ۴) پایین ـ پایین

حل گزینه‌ی ۳.

نمودار تابع فرد نسبت به مبداء مختصات متقارن است. نمودار تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است.





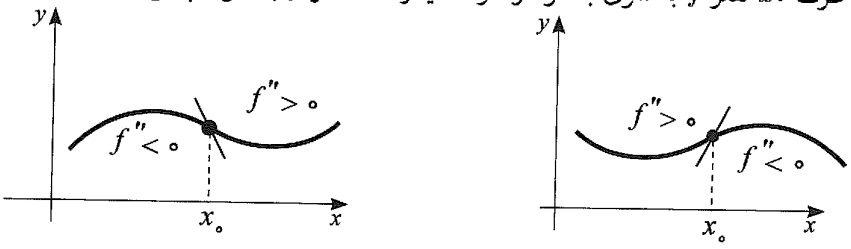
نقطه‌ی عطف

۱۰۱ـ۵ نقطه‌ی $x=x_۰$ را یک نقطه‌ی عطف تابع f گوییم، هرگاه:

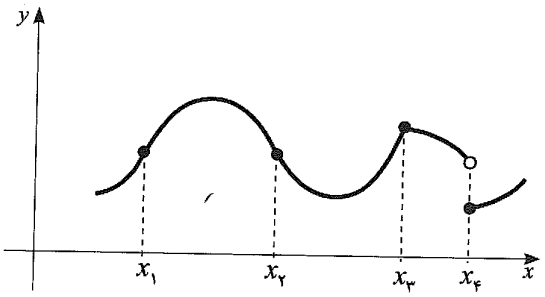
۱) f در یک همسایگی $x_۰$ پیوسته باشد.

۲) نمودار f در $x_۰$ دارای خط مماس باشد (خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف از منحنی عبور می‌کند).

۳) در یک طرف x_0 تقعر f به سوی بالا و در طرف دیگر x_0، تقعر f به سوی پایین باشد.



مثال در شکل زیر نقاط عطف را تعیین کنید.



حل نقاط x_1 و x_2 نقاط عطف تابع هستند. زیرا تابع در این نقاط پیوسته بوده، دارای خط مماس بوده و هنگام عبور از هر یک از این نقاط، تقعر منحنی عوض می‌شود. نقاط x_3 و x_4 نقاط عطف تابع نیستند. اگرچه هنگام عبور از این نقاط جهت تقعر تابع عوض می‌شود، اما در هیچکدام از آن‌ها خط مماس وجود ندارد، مضافاً بر این‌که تابع f در x_4 پیوسته نیست.

۱۰۲ـ۵ قضیه (آزمون مشتق دوم برای تعیین نقاط عطف): هرگاه تابع f بر بازه‌ی I تعریف شده باشد و $x_0 \in I$ و نقطه‌ی $x = x_0$ نقطه‌ی عطف تابع باشد، دراین‌صورت اگر $f''(x_0)$ موجود باشد، آنگاه $f''(x_0) = 0$.

۱۰۳ـ۵ نتیجه: برای پیدا کردن نقاط عطف تابع حقیقی f، باید در دامنه‌ی تابع ریشه‌های معادله‌ی $f''(x) = 0$ و یا نقاطی که $f''(x)$ وجود ندارد را پیدا کنیم. اگر $f''(x)$ در این نقاط تغییر علامت دهد. این نقاط نقطه‌ی عطف تابع هستند.

مثال نقاط عطف هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$

۲) $f(x) = x\ln(x-1)$

۳) $f(x) = x^2 e^x$

۴) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

۵) $f(x) = (x-2)^4$

حل

۱)

$$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x \Longrightarrow f''(x) = 12x^2 - 72x + 96$$
$$f''(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Longrightarrow x = 2, x = 4$$

بنابراین نقاط $x = 2$ و $x = 4$ نقطه‌های عطف تابع هستند.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

۲)

$$f'(x)=\ln(x-1)+\frac{x}{x-1}\Longrightarrow f''(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=0\Longrightarrow x-2=0\Longrightarrow x=2$$

به‌ازای $x=1$، $f''(x)$ وجود ندارد. بنابراین $x=2$ نقطه‌ی عطف تابع است.

x	1		2		$+\infty$
$f''(x)$	∞	$-$	0	$+$	

۳)

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x\Longrightarrow f''(x)=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x$$

$$f''(x)=0\Longrightarrow(2+4x+x^2)e^x=0\Longrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین نقاط $x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ و $x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$ نقطه‌های عطف تابع هستند.

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

۴)

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}\Longrightarrow f''(x)=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

به‌ازای $x=-1$، $f''(x)$ وجود ندارد. هرچند $f''(x)$ در طرفین $x=-1$ تغییر علامت می‌دهد. ولی $x=-1$ طول نقطه‌ی عطف تابع نیست زیرا تابع در $x=-1$ پیوسته نیست.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	∞	$-$	

۵)

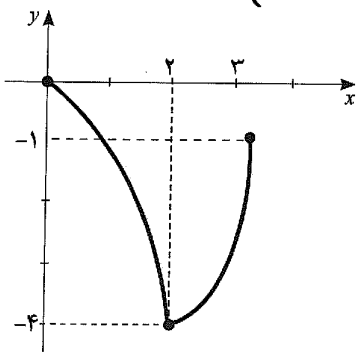
$$f'(x)=4(x-2)^3\Longrightarrow f''(x)=12(x-2)^2=0\Longrightarrow x=2\ \text{ریشه مضاعف}$$

هرچند $x=2$ ریشه‌ی معادله‌ی $f''(x)=0$ است. ولی $x=2$ طول نقطه‌ی عطف تابع نیست زیرا علامت f'' در طرفین $x=2$، یکی است.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	

۱۰۴ـ۵ در نقطه‌ی عطف، تقعر منحنی تابع عوض می‌شود، ولی در هر نقطه از منحنی تابع f که تقعر منحنی عوض شود، ممکن است آن نقطه، نقطه‌ی عطف نباشد.

مثال نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۲ & ۰\leqslant x\leqslant ۲\\ x^۲-۴x-۴ & ۲<x\leqslant ۳\end{cases}$ به شکل زیر است.



$$f'(x)=\begin{cases}-۲x & ۰<x<۲\\ ۲x-۴ & ۲<x<۴\end{cases}\Longrightarrow f''(x)=\begin{cases}-۲ & ۰<x<۲\\ ۲ & ۲<x<۴\end{cases}$$

$x=۲$ طول نقطه‌ی عطف تابع نیست، زیرا در این نقطه خط مماس بر منحنی وجود ندارد.

تست منحنی تابع $f(x)=۲x^۲+\ln x$ در نقطه‌ای با کدام طول تغییر جهت در تقعر می‌دهد؟

۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۳. طول نقطه‌ی عطف را می‌خواهد.

$$y'=۴x+\frac{۱}{x}\to y''=۴-\frac{۱}{x^۲}=۰\Longrightarrow x=\frac{۱}{۲},x=-\frac{۱}{۲}\notin D_f$$

x	۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y''	‖	$+$	۰	$-$	

۱۰۵ـ۵ ویژگی نقطه‌ی عطف: فرض کنیم $A(x_۰,y_۰)$ نقطه‌ی عطف تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$ باشد، دراین‌صورت

اولاً: مختصات نقطه‌ی A در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند، یعنی $y_۰=f(x_۰)$.

ثانیاً: مشتق مرتبه‌ی دوم تابع f به‌ازای طول نقطه‌ی عطف برابر صفر است، یعنی $f''(x_۰)=۰$.

مثال در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۳+bx^۲+۲$، اگر $A(۱,۰)$ نقطه‌ی عطف منحنی تابع باشد، آنگاه a و b را بیابید.

حل

$$A(۱,۰)\Longrightarrow a+b+۲=۰\Longrightarrow a+b=-۲$$
$$f'(x)=۳ax^۲+۲bx\Longrightarrow f''(x)=۶ax+۲b$$
$$f''(۱)=۰\Longrightarrow ۶a+۲b=۰$$
$$\begin{cases}a+b=-۲\\ ۶a+۲b=۰\end{cases}\Longrightarrow a=۱,b=-۳$$

تست اگر $x=۱$ طول نقطه‌ی عطف منحنی تابع $y=\ln(a+x^۲)$ باشد، a کدام است؟

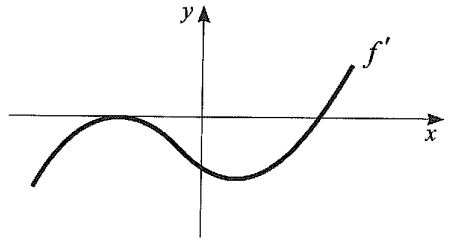
۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۳.

$$y' = \frac{۲x}{a+x^۲} \Longrightarrow y'' = \frac{۲(a+x^۲) - ۴x^۲}{(a+x^۲)^۲}$$
$$y''(۱) = ۰ \Longrightarrow ۲(a+۱) - ۴ = ۰ \Longrightarrow a = ۱$$

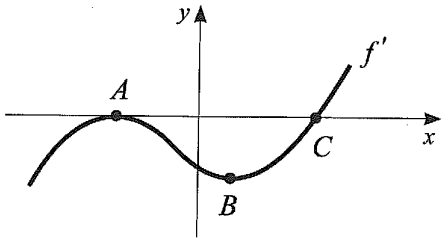
۵ـ۱۰۶ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار تابع f' نقاط عطف نمودار تابع f هستند.

تست شکل زیر نمودار مشتق تابع f است. منحنی تابع f از نظر ماکزیمم یا مینیمم و نقطه‌ی عطف دارای کدام وضعیت زیر است؟



۱) مینیمم ـ دو نقطه‌ی عطف
۲) ماکزیمم ـ دو نقطه‌ی عطف
۳) مینیمم ـ یک نقطه‌ی عطف
۴) ماکزیمم ـ مینیمم ـ یک نقطه‌ی عطف

حل گزینه‌ی ۱.



نقاط A و B به ترتیب ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع f' و بنابراین نقاط عطف تابع هستند. در نقطه‌ی C نمودار f' از پایین محور xها به‌سمت بالای محور x است، پس نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f است.

نقاط مهم روی منحنی تابع f

۵ـ۱۰۷ اگر $x = x_۰$ ریشه‌ی ساده‌ی معادله‌ی $f'(x) = ۰$ باشد، آنگاه $x = x_۰$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f است.

مثال

$$f(x) = x^۳ - ۹x$$
$$f'(x) = ۳x^۲ - ۹ = ۰ \Longrightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

چون $x = \sqrt{۳}$ و $x = -\sqrt{۳}$ ریشه‌های ساده‌ی معادله‌ی $f'(x) = ۰$ هستند، پس طول‌های نقاط اکسترمم نسبی تابع‌اند.

۵ـ۱۰۸ اگر $x = x_۰$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $f'(x) = ۰$ باشد، آنگاه $x = x_۰$ طول نقطه‌ی عطف تابع f است. خط مماس بر منحنی در این نقطه‌ی عطف، موازی محور xهاست.

مثال

$$f(x) = x^۳ + ۱$$
$$f'(x) = ۳x^۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۰$$

چون $x = ۰$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $f'(x) = ۰$ است، پس طول نقطه‌ی عطف تابع است.

۵ـ۱۰۹ اگر $x = x_۰$ ریشه‌ی ساده معادله‌ی $f''(x) = ۰$ باشد، آنگاه $x = x_۰$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

مثال

$$f(x) = xe^x$$
$$f'(x) = e^x + xe^x \Longrightarrow f''(x) = e^x + e^x + xe^x$$
$$f''(x) = ۰ \Longrightarrow (x+۲)e^x = ۰ \Longrightarrow x = -۲, e^x > ۰$$

چون $x = -۲$ ریشه‌ی ساده‌ی معادله‌ی $f''(x) = ۰$ است. پس طول نقطه‌ی عطف تابع است.

۵ـ۱۱۰ اگر $x = x_۰$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $f''(x) = ۰$ باشد، آنگاه:

الف) اگر $x = x_۰$ ریشه‌ی $f'(x) = ۰$ هم باشد، دراین‌صورت $x = x_۰$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f است.

ب) اگر $x = x_۰$ ریشه‌ی $f'(x) = ۰$ نباشد، دراین‌صورت $x = x_۰$ طول نقطه‌ی میلا (meplate) است.

مثال

$$f(x) = (x-۲)^۴$$
$$f'(x) = ۴(x-۲)^۳ = ۰ \Longrightarrow x = ۲ \quad \text{ریشه‌ی ساده}$$
$$f''(x) = ۱۲(x-۲)^۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۲ \quad \text{ریشه‌ی مضاعف}$$

پس $x = ۲$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع است و چون

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	

پس $x = ۲$ نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع است.

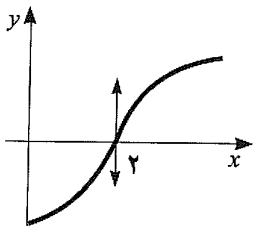
مثال

$$f(x) = x^۴ - ۴x$$
$$f'(x) = ۰ \Longrightarrow ۴x^۳ - ۴ = ۰ \Longrightarrow x = ۱$$
$$f''(x) = ۱۲x^۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \quad \text{ریشه‌ی مضاعف}$$

پس $x = ۰$ نقطه‌ی میلا تابع است.

۵ـ۱۱۱ اگر $x = x_۰$ ریشه‌ی ساده‌ی داخل رادیکال با فرجه‌ی فرد معادله‌ی تابع $f(x) = \sqrt[۲n+۱]{(x-x_۰)^{۲n}}$ باشد.
آنگاه $x = x_۰$ طول نقطه‌ی عطف است و خط مماس بر منحنی در این نقطه، عمود بر محور xها است.

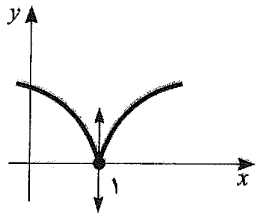
مثال



$$f(x) = \sqrt[۳]{x-۲}$$
$$x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۲ \quad \text{ریشه‌ی ساده}$$
$$(۲, ۰) \quad \text{نقطه‌ی عطف}$$

۵ـ۱۱۲ اگر $x = x_0$ ریشه‌ی مضاعف داخل رادیکال با فرجه‌ی فرد معادله‌ی تابع $f(x) = \sqrt[2n+1]{(x-x_0)^{2n}}$ باشد، آنگاه $x = x_0$ طول نقطه‌ی بازگشت (اکسترمم نسبی) تابع f است و خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه، عمود بر محور xهاست.

مثال



$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

$(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ ریشه‌ی مضاعف

$(1, 0)$ نقطه‌ی عطف

مثال اگر $f(1) = 2$، $f'(1) = 2$ و $f''(1) = 0$، نقطه‌ی $(1, 2)$ چه نقطه‌ای برای تابع f است؟

حل

چون $f'(1) \neq 0$ و $f''(1) = 0$ است. بنابراین $x = 1$ نقطه‌ی عطف تابع f می‌باشد.

تست نقطه‌ی $x = 0$ برای تابعی که مشتق آن $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ است، چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم ۲) عطف ۳) ساده ۴) مینیمم

حل گزینه‌ی ۲.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \Longrightarrow f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \Longrightarrow f'(0) = 1 \neq 0, f''(0) = 0$$

پس $x = 0$ نقطه‌ی عطف تابع f است.

تست تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ در $x = 1$ کدام حالت را دارد؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) بازگشت ۳) مینیمم نسبی ۴) عطف

حل گزینه‌ی ۳.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{3}, x = 1$$

$x = 1$ ریشه‌ی ساده $y' = 0$ است، پس نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.

$$f''(x) = 6x - 4 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow \min \text{ نسبی}$$

رسم منحنی توابع چند جمله‌ای

۵ـ۱۱۳ برای رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات توابع چند جمله‌ای به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱) حد تابع را وقتی $x \to \pm\infty$ به‌دست می‌آوریم.

۲) از حل معادله‌ی $f'(x) = 0$، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم.

تذکر: ریشه‌های ساده مشتق طول‌های نقاط اکسترمم نسبی منحنی تابع است و ریشه‌های مضاعف مشتق طول‌های نقاط عطف منحنی تابع است.

۳) نقاط برخورد منحنی را با محورهای مختصات در صورت امکان تعیین می‌کنیم.

۴) به کمک جدول تغییرات تابع. نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال جدول تغییرات و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = -x^۳ + ۳x^۲ - ۲$ ۲) $y = -x^۴ + ۴x^۲$

حل

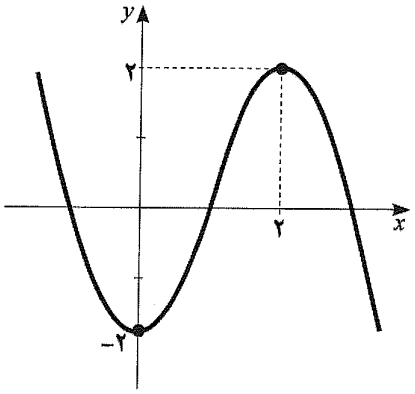
۱)

$x \to \pm\infty \Longrightarrow y = -(\pm\infty)^۳ = \mp\infty$

$y' = ۰ \Longrightarrow -۳x^۲ + ۶x = ۰ \Longrightarrow x = ۰, x = ۲$

تلاقی با محور yها : $x = ۰ \Longrightarrow y = -۲$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y	$+\infty$	↘	-۲ min	↗	۲ max	↘	$-\infty$



۲)

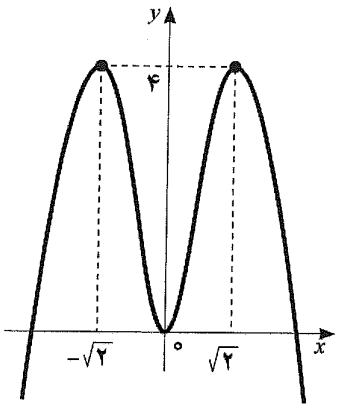
$x \to \pm\infty \Longrightarrow y = -(\pm\infty)^۴ = -\infty$

$f'(x) = ۰ \Longrightarrow -۴x^۳ + ۸x = ۰ \Longrightarrow -۴x(x^۲ - ۲) = ۰$

$\Longrightarrow x = ۰, x = \sqrt{۲}, x = \sqrt{۲}$

تلاقی با محور yها : $x = ۰ \Longrightarrow y = ۰$

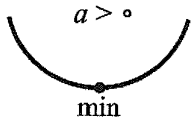
x	$-\infty$		$-\sqrt{۲}$		۰		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y	$-\infty$	↗	۴ max	↘	۰ min	↗	۴ max	↘	$-\infty$

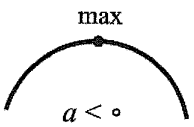


نتایج کلی برای تابع درجه‌ی دوم به معادله $y = ax^۲ + bx + c$

۱۱۴ـ۵ این تابع بر بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ معین و پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۱۱۵ـ۵ نمودار این تابع همواره دارای یک نقطه‌ی ماکزیمم یا یک نقطه مینیمم است.





۱۱۶ـ۵ مختصات نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم عبارت است از:

$$S\left(\frac{-b}{۲a}, \frac{۴ac - b^۲}{۴a}\right)$$

۱۱۷ـ۵ مقدار ماکزیمم تابع یا مینیمم تابع برابر است با:

$$y = \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$$

۵ـ۱۱۸ خط به معادله‌ی $x = \frac{-b}{۲a}$ محور تقارن منحنی این تابع است.

تست کم‌ترین مقدار عبارت $x^۲ - x + ۲$ وقتی x تغییر می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$\text{کم‌ترین مقدار} = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۸ - ۱}{۴} = \frac{۷}{۴}$$

تست نمودار تابع $y = x^۲ + mx + ۱$ روی محور oy دارای مینیمم است، m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۱.

$$x_{\min} = ۰ \Longrightarrow \frac{-b}{۲a} = ۰ \Longrightarrow \frac{-m}{۲} = ۰ \Longrightarrow m = ۰$$

تست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^۲ + ۶x$ دارای ماکزیممی برابر ۳ است، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۳

حل گزینه‌ی ۴.

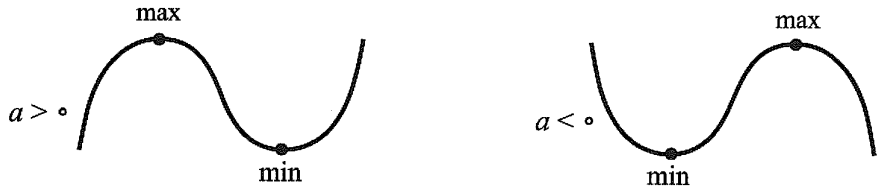
$$y_{\max} = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} \Longrightarrow \frac{۰ - ۳۶}{۴a} = ۳ \Longrightarrow a = -۳$$

نتایج کلی برای تابع درجه‌ی سوم به معادله‌ی $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$

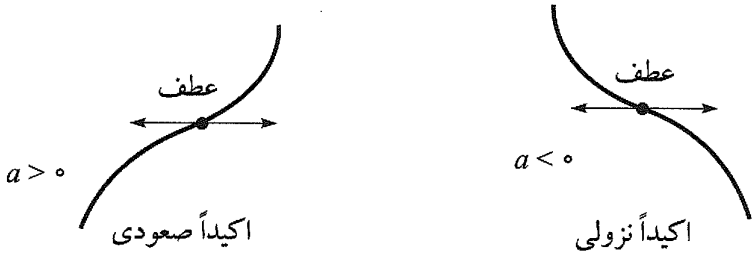
۵ـ۱۱۹ این تابع بر بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ معین و پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۵ـ۱۲۰ از حل معادله‌ی $y' = ۳ax^۲ + ۲bx + c = ۰$ سه حالت زیر به وجود می‌آید.

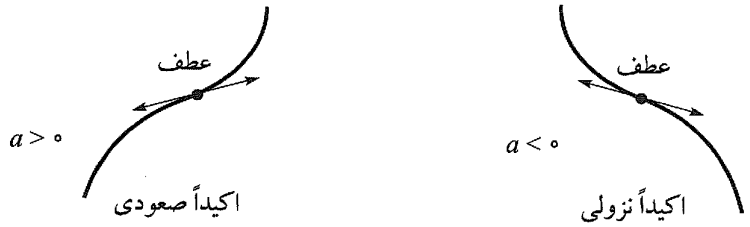
۱) اگر برای معادله‌ی $y' = ۰$، داشته باشیم $\Delta > ۰$، آنگاه تابع یک max و یک min دارد. نمودارهای آن‌ها به شکل زیر است:



۲) اگر برای معادله‌ی $y' = ۰$، داشته باشیم $\Delta = ۰$، آنگاه تابع max و min ندارد و خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی عطف موازی محور xهاست. نمودار آن‌ها به شکل زیر است:



۳) اگر برای معادله $y' = ۰$، داشته باشیم $\Delta < ۰$، آنگاه تابع max و min ندارد. نمودار آن‌ها به شکل زیر است:



۱۲۱ـ۵ تابع درجه‌ی سوم دارای نقطه‌ی عطفی به طول $x = \frac{-b}{۳a}$ است که به‌ازای آن $y'' = ۰$.

۱۲۲ـ۵ نقطه‌ی عطف مرکز تقارن منحنی تابع درجه‌ی سوم است.

۱۲۳ـ۵ نقطه‌ی عطف تابع وسط پاره‌خطی است که نقاط اکسترمم تابع را به هم وصل می‌کند. یعنی:

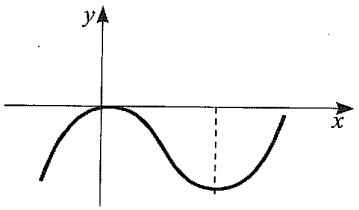
$$C\left(x_c = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{۲}, y_c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{۲}\right)$$

مثال مختصات نقطه‌ی عطف نمودار یک تابع درجه سوم $(۱, -۱)$ و نقطه‌ی $(۲, ۳)$ ماکزیمم آن است. مختصات مینیمم کدام است؟

حل

$$\begin{aligned} -۱ = \frac{x_{\min} + ۲}{۲} &\Longrightarrow x_{\min} = -۴ \\ ۱ = \frac{y_{\min} + ۳}{۲} &\Longrightarrow y_{\min} = -۱ \end{aligned} \Longrightarrow \min(-۴, -۱)$$

تست معادله‌ی نمودار زیر کدام است؟



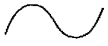
۱) $y = -x^۳ - ۳x^۲$

۲) $y = -x^۳ + ۳x^۲$

۳) $y = x^۳ - ۳x^۲$

۴) $y = x^۳ + ۳x^۲$

حل گزینه‌ی ۳.



$\Longrightarrow a > ۰ \Longrightarrow$ گزینه‌ی ۳ یا ۴ درست است

گزینه‌ی (۳): $y' = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Longrightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \Longrightarrow x_{\max} = ۰, x_{\min} = ۲$

رسم منحنی توابع کسری (غیر رادیکالی)

۱۲۴ـ۵ برای رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات توابع کسری به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱) مجانب‌های قائم و افقی یا مایل نمودار تابع را محاسبه می‌کنیم.

۲) از ضابطه‌ی تابع، $f'(x)$ را حساب کرده و جهت تعیین علامت $f'(x)$، ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم.

۳) نقاط برخورد منحنی را با محورهای مختصات، در صورت امکان تعیین می‌کنیم.

۴) جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم و آن را کامل می‌کنیم.

۵) پس از رسم مجانب‌ها، به کمک جدول منحنی تابع را رسم می‌کنیم.

مثال جدول تغییرات و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ ۲) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

حل

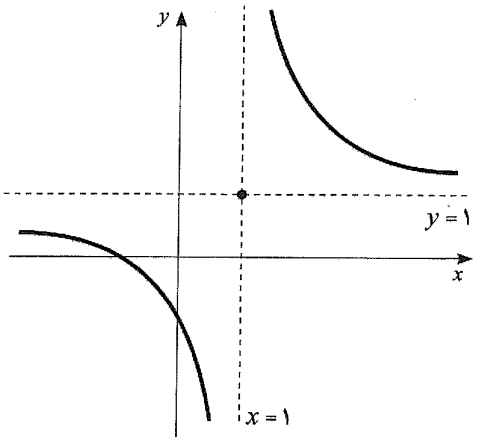
۱)

$$\begin{cases} \text{مجانب قائم}: y \to \pm\infty \Longrightarrow x-1=0 \Longrightarrow x=1 \text{ معادله‌ی مجانب قائم} \\ \text{مجانب افقی}: x \to \pm\infty \Longrightarrow y=\dfrac{x}{x} \Longrightarrow y=1 \text{ معادله‌ی مجانب افقی} \end{cases}$$

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

$$x=0 \Longrightarrow y=-1, y=0 \Longrightarrow x=-1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1



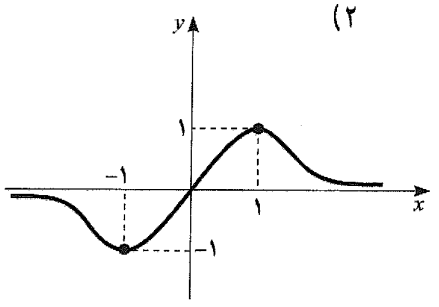
۲)

معادله‌ی مجانب افقی $y=0$ $\Longleftarrow$ $x \to \pm\infty$ مجانب افقی

$$y' = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow -2x^2+2=0 \Longrightarrow x=1, x=-1$$

$$x=0 \Longrightarrow y=0, y=0 \Longrightarrow x=0$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



نتایج کلی برای تابع هموگرافیک به معادله‌ی $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $c \neq 0$

۱۲۵ـ۵ دامنه‌ی تابع به‌صورت $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ و برد آن به‌صورت $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ است.

۱۲۶ـ۵ این تابع در دامنه‌اش یک به یک و وارون‌پذیر است.

۱۲۷ـ۵ خط به معادله‌ی $x = \frac{-d}{c}$ مجانب قائم منحنی و خط به معادله‌ی $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی منحنی تابع است.

۱۲۸ـ۵ محل تلاقی مجانب‌ها، یعنی $\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$، مرکز تقارن منحنی است.

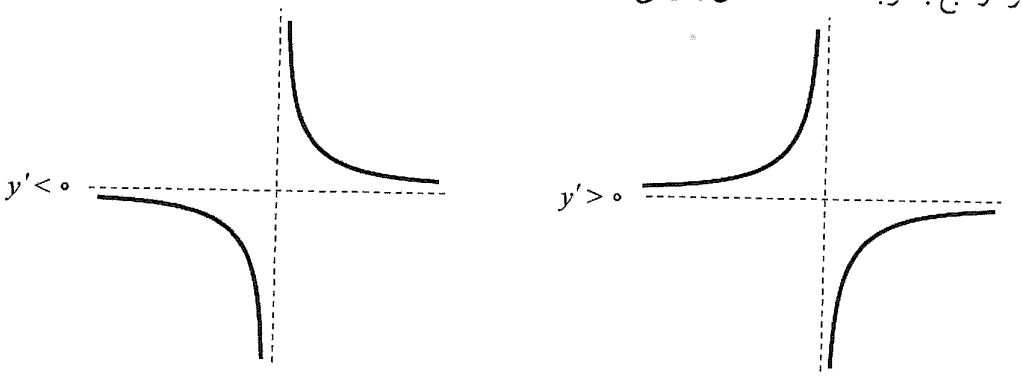
۱۲۹ـ۵ مشتق این تابع به‌صورت $y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^۲}$ است، این تابع ماکزیمم یا مینیمم نسبی و نقطه‌ی عطف ندارد.

۱) اگر $ad - bc > ۰$. آنگاه مشتق مثبت و تابع اکیداً صعودی است.

۲) اگر $ad - bc < ۰$، آنگاه مشتق منفی و تابع اکیداً نزولی است.

۳) اگر $ad - bc = ۰$، آنگاه مشتق صفر و تابع ثابت است.

۱۳۰ـ۵ نمودار تابع به توجه علامت مشتق به یکی از دو شکل زیر است.



تست بیش‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{۲x+۱}{۱-x}$ وقتی $۲ \leqslant x \leqslant ۴$ باشد. کدام است؟

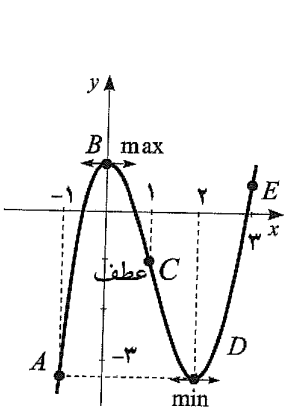
۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۵ ۴) -۵

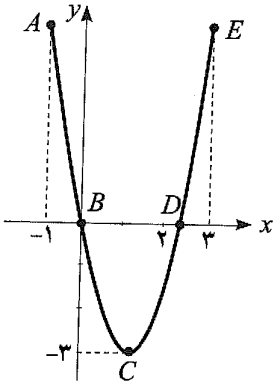
حل گزینه‌ی ۲. چون تابع هموگرافیک اکسترمم نسبی ندارد، بنابراین max یا min مطلق تابع، در صورت وجود در ابتدا و انتهای فاصله قرار می‌گیرند در صورتی که تابع روی آن فاصله پیوسته باشد.

$$f(۴) = -۳ = \text{max مطلق} \quad , \quad f(۲) = -۵ = \text{min مطلق}$$

رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f

۱۳۱ـ۵ ابتدا در تابع‌های چند جمله‌ای، رابطه‌ی بین نمودار تابع f و نمودار f' را به‌صورت شهودی بررسی می‌کنیم. سپس نتایج را بیان می‌کنیم. برای این کار نمودار تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ و مشتق آن $f'(x) = ۳x^۲ - ۶x$ را رسم می‌کنیم.





نتیجه‌ی ۱: طول‌های نقاط اکسترمم نسبی تابع f برابر طول‌های نقاط تقاطع تابع f' با محور xهاست.

نتیجه‌ی ۲: طول‌های نقاط عطف تابع f برابر طول‌های نقاط اکسترمم نسبی تابع f' است.

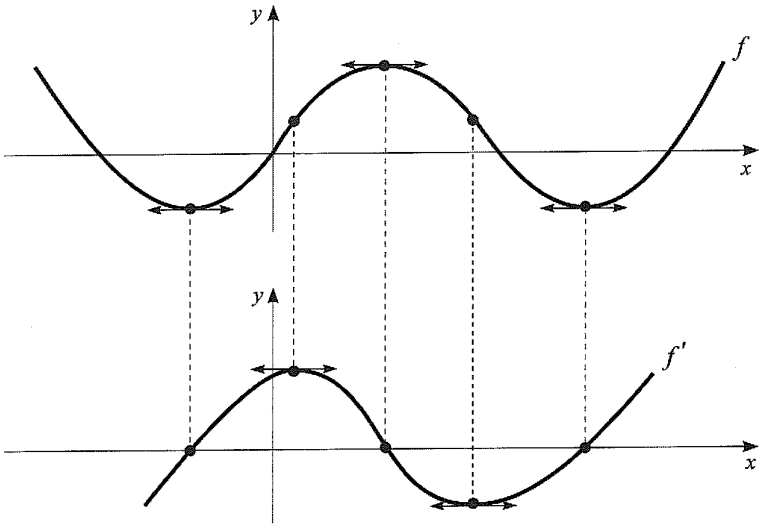
نتیجه‌ی ۳: اگر تقعر منحنی تابع f در بازه‌ای مثلاً $(-۱, ۱)$ به‌سمت پایین باشد، نمودار تابع f' در این بازه اکیداً نزولی است.

نتیجه‌ی ۴: اگر تقعر منحنی تابع f در بازه‌ای مثلاً $(۱, ۳)$ به‌سمت بالا باشد، نمودار تابع f' در این بازه اکیداً صعودی است.

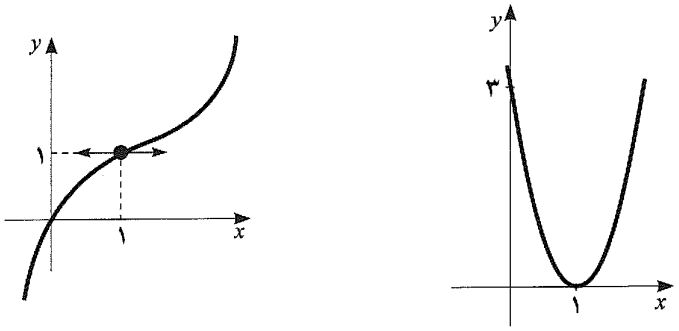
نتیجه‌ی ۵: اگر نمودار منحنی تابع f در بازه‌ای مثلاً $(-۱, ۰)$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه نمودار تابع f' در این بازه بالای محور xهاست.

نتیجه‌ی ۶: اگر نمودار منحنی تابع f در بازه‌ای مثلاً $(۰, ۲)$ اکیداً نزولی باشد، آن گاه نمودار تابع f' در این بازه زیر محور xهاست.

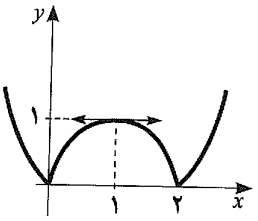
مثال نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. با توجه به نتایج گفته شده نمودار f' آن به‌صورت زیر خواهد شد.

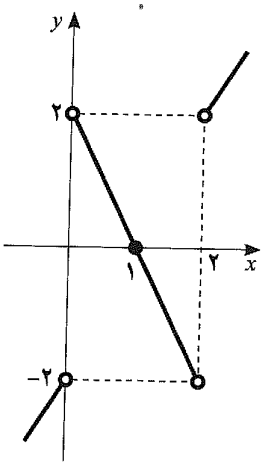


۱۳۲ـ۵ اگر $x = x_۰$ طول نقطه‌ی عطفی از تابع f باشد که خط مماس بر نمودار f در آن نقطه موازی محور xها باشد، این نقطه در نمودار f' اکسترممی به‌صورت نقطه‌ی $(x_۰, ۰)$ خواهد شد.



۱۳۳ـ۵ اگر تابع پیوسته‌ی f در $x = x_۰$ مشتق‌پذیر نباشد، آنگاه نمودار f' در $x = x_۰$ ناپیوسته است. $x = ۱$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f و تابع f در $x = ۱$ مشتق‌پذیر است. لذا $x = ۱$ برابر طول نقطه‌ی تقاطع نمودار f' با محور xهاست نقاط $x = ۰$ و $x = ۲$ هم مینیمم نسبی تابع f است، ولی این تابع در نقاط $x = ۲$ و $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست، یعنی $f'(۰)$ و $f'(۲)$ وجود ندارد.





یافتن ماکزیمم و مینیمم در حالت‌های خاص

۱۳۴ـ۵ هرگاه مجموع دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، آنگاه حاصل‌ضرب این دو متغیر وقتی ماکزیمم است که دو متغیر با هم مساوی باشند. نتیجه:

$$a,b>0 \quad , \quad a+b=k \text{ ثابت} \Longrightarrow \begin{cases} a=b=\dfrac{k}{2} \\ \max(a.b)=\dfrac{k^2}{4} \end{cases}$$

مثال محیط مستطیلی ۳۶ سانتی‌متر است. ماکزیمم سطح آن را بیابید.

حل

$$2(a+b)=36 \Longrightarrow a+b=18 \Longrightarrow \begin{cases} a=b=\dfrac{18}{2}=9 \\ \max(s)=\max(a\cdot b)=\dfrac{18^2}{4}=81 \end{cases}$$

مثال ماکزیمم $z=x.y$ با شرط $2x+y=4$ چه‌قدر است؟

حل فرض می‌کنیم $a=2x$ و $b=y$، آنگاه

$$a+b=4 \Longrightarrow \max(a\cdot b): a=b=2 \Longrightarrow x=1, y=2 \Longrightarrow \max(x\cdot y)=2$$

۱۳۵ـ۵ هرگاه حاصل‌ضرب دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع این دو متغیر وقتی مینیمم است که دو متغیر با هم مساوی باشند. نتیجه :

$$a,b>0, a\cdot b=k \text{ ثابت} \Longrightarrow \begin{cases} a=b=\sqrt{k} \\ \min(a+b)=2\sqrt{k} \end{cases}$$

مثال اندازه‌ی مساحت مستطیلی ۴۸ سانتی‌متر مربع است. مینیمم محیط مستطیل را بیابید.

حل

$$a \cdot b = ۴۸ \Longrightarrow \begin{cases} a = b = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳} \\ \min ۲(a+b) = ۲(۲ \times ۴\sqrt{۳}) = ۱۶\sqrt{۳} \end{cases}$$

۵ـ۱۳۶ هرگاه مجموع دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب توان‌های مختلف آن‌ها وقتی ماکزیمم است که این متغیرها با توان‌های خود متناسب باشند. نتیجه:

$$a, b > ۰, a + b = k \text{ ثابت} \Longrightarrow \max(a^n \cdot b^m) : \frac{a}{n} = \frac{b}{m}$$

مثال اگر a و b مثبت و $a + b = ۱۰$. آنگاه ماکزیمم $a^۳.b^۲$ را بیابید.

حل

$$\frac{a}{۳} = \frac{b}{۲} \Longrightarrow ۲a - ۳b = ۰$$

$$\begin{cases} a + b = ۱۰ \\ ۲a - ۳b = ۰ \end{cases} \Longrightarrow ۵a = ۳۰ \Longrightarrow a = ۶, b = ۴ \Longrightarrow \max(a^۳.b^۲) = ۳۴۵۶$$

۵ـ۱۳۷ هرگاه برای متغیرهای مثبت a و b، حاصل‌ضرب $a^n.b^m$ مقدار ثابتی باشد، مجموع آن‌ها وقتی مینیمم است که $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$. نتیجه:

$$a, b > ۰, a^n \cdot b^m = k \text{ ثابت} \Longrightarrow \min(a + b) : \frac{a}{n} = \frac{b}{m}$$

مثال اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ باشد، مینیمم تابع $y = \tan x + \cot x$ را بیابید.

حل

$$۰ < x < \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \tan, \cot x > ۰, \tan x . \cot x = ۱ \Longrightarrow \min(\tan x + \cot x) : \frac{\tan x}{۱} = \frac{\cot x}{۱}$$

$$\Longrightarrow \tan^۲ x = ۱ \Longrightarrow \tan x = ۱, \cot x = ۱ \Longrightarrow \min(y) = ۱ + ۱ = ۲$$

دیفرانسیل

۵ـ۱۳۸ اگر $y = f(x)$ در نقطه‌ی x مشتق داشته باشد، $f'(x)\Delta x$ را دیفرانسیل تابع y تعریف نموده و آن را به dy یا df نمایش داده، می‌نویسیم:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

یعنی دیفرانسیل هر تابع، برابر است با مشتق تابع ضربدر Δx، اگر x متغیر مستقل باشد، یعنی تابع متغیر دیگری نباشد، داریم:

$$dx = (x)'\Delta x = ۱ \times \Delta x \Longrightarrow dx = \Delta x$$

پس دیفرانسیل y را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

با استفاده از رابطه‌ی فوق می‌توان دیفرانسیل توابع مختلف را محاسبه نمود.

مثال دیفرانسیل توابع زیر را بیابید.

۱) $y = (۲x - ۱)^۳$

۲) $y = \text{Arctan}(۲x)$

۳) $y = \dfrac{e^x}{x}$

۴) $y = \ln(\sin x)$

حل

۱) $dy = ۳(۲)(۲x - ۱)^۲ dx = ۶(۲x - ۱)^۲ dx$

۲) $dy = \dfrac{۲}{۱ + (۲x)^۲} dx = \dfrac{۲}{۱ + ۴x^۲} dx$

۳) $dy = \dfrac{e^x.x - e^x}{x^۲} dx = \dfrac{(x - ۱)e^x}{x^۲} dx$

۴) $dy = \dfrac{\cos x}{\sin x} dx = \cot x\, dx$

مثال dy را برای توابع زیر با مقادیر داده شده‌ی x و dx یا Δx محاسبه کنید.

۱) $f(x) = \sqrt[۵]{x} \quad x = -۳۲, dx = ۳$

۲) $f(x) = \dfrac{۱}{x} \quad x = ۱۰, \Delta x = -۰/۰۰۳$

حل

۱) $dy = \dfrac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^۴}}.dx = \dfrac{۱}{۵\sqrt[۵]{(-۳۲)^۴}} \times ۳ = \dfrac{۳}{۵\sqrt[۵]{۲^{۲۰}}} = \dfrac{۳}{۵ \times ۲^۴} = \dfrac{۳}{۸۰}$

۲) $dy = \dfrac{-۱}{x^۲}\Delta x = \dfrac{-۱}{۱۰^۲} \times \dfrac{-۳}{۱۰۰۰} = \dfrac{۳}{۱۰۰۰۰۰} = ۰/۰۰۰۰۳$

تست دیفرانسیل تابع $y = \cos^۴ x - \sin^۴ x$ کدام است؟

۱) $-۲\sin ۲x dx$ ۲) $۲\sin ۲x dx$ ۳) $۲\cos ۲x dx$ ۴) $-۲\cos ۲x dx$

حل گزینه‌ی ۱.

$$y = (\cos^۲ x - \sin^۲ x)(\cos^۲ x + \sin^۲ x) = \cos ۲x$$
$$dy = y'_x \cdot dx = -۲\sin ۲x dx$$

تست حاصل $d\left(\dfrac{x}{۱ + x^۲} + \text{Arctan}\, x\right)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{dx}{(۱ + x^۲)^۲}$ ۲) $\dfrac{۲dx}{(۱ + x^۲)^۲}$ ۳) $\dfrac{x^۲ dx}{(۱ + x^۲)^۲}$ ۴) $\dfrac{-x^۲ dx}{(۱ + x^۲)^۲}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$d\left(\frac{x}{۱+x^۲}\right)+d(\text{Arctan}\,x)=\frac{۱-x^۲}{(۱+x^۲)^۲}dx+\frac{۱}{۱+x^۲}$$

$$dx=\frac{۱-x^۲+۱+x^۲}{(۱+x^۲)^۲}dx=\frac{۲dx}{(۱+x^۲)^۲}$$

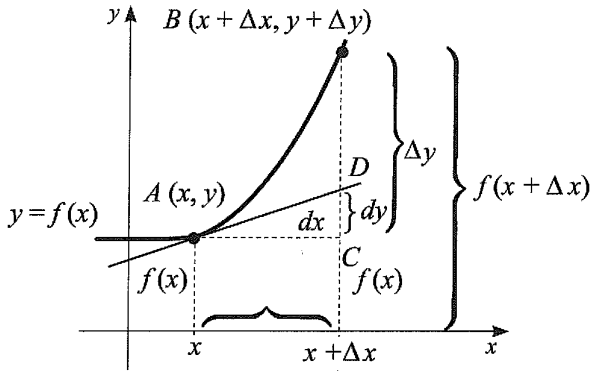
تست اگر $y=x^۳+x^۲+x$ باشد، $y'_{x^۲}$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

حل گزینه‌ی ۲.

$$y'_{x^۲}=\frac{dy}{dx^۲}=\frac{dy}{۲xdx}=\frac{۱}{۲x}\times y'_x=\frac{۱}{۲x}(۳x^۲+۲x+۱)=\frac{۱}{۲}(۳+۲+۱)=۳$$

۱۳۹ـ۵ مقایسه Δy و dy تابع $y=f(x)$: گرچه درست است که $dx=\Delta x$ اما به‌طورکلی، $dy\neq\Delta y$، این موضوع را می‌توان در شکل مشاهده کرد. خطی که از نقاط A و D می‌گذرد در نقطه‌ی A بر منحنی مماس است. مشتق محاسبه شده در نقطه‌ی A شیب خط مماس را می‌دهد. یعنی:



$$f'(x)=\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$$

اما طول AC برابر dx است، بنابراین dy باید مساوی اندازه‌ی $\overline{DC}$ باشد. چون

$$f'(x)=\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DC}}{dx}\Longrightarrow\overline{DC}=f'(x)dx=dy$$

اکنون برای هر متغیر، Δx، در x.

$$\boxed{\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)}$$

این نیز در شکل نشان داده شده است. که در آن‌جا تفاوت بین Δy و dy توسط پاره‌خط $\overline{BD}$ نشان داده می‌شود گرچه dy مساوی Δy نیست. تقریب خوبی از Δy است برای وقتی که dx کوچک باشد. برای مشاهده‌ی این مطلب، توجه کنید که در شکل، اگر dx خیلی کوچک گرفته شود، آنگاه تفاوت بین dy، Δy نیز خیلی کوچک خواهد شد.

مثال dy و Δy را برای تابع $y=x^۲$ در $x=۵$ و $\Delta x=۰/۲$ بیابید.

حل

$$dx=\Delta x=۰/۲$$

$$dy=y'dx=(۲x)dx=(۲\times۵)(۰/۲)=۲$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(۵+۰/۲)-f(۵)=f(۵/۲)-f(۵)=(۵/۲)^۲-۵^۲=۲/۰۴$$

۵ـ۱۴۰ در برخی از محاسبات تقریبی می‌توان از دیفرانسیل استفاده نمود.

$$f(a+\Delta x)-f(a)\simeq f'(a)\Delta x \quad , \quad \Delta y\simeq dy$$

و یا

$$\boxed{f(a+\Delta x)\simeq f(a)+f'(a)\Delta x}$$

مثال مقدار تقریبی $\sqrt{۱۷}$ را بیابید.

حل چون $\sqrt{۱۶}$ قابل محاسبه است $a=۱۶$ که نزدیک به ۱۷ بوده، انتخاب نموده، داریم:

$$f(x)=\sqrt{x}, a=۱۶, \Delta x=۱۷-۱۶=۱$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}, f(۱۶+۱)\simeq f(۱۶)+\frac{۱}{۲\sqrt{۱۶}}\times ۱\simeq ۴+\frac{۱}{۸}=\frac{۳۳}{۸}$$

مثال مقدار تقریبی $\sin ۶۵^\circ$ را بیابید.

حل چون $\sin ۶۰^\circ$ قابل محاسبه است $a=۶۰^\circ$ که نزدیک به ۶۵° بوده، انتخاب نموده، داریم:

$$f(x)=\sin x, a=۶۰^\circ, \Delta x=۶۵^\circ-۶۰^\circ=۵^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}=\frac{\pi}{۳۶}$$

$$f'(x)=\cos x, f(۶۰^\circ+۵^\circ)\simeq f(۶۰^\circ)+\cos ۶۰^\circ\times\frac{\pi}{۳۶}\simeq\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi}{۷۲}$$

تست اگر فرض کنید $\pi=۳$، مقدار تقریبی $\text{Arctan}\, ۰/۹۸$ کدام است؟

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۷۳ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۷۴

حل گزینه‌ی ۴.

$$f(x)=\text{Arctan}\, x, a=۱, \Delta x=۰/۹۸-۱=-۰/۰۲, f'(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$$

$$f(۱-۰/۰۲)\simeq f(۱)+f'(۱)(-۰/۰۲)\simeq \text{Arctan}(۱)+\frac{۱}{۱+۱}(-۰/۰۲)$$

$$\simeq\frac{\pi}{۴}-۰/۰۱=۰/۷۵-۰/۰۱=۰/۷۴$$

انتشار خطا

۵ـ۱۴۱ اگر x نمایشگر مقدار واقعی کمیتی باشد، مطابق تعریف:

$$\boxed{\begin{aligned}
\text{خطای اندازه‌گیری } x &= \Delta x\\
\text{خطای منتشره } y &= \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\\
\text{خطای مطلق تقریبی} &= dy=f'(x)dx\\
\text{خطای نسبی } y &= \frac{dy}{y}\\
\text{خطای درصدی } y &= \frac{dy}{y}\times ۱۰۰
\end{aligned}}$$

مثال تابع $y = x^۲ + ۲x + ۱$ مفروض است اگر $x = ۱۰$ با حداکثر خطای ۰٫۲ محاسبه شود، ماکزیمم خطای نسبی را بیابید.

حل داریم $x = ۱۰, \Delta x = dx = ۰٫۲$.

$$dy = (۲x + ۲)dx = (۲۰ + ۲) \times \frac{۲}{۱۰} = ۴٫۴$$ خطای مطلق تقریبی

$$\frac{dy}{y} = \frac{۴٫۴}{۱۲۱} = ۰٫۰۳۶y$$ خطای نسبی

دیفرانسیل‌های متوالی

۱۴۲ـ۵ در تابع $y = f(x)$، dy دیفرانسیل مرتبه اول تابع y است، حال تابع dy را درنظرگرفته، دیفرانسیل آن را با $dy^۲$ نشان می‌دهیم، آن را دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم تابع $y = f(x)$ می‌نامیم و داریم:

$$d^۲y = d(dy) = f''(x)dx^۲$$

به‌طورکلی دیفرانسیل مرتبه‌ی nام برابر است با:

$$d^n y = f^{(n)}_{(x)} \cdot dx^n \quad , n \in N$$

مثال دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم تابع $y = \frac{۱}{x} + \ln x$ را بیابید.

حل

$$f'(x) = \frac{-۱}{x^۲} + \frac{۱}{x} \Longrightarrow f''(x) = \frac{۲}{x^۳} - \frac{۱}{x^۲}$$

$$d^۲y = f''(x)dx^۲ = \left(\frac{۲ - x}{x^۳}\right) dx^۲$$

تست‌های فصل ۵

۱. اگر $f(x) = x\cos x - ۱۰$، آنگاه $f'(x)$ تابعی است:

۱) فرد ۲) زوج ۳) نه زوج و نه فرد ۴) هم زوج و هم فرد

۲. مشتق تابع $y = (x^۴ + ۱)(x^۲ + ۱)(x + ۱)(x - ۱)$ کدام است؟

۱) $۷x^۶$ ۲) $۸x^۷$ ۳) $۶x^۵$ ۴) $۱۶x^{۱۵}$

۳. مشتق تابع $f(x) = x(۱ - x)(۲ - x)\cdots(۱۰ - x)$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۲۰!$ ۳) $۱۰!$ ۴) $۹!$

۴. اگر $f(x) = e^{x^۲ - ۱} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x+۱}}\right)$، حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۴}$

۵. اگر $y = \sqrt{u}$ و $u = v^۲$ و $v = x^{-۲}$ باشد، y'_x کدام است؟

۱) $۲x^۳$ ۲) $-۲x^۳$ ۳) $-۲x^{-۳}$ ۴) $۲x^{-۳}$

۶. در تابع f اگر $f'(-۱) = ۲$ باشد، مقدار مشتق تابع با ضابطه $y = f(\frac{۲}{x})$ در $x = -۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷. تابع f با ضابطه $y = \sin\alpha - ۲\cos\alpha$ مفروض است. حاصل $y^۲ + y'^۲$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۳

۸. اگر $y = \ln(\text{Arctan}\, x)$ باشد، $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{\pi}$ ۳) π ۴) ۰

۹. اگر $xy = ۱$ باشد، آنگاه $\frac{d^۲y}{dx^۲}\cdot\frac{d^۲x}{dy^۲}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) $۴xy$

۱۰. در معادله $e^y - xe^x = ۰$، $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ کدام است؟

۱) $-x^{-۲}$ ۲) $-x^۲$ ۳) $y^{-۲}$ ۴) $x^۲$

۱۱. اگر $h(x) = (fog)(x)$ و $g(x) = x^۲ - ۴x + ۵$ و $f'(۲) = -\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $h'(۳)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۱

۱۲. مشتق تابع $f(x) = \sin(\cos^{۲} x) \cdot \cos(\sin^{۲} x)$ برابر است با:

۱) $\cos ۲x \sin(\sin ۲x)$ ۲) $-\sin(\cos ۲x)$ ۳) $\cos(\cos ۲x)$ ۴) $-\sin ۲x \cos(\cos ۲x)$

۱۳. اگر $f(x) = \ln x$ و $f \circ g(x) = x \ln x$، آنگاه $g'(۲)$ برابر است با:

۱) $۴ \ln ۲$ ۲) $۲ + \ln ۲$ ۳) $۲ \ln ۲$ ۴) $۴(۱ + \ln ۲)$

۱۴. مشتق $y = \text{Arcsin } x^{۲}$ نسبت به متغیر $\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۴}}}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{x}}{\sqrt{۱ - x^{۴}}}$ ۳) $\frac{۴x\sqrt{x}}{\sqrt{۱ - x^{۴}}}$ ۴) $۲x\sqrt{x}$

۱۵. در رابطه‌ی $\sin(xy) + \cos(xy) + ۱ = ۰$، x'_y کدام است؟

۱) $\frac{x}{y}$ ۲) $-\frac{x}{y}$ ۳) $-\frac{y}{x}$ ۴) $\frac{y}{x}$

۱۶. در تابع $x^{۳} + y^{۳} = ۱$، حاصل $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{y}$ ۲) $-\frac{۲x}{y^{۵}}$ ۳) $\frac{۲x}{y^{۵}}$ ۴) $-\frac{x}{y}$

۱۷. اگر $y = \sin^{۲} t$ و $x = \cos^{۲} t$ باشد، $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $\tan t$

۱۸. مشتق تابع $f(x) = \ln\left(e^{x}\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) e

۱۹. اگر $y = e^{u} \ln u$، $u = \frac{۱-t}{۱+t}$ و $t = xe^{x}$ باشد، $\frac{dy}{dx}$ به‌ازای $x = ۰$ کدام است؟

۱) $۲e$ ۲) e ۳) $-۲e$ ۴) $-e$

۲۰. در صورتی که $g(x) = f(x^{۲} + ۳x)$ باشد و با فرض $g'(۱) = ۱۰$ مقدار $f'(۴)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۲۱. رابطه $x^{۵} + y^{۴} + x^{۲}y = ۱$، x را به‌طور ضمنی برحسب y بیان می‌کند، $x'_{(۰)}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) ۰ ۴) -۵

۲۲. اگر $f(x) = |x|^{۳}$ باشد، دامنه تعریف $f'(x)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^{+}$ ۳) $\mathbb{R} - \{۰\}$ ۴) $\{\}$

۲۳. تابع f با ضابطه $f(x) = x^{۲}|x|$ در $x = ۰$:

۱) مشتق اول دارد ولی مشتق دوم ندارد.
۲) مشتق دوم دارد ولی مشتق اول ندارد.
۳) مشتق اول و دوم ندارد.
۴) مشتق اول و دوم دارد.

۲۴. اگر $y = (\tan x)^{\cos x}$، آنگاه $\frac{۱}{y}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۲۵. اگر $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(t - \cos t) \end{cases}$، $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $\tan \frac{t}{۲}$ ۲) $-\tan \frac{t}{۲}$ ۳) $\cot \frac{t}{۲}$ ۴) $-\cot \frac{t}{۲}$

۲۶. مشتق مرتبه nام تابع $y = e^{a+bx}$ کدام است؟

۱) $e^{n(a+bx)}$ ۲) $b^n e^{a+bx}$ ۳) $e^{(a+bx)^n}$ ۴) $b^{n-۱} e^{a+bx}$

۲۷. مشتق تابع $y = e^{x^x}$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) e ۴) $e^{-۱}$

۲۸. اگر مشتق $f(\tan x)$ برابر $\frac{۱ + \tan^۲ x}{\tan x}$ باشد، مشتق $f(\sin x)$ کدام است؟

۱) $(۱ + \sin^۲ x) \cot x$ ۲) $\cot x$ ۳) $\frac{۱ + \sin^۲ x}{\sin x}$ ۴) $\tan x$

۲۹. مشتق تابع $f(x) = ۲^{\sin x}$ به ازای $x = ۰$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\ln ۲$ ۳) ۰ ۴) ۱

۳۰. اگر $f(x) = x^۲ - ۴x$ و $x = f'(t)$ باشد، $\frac{df}{dt}$ کدام است؟

۱) $۸t - ۴$ ۲) $۴t - ۸$ ۳) $۸t - ۲۴$ ۴) $۲t - ۴$

۳۱. توابع f و g مشتق‌پذیرند به‌طوری که $f(۲) = ۳$ و $f'(۲) = -۱$ و $g(۲) = -۵$ و $g'(۲) = ۲$ مقدار عددی مشتق تابع $\frac{g}{f}$ به ازای $x = ۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) -۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۳۲. تابع f به معادله $f(x) = |x^۳ - ۳x + ۲|$ در $x_۰ = ۱$:

۱) مشتق‌پذیر است.
۲) فقط مشتق راست دارد.
۳) فقط مشتق چپ دارد.
۴) مشتق راست و چپ دارد ولی مساوی نیستند.

۳۳. اگر f تابعی یک جمله‌ای و داشته باشیم $f(x) = f'(x).f''(x)$، آنگاه $f'(x)$ کدام است؟

۱) $۳x^۲$ ۲) $\frac{۱}{۳}x^۲$ ۳) $\frac{۱}{۶}x^۲$ ۴) $x^۲$

۳۴. مشتق مرتبه سوم در تابع به معادله $y = \frac{x^۲ - ۴x}{(x-۲)^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹۶}{(x-۲)^۸}$ ۲) $\frac{۹۶}{(x-۲)^۷}$ ۳) $\frac{۹۶}{(x-۲)^۶}$ ۴) $\frac{۹۶}{(x-۲)^۵}$

۳۵. اگر حد عبارت $\frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$ وقتی $x \to ۲$ برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد، مشتق عبارت $f(\frac{۱}{x})$ در $x = \frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۲ ۴) -۲

۳۶. در تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} ۹ - x^۲ & x \geqslant ۳ \\ x^۲ - ۹ & x < ۳ \end{cases}$، $\lim_{h \to ۰} \frac{f(۳ + h^۲) - f(۳)}{h^۲}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۲ ۴) -۲

۳۷. اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و g در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، $(gof)'(۰)$ کدام است؟

۱) $f'(۰)$ ۲) ۲ ۳) $g'(۲)$ ۴) صفر

۳۸. در تابع به معادله $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۱ \\ ax+b & x\geqslant ۱ \end{cases}$، a و b چه‌قدر باشند تا $f'(۱)$ وجود داشته باشد؟

۱) $a=b=۱$ ۲) $a=b=۲$ ۳) $b=-۱, a=۲$ ۴) $b=۱, a=-۲$

۳۹. تابع f به معادله $f(x)=\begin{cases} x^۴-۲x^۲+a & x\geqslant ۰ \\ bx^۲+cx-۱ & x<۰ \end{cases}$ مفروض است. اگر $f''(۰)$ وجود داشته باشد، $a+b+c$ چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) ۲

۴۰. معادله خط قائم بر منحنی $f(x)=\begin{cases} ۲x^۲+۱ & x\geqslant ۰ \\ ۴x & x<۰ \end{cases}$ در نقطه $(۱,۳)$ کدام است؟

۱) $y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۳}{۲}$ ۲) $y=-۲x+۳$ ۳) $y=۴x-۱$ ۴) $y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۱۳}{۴}$

۴۱. اگر مماس بر منحنی نمایش تابع $y=mx^۳-۳x^۲+x$ در نقطه $x=۲$ از منحنی عبور کند، m چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۴۲. مماس بر منحنی $y=\ln(x-۱)$ در نقطه $x=۲$ محور عرض‌ها را در چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۱

۴۳. شیب خط مماس بر منحنی $\frac{x-y}{x+y}=x^۲$ در نقطه‌ی $(۰,۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۰

۴۴. درکدام فاصله تابع با ضابطه $y=x+۱+\frac{۴}{x^۲}$ صعودی است؟

۱) $(-\infty,-۲]\cup(۰,+\infty)$ ۲) $(-۲,-۱)\cup[۰,+\infty)$

۳) $(-\infty,۰)\cup[۲,+\infty)$ ۴) $(-\infty,+\infty)$

۴۵. نمودار تابع $y=۲^{x-۱}$:

۱) همواره صعودی است. ۲) همواره نزولی است.

۳) برای $x>۱$ صعودی و برای $x<۱$ نزولی است. ۴) برای $x>۱$ نزولی و برای $x<۱$ صعودی است.

۴۶. به‌ازای کدام مقدارهای a، تابع $y=\frac{x-۲a}{x+۸a}$ همواره نزولی است؟

۱) $a<۰$ ۲) $a<۲$ ۳) $a>۰$ ۴) $a>۲$

۴۷. به ازای کدام مقدار a، تابع $y=ax^۲+۶x$ دارای ماکزیممی برابر ۳است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) -۳

۴۸. طول نقطه مینیمم تابع $y = x\ln^{۲} x$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $e^{\frac{۱}{۲}}$ ۴) -۱

۴۹. طول نقطه اکسترمم تابع $f(x) = \frac{۹}{x} + \frac{x^{۲}}{۹}$ کدام است؟

۱) $\max : x = \frac{۳\sqrt[۳]{۱۲}}{۲}$ ۲) $\min : x = \frac{۳\sqrt[۳]{۱۲}}{۲}$ ۳) $\min : x = ۳\sqrt[۳]{۱۲}$ ۴) $\max : x = ۳\sqrt[۳]{۱۲}$

۵۰. مختصات اکسترمم تابع $y = ۲xe^{x}$ کدام است؟

۱) $\max\left(-۱, -\frac{۲}{e}\right)$ ۲) $\min\left(-۱, -\frac{۲}{e}\right)$ ۳) $\max(۰, e)$ ۴) $\min(۰, e)$

۵۱. مختصات ماکزیمم یا مینیمم تابع $y = \frac{-x}{x^{۲}-۱}$ کدام است؟

۱) $\max\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \sqrt{۳}\right)$ ۲) $\min\left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۷}\right)$ ۳) $\max\left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۷}\right)$ ۴) فاقد اکسترمم

۵۲. طول نقطه اکسترمم نسبی تابع $y = \frac{x}{\ln x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{e}$ ۲) $-e$ ۳) $\frac{۱}{e}$ ۴) e

۵۳. تابع $f(x) = ۲x^{۳} - ۳(m+n)x^{۲} + ۶mnx$ چند اکسترمم دارد؟ $(m = n)$

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) ندارد

۵۴. معادله خطی که از نقاط اکسترمم تابع $y = x^{۳} - ۳x + ۱$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y = -۲x - ۱$ ۲) $y = ۲x + ۳$ ۳) $y = -۲x + ۱$ ۴) $y = ۲x$

۵۵. نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{۴}{x} + \frac{x}{۴}$ کدام است؟

۱) $\max(-۴, -۲), \min(۴, ۲)$ ۲) $\max(۴, ۲), \min(-۴, -۲)$

۳) $\max(-۴, -۲), \min(-۴, ۲)$ ۴) $\max(-۴, ۲), \min(-۴, -۲)$

۵۶. مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x^{۴} - ۸x^{۲} + ۱۶$ در بازه‌ی $[-۱, ۴]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۲ ۳) ۹ ۴) -۱

۵۷. نقطه بحرانی در تابع $y = \cosh x$ کدام است؟

۱) $\min(۰, ۱)$ ۲) $\max(۰, ۱)$ ۳) $\min(۱, ۰)$ ۴) ندارد

۵۸. فاصله صعودی و نزولی تابع $y = \ln(۱ - x^{۲})$ کدام است؟

۱) در فاصله $(۰, -۱)$ نزولی است.

۲) در فاصله $(۰, -۱)$ صعودی است.

۳) در فاصله $(۰, ۱)$ صعودی است.

۴) در فاصله $(۱, -۱)$ صعودی است.

۵۹. منحنی تابع $y = \sinh x$:

۱) فاقد نقاط ماکزیمم و عطف است.

۲) فاقد نقاط مینیمم و عطف است.

۳) در مبدأ دارای نقطه عطف است.

۴) دارای نقاط ماکزیمم و مینیمم است.

۶۰. حداکثر مقدار تابع $f(x) = ۲^x$ در فاصله $[۰, ۵]$ کدام است؟

۱) $\ln ۲$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳۲

۶۱. نقطه عطف منحنی $y = \ln x - (x-۱) + \frac{(x-۱)^۲}{۲}$ کدام است؟

۱) $(۱, ۱)$ ۲) $(۱, ۰)$ ۳) $(۰, ۱)$ ۴) $(۱, -۱)$

۶۲. در تابع $y = \frac{x^۲ - ax - ۵}{x^۲ - ax + ۵}$ اگر مینیمم تابع برابر با -۹ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۱ ۳) ± ۴ ۴) ۰

۶۳. نمودار تابع $y = x^۲ - ۳x + ۳$ بر کدام خط زیر مماس است؟

۱) $y = ۳$ ۲) $y = ۲$ ۳) $x = ۱$ ۴) $x = \frac{۳}{۲}$

۶۴. اگر $M(۲, ۱)$ نقطه ماکزیمم یا مینیمم منحنی تابع $c : y = x^۳ - ax^۲ + b - ۲$ باشد، نقطه‌ی عطف منحنی c کدام است؟

۱) $(۱, ۳)$ ۲) $(۱, -۳)$ ۳) $(-۱, ۳)$ ۴) $(-۱, -۳)$

۶۵. نقطه‌ی می‌نیمم تابع $y = x^۳ + px^۲ + q$ به طول ۲ روی محور $x'x$ است، $p + q$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۷ ۳) ۱ ۴) -۱

۶۶. اگر $f'(a) = f''(a) = ۰$ باشد، آنگاه:

۱) تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ دارای ماکزیمم نسبی است.

۲) تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ دارای مینیمم نسبی است.

۳) تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ نه ماکزیمم و نه مینیمم دارد.

۴) نمی‌توان گفت که تابع در $x = a$ دقیقاً چه وضعیتی دارد.

۶۷. نقطه بحرانی تابع $\begin{cases} x = t^۲ \\ y = t^۲ + ۲t \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\min(۱, -۱)$ ۲) $\max(۱, -۱)$ ۳) $\min(۱, ۳)$ ۴) $\max(۱, ۳)$

۶۸. طول نقطه عطف در منحنی به معادله‌ی $\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $۲e^۲$ ۳) $\sqrt{۲}e^{\sqrt{۲}}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۶۹. نقطه بحرانی تابع $f(x) = e^x + e^{-x}$ کدام است؟

۱) $\max(۰, ۲)$ ۲) $\min(۰, ۲)$ ۳) $\max(۰, ۱)$ ۴) نقطه بحرانی ندارد.

۷۰. در تابع f داریم برای عدد حقیقی a $f(a) = ۴$ و $f'(a) = ۰$ و $f''(a) = ۲$، برای این تابع کدام یک از احکام زیر صادق است؟

۱) تابع داری ماکزیممی برابر ۴ است.

۲) نمودار تابع در نقطه‌ی به‌طول a بر محور x مماس است.

۳) نمودار تابع در a دارای نقطه‌ی عطف است.

۴) تابع دارای می‌نیممی برابر $۴a$ است.

۷۱. طول نقطه عطف تابع $y = \frac{x^۲}{۲} - \ln x$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) e

۷۲. طول نقطه بحرانی تابع $f(x) = \frac{x+۳}{x^۲ - ۹}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $-۳, ۳$ ۴) ندارد

۷۳. تابع $y = \sqrt{۱ + x^۲}$ مفروض است، کدام گزاره درست است؟

۱) به‌ازای $x \in (۰, +\infty)$، مقعر است.

۲) به‌ازای $x \in [-\infty, ۰)$، مقعر است.

۳) به‌ازای $x \in (-\infty, +\infty)$، محدب است.

۴) به‌ازای $x \in [-۱, ۱]$، مقعر است.

۷۴. مبدأ مختصات برای تابع $y = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}$ چه نقطه‌ای است؟

۱) می‌نیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) عطف ۴) ساده

۷۵. کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ در فاصله $[-۱/۵, ۲]$ کدام است؟

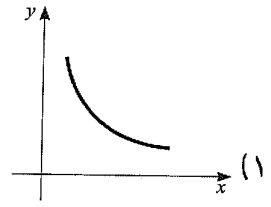
۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۳

۷۶. در تابع $f(x) = \frac{mx^۳}{۳} - x^۲ - ۴x$ حدود m چگونه باشد تا تابع نزولی گردد؟

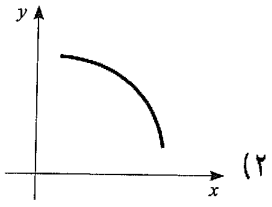
۱) $m \leqslant -\frac{۱}{۴}$ ۲) $m < -\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴} \leqslant m < ۰$ ۴) $-\frac{۱}{۴} < m < ۰$

۷۷. کدام نمودار در شرایط $f' < ۰$ و $f'' > ۰$ صدق می‌کند؟

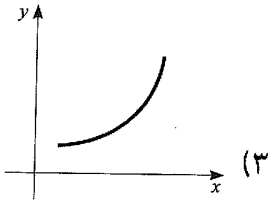
۱)



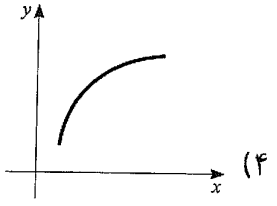
۲)



۳)



۴)



۷۸. اگر $y^x = x^y$ باشد، $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(۱, ۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) $\frac{۱}{e}$

۷۹. معادله مماس بر منحنی $y = x \ln x$ در نقطه $(۱, ۰)$ محور طول‌ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۰

۸۰. نرخ متوسط تغییرات تابع $y = ۲x + ۵$ برای فاصله $\Delta x = ۰/۱$ و $x = ۳$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $-۰/۲$ ۴) $۰/۲$

۸۱. اگر $۰ < b < a$ باشد، ماکزیمم عبارت $(\log_a^b)^{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\log_b^a$ ۲) $\log_a^b$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}\log_b^a$

۸۲. حاصل $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$ کدام است؟

۱) $\tan x$ ۲) $\cot x$ ۳) $-\tan x$ ۴) $-\cot x$

۸۳. دیفرانسیل تابع $f(x) = \text{Arctan}\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{-dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۲) $\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۳) $\frac{-dx}{۲\sqrt{۱-x^۲}}$ ۴) $\frac{dx}{۲\sqrt{۱-x^۲}}$

۸۴. دیفرانسیل تابع $y = ۲x^۲ - x$ به‌ازای تغییر از -۱ به $-۰/۹۸$ کدام است؟

۱) $۰/۱$ ۲) $-۰/۱$ ۳) $-۰/۰۲$ ۴) $۰/۰۲$

۸۵. دیفرانسیل تابع $y = \ln x^۲ + \ln\sqrt{x}$ برابر است با:

۱) $\frac{dx}{۲x}$ ۲) $\frac{\sqrt{x}dx}{۲x}$ ۳) $\frac{dx}{۲}$ ۴) $\frac{۵dx}{۲x}$

۸۶. دیفرانسیل مرتبه دوم $y = \ln\left(\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۴(۳x^۲+۱)}{(۱-x^۴)^۲}dx^۲$ ۲) $\frac{۴(۳x^۲+۱)}{(۱-x^۴)^۲}dx^۲$ ۳) $\frac{-۴(۳x^۲-۱)}{(۱-x^۴)^۲}dx^۲$ ۴) $\frac{۳x^۲+۱}{(۱-x^۴)^۲}dx^۲$

۸۷. تابع $y = x^۲ - ۴x + ۱$ مفروض است. اگر $x = ۱۰$ با حداکثر خطای $۰/۱$ محاسبه شود، خطای نسبی تقریبی کدام است؟

۱) $۱/۶$ ۲) $۰/۰۲۶$ ۳) $۰/۱۶$ ۴) $۰/۲۶$

۸۸. دیفرانسیل تابع $y = \frac{x}{۱+x^۲} + \text{Arctan}\,x$ برابر است با:

۱) $\frac{۲dx}{۱+x^۲}$ ۲) $\frac{۲xdx}{۱+x^۲}$ ۳) $\frac{۲dx}{(۱+x^۲)^۲}$ ۴) $\frac{۲xdx}{(۱+x^۲)^۲}$

۸۹. دیفرانسیل تابع $y = \sin(\text{Arcsin}\,x)$ کدام است؟

۱) $-dx$ ۲) dx ۳) $\frac{dx}{۱+x^۲}$ ۴) $\frac{-dx}{۱+x^۲}$

۹۰. مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x+۱)^{۲/۳}$ در فاصله‌ی $[-۲, ۱]$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $\sqrt[۳]{۲}$

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۵

۱. گزینه‌ی ۲.

$$f'(x) = \cos x - x\sin x$$

$$f'(-x) = \cos(-x) - (-x)\sin(-x) = \cos x - x\sin x = f'(x)$$

۲. گزینه‌ی ۲.

$$y=(x^۴+۱)(x^۲+۱)(x^۲-۱)=(x^۴+۱)(x^۴-۱)=x^۸-۱\Longrightarrow y'=۸x^۷$$

۳. گزینه‌ی ۳. با فرض $g(x)=(۱-x)(۲-x)\cdots(۱۰-x)$ خواهیم داشت:

$$f(x)=x\cdot g(x)\Longrightarrow f'(x)=۱\times g(x)$$
$$f'(۰)=g(۰)\Longrightarrow f'(۰)=(۱-۰)(۲-۰)\cdots(۱۰-۰)=۱۰!$$

۴. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=f'(۱)\ ,\ f(x)=e^{x^۲-۱}+\ln x-\frac{۱}{۲}\ln(x+۱)$$
$$f'(x)=۲xe^{x^۲-۱}+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x+۱})\Longrightarrow f'(۱)=۲+۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۱}{۴}$$

۵. گزینه‌ی ۳.

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x\Longrightarrow y'_x=\frac{۱}{۲\sqrt{u}}\cdot ۲v.(-۲x^{-۳})=-۲x^{-۳}$$

۶. گزینه‌ی ۲.

$$y'=-\frac{۲}{x^۲}f'\left(\frac{۲}{x}\right)\Longrightarrow y'_{(-۲)}=-\frac{۲}{۴}f'\left(-\frac{۲}{۲}\right)=\frac{-۱}{۲}\times ۲=-۱$$

۷. گزینه‌ی ۳.

$$y^۲=\sin^۲\alpha-۴\sin\alpha\cos\alpha+۴\cos^۲\alpha$$
$$y'=\cos\alpha+۲\sin\alpha\Longrightarrow y'^۲=\cos^۲\alpha+۴\sin\alpha\cos\alpha+۴\sin^۲\alpha$$
$$y^۲+y'^۲=۴(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)+\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۴+۱=۵$$

۸. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{۱}{۱+x^۲}}{\operatorname{Arctan}x}\Longrightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=۱}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۲}{\pi}\ .$$

۹. گزینه‌ی ۲.

$$xy=۱\Longrightarrow y=x^{-۱}\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=-x^{-۲}\Longrightarrow\frac{d^۲y}{dx^۲}=۲x^{-۳}$$
$$xy=۱\Longrightarrow x=y^{-۱}\Longrightarrow\frac{dx}{dy}=-y^{-۲}\Longrightarrow\frac{d^۲x}{dy^۲}=۲y^{-۳}$$
$$\frac{d^۲y}{dx^۲}\cdot\frac{d^۲x}{dy^۲}=۲x^{-۳}\cdot ۲y^{-۳}=۴(xy)^{-۳}=۴(۱)^{-۳}=۴$$

۱۰. گزینه‌ی ۱.

$$e^y - xe^x = 0 \Longrightarrow e^y \frac{dy}{dx} - e^x - xe^x = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x(x+1)}{e^y}$$
$$e^y = xe^x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x} \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x-(x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

۱۱. گزینه‌ی ۴.

$$h'(x) = f'(g(x)).g'(x) \Longrightarrow h'(3) = f'(g(3)).g'(3)$$
$$g'(x) = 2x - 4 \Longrightarrow g'(3) = 2, h'(3) = 2f'(2) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

۱۲. گزینه‌ی ۴. می‌دانیم $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$، بنابراین:

$$f(x) = \frac{1}{2}[\sin(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin(\cos^2 x - \sin^2 x)] = \frac{1}{2}[\sin(1) + \sin(\cos 2x)]$$
$$f'(x) = -\sin 2x \cos(\cos 2x)$$

۱۳. گزینه‌ی ۴.

$$f(g(x)) = x \ln x \Longrightarrow \ln g(x) = x \ln x \Longrightarrow g(x) = e^{x \ln x}$$
$$g'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x} = (\ln x + 1)x^x \Longrightarrow g'(2) = (\ln 2 + 1)(4)$$

۱۴. گزینه‌ی ۳.

$$y'_{(\sqrt{x})} = \frac{(\text{Arcsin}\, x^2)'}{(\sqrt{x})'} = \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}$$

۱۵. گزینه‌ی ۲.

$$x'_y = -\frac{x\cos xy - x\sin xy}{y\cos xy - y\sin xy} = -\frac{x(\cos xy - \sin xy)}{y(\cos xy - \sin xy)} = -\frac{x}{y}$$

۱۶. گزینه‌ی ۲.

$$3x^2 + 3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2} \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2xy^2 - 2yx^2\left(\frac{dy}{dx}\right)}{y^4}$$
$$= -\frac{2xy^2 - 2yx^2\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)}{y^4} = -\frac{2xy^2 + \frac{2x^4}{y}}{y^4} = -\frac{2x(y^3 + x^3)}{y^5} = -\frac{2x}{y^5}$$

۱۷. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\sin t \cos t}{-2\cos t \sin t} = -1 \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

۱۸. گزینه‌ی ۱.

$$y = \ln e^x + \ln\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)^{\frac{۱}{۲}} = x\ln e + \frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right) = x + \frac{۱}{۲}[(\ln(x-۱) - \ln(x+۱)]$$

$$y' = ۱ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x+۱}\right) = ۱ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{x^۲-۱}\right) = ۱ + \frac{۱}{x^۲-۱} = \frac{x^۲}{x^۲-۱} \Longrightarrow y'_{(۰)} = ۰$$

۱۹. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \left(e^u\ln u + \frac{e^u}{u}\right)\left(\frac{-۱-t-۱+t}{(۱+t)^۲}\right)(e^x + xe^x)$$

$$x = ۰ \Longrightarrow t = ۰ \Longrightarrow u = ۱ \Longrightarrow y = ۰\ ,\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=۰} = e\times(-۲)\times ۱ = -۲e$$

۲۰. گزینه‌ی ۱.

$$g'(x) = (۲x+۳)f'(x^۲+۳x)$$

$$g'(۱) = ۱۰ \Longrightarrow ۵f'(۴) = ۱۰ \Longrightarrow f'(۴) = ۲$$

۲۱. گزینه‌ی ۲.

$$y = ۰ \Longrightarrow x^۵ = ۱ \Longrightarrow x = ۱, x'_y = -\frac{۴y^۳ + x^۲}{۵x^۴ + ۲xy} \Longrightarrow x'_{(۰)} = -\frac{۱}{۵}$$

۲۲. گزینه‌ی ۱.

$$f(x) = |x|^۳ = (\sqrt{x^۲})^۳ = (x^۲)^{\frac{۳}{۲}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{۳}{۲}(۲x)(x^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۳x(x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$f'(x) = ۳x|x| \Longrightarrow D_{f'(x)} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

۲۳. گزینه‌ی ۴.

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ & x \geqslant ۰ \\ -x^۳ & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ & x \geqslant ۰ \\ -۳x^۲ & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow f''(x) = \begin{cases} ۶x & x \geqslant ۰ \\ -۶x & x < ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(۰) = ۰ \\ f'_-(۰) = ۰ \end{cases} \Longrightarrow f'_+(۰) = f'_-(۰) = f'(۰) = ۰$$

$$\begin{cases} f''_+(۰) = ۰ \\ f''_-(۰) = ۰ \end{cases} \Longrightarrow f''_+(۰) = f''_-(۰) = f''(۰) = ۰$$

۲۴. گزینه‌ی ۱.

$$y' = (\tan x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\tan x + \frac{۱+\tan^۲ x}{\tan x}\cos x\right)$$

$$y'(\tfrac{\pi}{۴}) = (۱)^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ln(۱) + \frac{۱+۱}{۱}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۱(۰+\sqrt{۲}) = \sqrt{۲}$$

۲۵. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a(1+\sin t)}{a(1-\cos t)} = \cot\frac{t}{2}$$

۲۶. گزینه‌ی ۲.

$$y' = be^{a+bx} \Longrightarrow y'' = b^2e^{a+bx} \Longrightarrow y''' = b^3e^{a+bx} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow y^{(n)} = b^ne^{a+bx}$$

۲۷. گزینه‌ی ۴.

$$y = x^x \Longrightarrow \ln y = x\ln x \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Longrightarrow y' = (\ln x + 1)x^x \Longrightarrow y'_{(1)} = (0+1)(1) = 1$$

۲۸. گزینه‌ی ۴.

$$(1+\tan^2 x)f'(\tan x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} \Longrightarrow f'(\tan x) = \frac{1}{\tan x}$$

$$y = f(\sin x) \Longrightarrow y' = \cos x f'(\sin x) = \cos x \times \frac{1}{\sin x} = \cot x$$

۲۹. گزینه‌ی ۲.

$$f(x) = 2^{\sin x} \Longrightarrow f'(x) = \cos x \cdot 2^{\sin x} \cdot \ln 2$$

$$f'(0) = 1 \times 2^0 \times \ln 2 = \ln 2$$

۳۰. گزینه‌ی ۳.

$$f(x) = x^2 - 4x \Longrightarrow f'(x) = 2x - 4 \Longrightarrow f'(t) = 2t - 4$$

$$x = f'(t) \Longrightarrow x = 2t - 4$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = 2f'(x) = 2[2(2t-4)-4] = 8t - 24$$

۳۱. گزینه‌ی ۴.

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(2) = \frac{g'(2)f(2) - g(2)f'(2)}{f^2(2)} = \frac{(2)(3)-(-5)(-1)}{3^2} = \frac{1}{9}$$

۳۲. گزینه‌ی ۱.

$$f(x) = |(x-1)^2(x+2)| = (x-1)^2|x+2|$$

$x_0 = 1$ ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ داخل قدرمطلق نیست، پس تابع در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است.

۳۳. گزینه‌ی ۳. با توجه به گزینه‌های داده شده $f'(x)$ از درجه دوم است، پس تابع f از درجه سوم است.

$$f(x) = ax^3 \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 \Longrightarrow f''(x) = 6ax$$

$$f(x) = f'(x).f''(x) \Longrightarrow ax^3 = 3ax^2 \cdot 6ax \Longrightarrow ax^3 = 18a^2x^3 \Longrightarrow a = \frac{1}{18}$$

$$f'(x) = 3ax^2 = 3 \times \frac{1}{18}x^2 = \frac{1}{6}x^2$$

۳۴. گزینه‌ی ۴. با توجه به فرمول $y=\frac{k}{(x-a)^n} \Longrightarrow y'=-\frac{-kn}{(x-a)^{n+1}}$ داریم:

$$y=\frac{(x-۲)^۲-۴}{(x-۲)^۲}=۱-\frac{۴}{(x-۲)^۲} \Longrightarrow y'=\frac{۸}{(x-۲)^۳} \Longrightarrow y''=\frac{-۲۴}{(x-۲)^۴} \Longrightarrow y'''=\frac{۹۶}{(x-۲)^۵}$$

۳۵. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)=\frac{۳}{۲},\ \left[f\left(\frac{۱}{x}\right)\right]'=-\frac{۱}{x^۲}f'\left(\frac{۱}{x}\right)\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}-۴f'(۲)=-۴\left(\frac{۳}{۲}\right)=-۶$$

۳۶. گزینه‌ی ۲. مشتق راست در $x=۳$ را پیدا می‌کنیم.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h^۲)-f(۳)}{h^۲}=f'_+(۳)$$
$$f(x)=۹-x^۲ \Longrightarrow f'(x)=-۲x \Longrightarrow f'_+(۳)=-۶$$

۳۷. گزینه‌ی ۴.

$$(gof)'(۰)=g'(f(۰))\cdot f'(۰)=g'(f(۰))\times ۰=۰$$
$$f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}} \Longrightarrow f'(۰)=\frac{۰}{۲\sqrt{۴}}=۰$$

۳۸. گزینه‌ی ۳. برای آنکه $f'(۱)$ موجود باشد، بایستی $f'_+(۱)=f'_-(۱)$، پس:

$$f'_+(۱)=a,\ f'_-(۱)=۲ \Longrightarrow a=۲$$

اگر $f'(۱)$ موجود باشد، آنگاه f در ۱ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to ۱+}f(x)=\lim_{x\to ۱-}f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to ۱+}(ax+b)=\lim_{x\to ۱-}(x^۲) \Longrightarrow a+b=۱ \Longrightarrow b=-۱$$

۳۹. گزینه‌ی ۲. اولاً: تابع f و تابع f' باید در $x=۰$ پیوسته باشند.

$$\lim_{x\to ۰+}f(x)=a,\ \lim_{x\to ۰-}f(x)=-۱ \Longrightarrow a=-۱$$
$$f'(x)=\begin{cases}۴x^۳-۴x & x\geqslant ۰\\ ۲bx+c & x<۰\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰+}f'(x)=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰-}f'(x)=c\end{cases} \Longrightarrow c=۰$$

ثانیاً: تابع f'' باید در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد.

$$f''(x)=\begin{cases}۱۲x^۲-۴ & x\geqslant ۰\\ ۲b & x<۰\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰+}f''(x)=-۴\\ \lim\limits_{x\to ۰-}f''(x)=۲b\end{cases} \Longrightarrow b=-۲$$
$$a+b+c=-۱-۲+۰=-۳$$

۴۰. گزینه‌ی ۴.

$$f'_+(۱) = ۴ \times ۱ = ۴, f'_-(۱) = ۴ \Longrightarrow f'(۱) = f'_+(۱) = f'_-(۱) = ۴$$
$$m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{۴} \Longrightarrow y - ۳ = -\frac{۱}{۴}(x - ۱) \Longrightarrow y = -\frac{۱}{۴}x + \frac{۱۳}{۴}$$

۴۱. گزینه‌ی ۳. خط مماس بر منحنی یک تابع در نقطه عطف ($y'' = ۰$) از منحنی عبور می‌کند:

$$y' = ۳mx^۲ - ۶x + ۱ \Longrightarrow y'' = ۶mx - ۶ = ۰ \xrightarrow{x=۲} ۱۲m - ۶ = ۰ \Longrightarrow m = \frac{۱}{۲}$$

۴۲. گزینه‌ی ۳.

$$x = ۲ \Longrightarrow y = \ln ۱ \Longrightarrow y = ۰, y' = \frac{۱}{x - ۱} \Longrightarrow y'_{(۲)} = ۱$$
$$y - ۰ = ۱(x - ۲) \Longrightarrow y = x - ۲ \xrightarrow[x=۰]{\text{محور عرض‌ها}} y = -۲$$

۴۳. گزینه‌ی ۲.

$$x - y = x^۳ + x^۲y \Longrightarrow x^۳ + x^۲y - x + y = ۰$$
$$y' = -\frac{۳x^۲ + ۲xy - ۱}{x^۲ + ۱} \xrightarrow{(۰,۱)} m_{\text{مماس}} = -\frac{۰ + ۰ - ۱}{۰ + ۱} = ۱$$

۴۴. گزینه‌ی ۳.

$$y' = ۱ - \frac{۸}{x^۳} = \frac{x^۳ - ۸}{x^۳} = \frac{(x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۴)}{x^۳} \geqslant ۰ \Longrightarrow x \geqslant ۲ \text{ یا } x < ۰$$

۴۵. گزینه‌ی ۱.

$$y' = ۲^{x-۱}.\ln ۲, ۲^{x-۱} > ۰ \Longrightarrow y' > ۰$$

۴۶. گزینه‌ی ۱.

$$y' = \frac{۱۰a}{(x + ۸a)^۲} < ۰ \Longrightarrow ۱۰a < ۰ \Longrightarrow a < ۰$$

۴۷. گزینه‌ی ۴. باید معادله حاصل از تلاقی خط $y = ۳$ و منحنی $y = ax^۲ + ۶x$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$ax^۲ + ۶x = ۳ \Longrightarrow ax^۲ + ۶x - ۳ = ۰, \Delta' = ۰ \Longrightarrow ۹ + ۳a = ۰ \Longrightarrow a = -۳$$

۴۸. گزینه‌ی ۲.

$$y' = \ln^۲ x + ۲\ln x = ۰ \Longrightarrow \ln x(\ln x + ۲) = ۰ \Longrightarrow \ln x = ۰ \Longrightarrow x = ۱$$
$$\ln x + ۲ = ۰ \Longrightarrow \ln x = -۲ \Longrightarrow x = e^{-۲}, y'' = \frac{۲}{x}\ln x + \frac{۲}{x} \Longrightarrow y''_{(۱)} = ۰ + ۲ > ۰$$

۴۹. گزینه‌ی ۲.

$$f'(x) = -\frac{۹}{x^۲} + \frac{۲x}{۹} = \frac{۲x^۳ - ۸۱}{۹x^۲} = ۰ \Longrightarrow ۲x^۳ - ۸۱ = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۳\sqrt[۳]{۱۲}}{۲}$$
$$f''(x) = \frac{۱۸}{x^۳} + \frac{۲}{۹} \xrightarrow[\text{نقطه مشتق}]{\text{به‌ازای طول}} f''(x) > ۰ \Longrightarrow \text{نوع نقطه مینیمم است}$$

۵۰. گزینه‌ی ۲.

$$y' = ۲e^x + ۲xe^x = ۰ \Longrightarrow ۲e^x(۱+x) = ۰ \Longrightarrow ۲e^x > ۰, ۱+x = ۰ \Longrightarrow x = -۱$$
$$y'' = ۴e^x + ۲xe^x \Longrightarrow y''_{(-۱)} > ۰ \Longrightarrow \min\left(-۱, -\frac{۲}{e}\right)$$

۵۱. گزینه‌ی ۴.

$$y' = \frac{-x^۲ + ۱ + ۲x^۲}{(x^۲-۱)^۲} = \frac{x^۲+۱}{(x^۲-۱)^۲} \Longrightarrow y' > ۰ \Longrightarrow \text{تابع اکیداً صعودی و فاقد اکسترمم}$$

۵۲. گزینه‌ی ۴.

$$y' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{۱}{x}}{(\ln x)^۲} = ۰ \Longrightarrow \ln x - ۱ = ۰ \Longrightarrow \ln x = ۱ \Longrightarrow x = e$$

۵۳. گزینه‌ی ۴.

$$f'(x) = ۶x^۲ - ۶(m+n)x + ۶mn = ۰ \xrightarrow{m=n} x^۲ - ۲mx + m^۲ = ۰$$
$$(x-m)^۲ = ۰ \Longrightarrow x = m, f''(x) = ۲x - ۲m \xrightarrow{x=m} f''(x) = ۰$$

۵۴. گزینه‌ی ۳.

$$y' = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱, x = ۱ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow (۱,-۱), x = -۱ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow (-۱, ۳)$$
$$\frac{y-y_۱}{x-x_۱} = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \Rightarrow \frac{y+۱}{x-۱} = \frac{۳+۱}{-۱-۱} \Rightarrow ۴x - ۴ = -۲y - ۲ \Rightarrow y = -۲x + ۱$$

۵۵. گزینه‌ی ۱.

$$f'(x) = -\frac{۴}{x^۲} + \frac{۱}{۴} = ۰ \Longrightarrow x^۲ = ۱۶ \Longrightarrow x = \pm ۴$$
$$f''(x) = \frac{۸}{x^۳} \Longrightarrow f''(۴) > ۰ \Longrightarrow \min(۴, ۲), f''(-۴) < ۰ \Longrightarrow \max(-۴, -۲)$$

۵۶. گزینه‌ی ۱.

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۶x = ۰ \Longrightarrow ۴x(x^۲ - ۴) = ۰ \Longrightarrow x = ۰, ۲, -۲$$

x	-۱	۰	۲	۴
y	۹	۱۶	۰	۱۴۴

۵۷. گزینه‌ی ۱.

$$y' = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = ۰ \Longrightarrow e^x - e^{-x} = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \Longrightarrow y = ۱ \Longrightarrow (۰, ۱)$$
$$y'' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \Longrightarrow y''_{(۰)} = ۱ > ۰ \Longrightarrow \text{نوع نقطه } \min$$

۵۸. گزینه‌ی ۲.

$$y' = \frac{-۲x}{۱-x^۲} = ۰ \Longrightarrow x = ۰$$

x	-۱		۰		۱
y'	∞	$+$	۰	$-$	∞
y		$\nearrow$	max	$\searrow$	

۵۹. گزینه‌ی ۳.

$$y' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \Longrightarrow y' > ۰ \Longrightarrow \text{فاقد max و min}$$

$$y'' = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = ۰ \Longrightarrow e^x - e^{-x} = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \Longrightarrow (۰,۰)$$

$$(x < ۰ \Longrightarrow f''(x) < ۰, x > ۰ \Longrightarrow f''(x) > ۰) \Longrightarrow (۰,۰) \text{ نقطه عطف}$$

۶۰. گزینه‌ی ۴. اکیداً صعودی است، پس حداکثر آن در $x = ۵$ خواهد بود یعنی:

$$y = ۲^x = ۲^۵ = ۳۲$$

۶۱. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{x} - ۱ + x - ۱ = \frac{(x-۱)^۲}{x} \Longrightarrow \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲} = ۰ \Longrightarrow x = \pm ۱$$

$(۱,۰)$ نقطه عطف منحنی است زیرا به‌ازای آن $y' = ۰$ و y'' تغییر علامت می‌دهد.

۶۲. گزینه‌ی ۳. اگر منحنی را با $y = -۹$ تقاطع دهیم باید $\Delta = ۰$ باشد. در نتیجه:

$$\frac{x^۲ - ax - ۵}{x^۲ - ax + ۵} = -۹ \Longrightarrow x^۲ - ax + ۴ = ۰ \Longrightarrow \Delta = ۰ \Longrightarrow a^۲ - ۱۶ = ۰ \Longrightarrow a = \pm ۴$$

۶۳. گزینه‌ی ۲.

$$y = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۱۲ - ۴}{۴} = ۲$$

۶۴. گزینه‌ی ۱.

$$\text{max یا min} : M(۲,۱) \Rightarrow \begin{cases} y = x^۳ - ax^۲ + b - ۲ \\ y' = ۳x^۲ - ۲ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱ = ۸ - ۴a + b - ۲ \\ ۰ = ۱۲ - ۴a \end{cases} \Rightarrow a = ۳, b = ۷$$

$$c : y = x^۳ - ۳x^۲ + ۵, x = -\frac{b}{۳a} = -\frac{-۳}{۳} = ۱ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow \omega(۱,۳)$$

۶۵. گزینه‌ی ۳.

$$y' = ۳x^۲ + ۲px \Longrightarrow \begin{cases} f(۲) = ۰ \Longrightarrow ۸ + ۴p + q = ۰ \\ f'(۲) = ۰ \Longrightarrow ۱۲ + ۴p = ۰ \end{cases} \Longrightarrow p = -۳, q = ۴$$

۶۶. گزینه‌ی ۴. برای مثال تابع $y = x^۳$ را بررسی می‌کنیم، $f'(۰) = f''(۰) = ۰$ و تابع در $x = ۰$ نه max و نه min دارد ولی گزینه (۳) صحیح نیست زیرا $f(x) = x^۴$ و $f'(۰) = f''(۰) = ۰$ و تابع در $x = ۰$ مینیمم نسبی دارد.

۶۷. گزینه‌ی ۱.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{۲t+۲}{۲t} = ۰ \Longrightarrow ۲t+۲ = ۰ \Longrightarrow t = -۱ \Longrightarrow x = ۱, y = -۱$$

$$\text{فرض : } z = \frac{۲t+۲}{۲t} \Longrightarrow z'_x = \frac{z'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-۴}{۴t^۲}}{۲t} = \frac{-۴}{۸t^۳} \xrightarrow{t=-۱} z'_x > ۰$$

۶۸. گزینه‌ی ۳.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{-t} - te^{-t}}{e^t + te^t} = \frac{۱-t}{۱+t}.e^{-۲t}, \text{ فرض : } z = \frac{۱-t}{۱+t}.e^{-۲t}$$

$$z'_x = \frac{z'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-۲}{(۱+t)^۲}.e^{-۲t} - ۲ \times \frac{۱-t}{۱+t} \times e^{-۲t}}{e^t + te^t} = \frac{e^{-۲t}}{e^t + te^t}\left(\frac{-۴+۲t^۲}{(۱+t)^۲}\right) = ۰$$

$$\Longrightarrow e^{-۲t} > ۰, -۴+۲t^۲ = ۰ \Longrightarrow t = \pm\sqrt{۲} \Longrightarrow x = \sqrt{۲}e^{\sqrt{۲}}$$

۶۹. گزینه‌ی ۲.

$$y' = e^x - e^{-x} \Longrightarrow e^x - e^{-x} = ۰ \Longrightarrow e^x = e^{-x} \Longrightarrow x = ۰ \Longrightarrow y = ۲$$

$$y'' = e^x + e^{-x} \Longrightarrow y''_{(۰)} = ۲ > ۰ \Longrightarrow \min(۰, ۲)$$

۷۰. گزینه‌ی ۴. چون تابع در a تعریف شده و مشتق آن صفر است پس نقطه به‌طول a یا اکسترمم یا عطف است اما $f''(a) \neq ۰$ پس نقطه‌ی عطف نیست و چون $f''(a) > ۰$ است، تقعر منحنی به سمت بالا می‌باشد پس در این نقطه تابع می‌نیمی برابر $۴a$ دارد.

۷۱. گزینه‌ی ۴.

$$y' = x - \frac{۱}{x} \Longrightarrow y'' = ۱ + \frac{۱}{x^۲}$$

y'' به‌ازای هیچ مقداری از x برابر صفر نخواهد شد تا تغییر علامت دهد.

۷۲. گزینه‌ی ۴.

$$f'(x) = \frac{(x^۲-۹) - ۲x(x+۳)}{(x^۲-۹)^۲} = -\frac{(x+۳)^۲}{(x^۲-۹)^۲} = ۰ \Longrightarrow -(x+۳)^۲ = ۰ \Longrightarrow x = -۳$$

$D_f = \mathbb{R} - \{۳, -۳\}$، چون ۳− در دامنه تابع نیست، پس f هیچ عدد بحرانی ندارد.

۷۳. گزینه‌ی ۳. به‌ازای جمیع مقادیر x، $y'' > ۰$ بوده و در نتیجه تقعر منحنی به سمت بالاست.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Longrightarrow y'' = \frac{۱}{\sqrt{(۱+x^۲)^۳}}$$

۷۴. گزینه‌ی ۱.

$$y' = \frac{۲x(x^۲+۱) - ۲x(x^۲)}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۲x}{(x^۲+۱)^۲} = ۰ \Longrightarrow x = ۰$$

x		-۱		۰		۱	
y'	$-$	∞	$-$	۰	$+$	∞	$+$
y	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$

۷۵. گزینه‌ی ۲.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Longrightarrow x = \pm ۱$$

x	$-۱/۵$	-۱	۱	۲
y	$\frac{۹}{۸}$	۲	-۲	۲

۷۶. گزینه‌ی ۱. $f'(x) = mx^۲ - ۲x - ۴$، برای اینکه تابع نزولی باشد، بایستی $f'(x) \leqslant ۰$ بنابراین:

$$\begin{cases} \Delta' \leqslant ۰ \Longrightarrow ۱ + ۴m \leqslant ۰ \Longrightarrow m \leqslant -\frac{۱}{۴} \\ a < ۰ \Longrightarrow m < ۰ \Longrightarrow m < ۰ \end{cases} \Longrightarrow m \leqslant -\frac{۱}{۴}$$

۷۷. گزینه‌ی ۲. از $f' < ۰$ نتیجه می‌شود f اکیداً نزولی است و از $f'' < ۰$ نتیجه می‌شود که تقعر f به‌سوی پایین است که در میان نمودارهای داده شده فقط نمودار گزینه ۲ دارای این دو شرط است.

۷۸. گزینه‌ی ۱.

$$y^x = x^y \Longrightarrow \ln y^x = \ln x^y \Longrightarrow x \ln y = y \ln x \Longrightarrow \ln y + \frac{xy'}{y} = \frac{y}{x} + y' \ln x$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} \xrightarrow{x=y=۱} y' = \frac{۰ - ۱}{۰ - ۱} = ۱$$

۷۹. گزینه‌ی ۱.

$$y' = \ln x + ۱ \Longrightarrow y'_{(۱)} = \ln ۱ + ۱ = ۱ \Longrightarrow y - ۰ = ۱(x - ۱) \Longrightarrow y = x - ۱$$

تقاطع خط با محور طول‌ها : $۰ = x - ۱ \Longrightarrow x = ۱$

۸۰. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(۳/۱) - f(۳)}{۰/۱} = \frac{۰/۲}{۰/۱} = ۲$$

۸۱. گزینه‌ی ۱. $b < a \Longrightarrow \log_a^b < ۱$، ماکزیمم عبارت وقتی حاصل می‌شود که $\sin x$ حداقل مقدار را داشته باشد.

$$\min \sin x = -۱, \max \left(\log_a^b\right)^{\sin x} = \left(\log_a^b\right)^{-۱} = \frac{۱}{\log_a^b} = \log_b^a$$

۸۲. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos x \, dx}{-\sin x \, dx} = -\cot x$$

۸۳. گزینه‌ی ۱.

$$df = \frac{\frac{-۲x^۲}{۲\sqrt{۱-x^۲}} - \sqrt{۱-x^۲}}{\frac{x^۲}{۱+\frac{۱-x^۲}{x^۲}}} dx = \frac{\frac{-۲}{۲x^۲\sqrt{۱-x^۲}}}{\frac{۱}{x^۲}} dx = \frac{-dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

۸۴. گزینه‌ی ۲.

$$dx = -۰/۹۸ + ۱ = ۰/۰۲, dy = (۴x-۱)dx = (-۴-۱)(۰/۰۲) = -۰/۱$$

۸۵. گزینه‌ی ۴.

$$dy = \left(\frac{۲x}{x^۲} + \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) dx = \left(\frac{۲}{x} + \frac{۱}{۲x}\right) dx \Longrightarrow dy = \frac{۵dx}{۲x}$$

۸۶. گزینه‌ی ۱.

$$dy = \left(\frac{-۲x}{۱-x^۲} - \frac{۲x}{۱+x^۲}\right) dx \Longrightarrow dy = \frac{-۴x}{۱-x^۴} dx$$

$$d^۲y = \frac{-۴(۱-x^۴) + ۴x^۳(-۴x)}{(۱-x^۴)^۲} dx^۲ = \frac{-۱۲x^۴ - ۴}{(۱-x^۴)^۲} dx^۲ \Longrightarrow d^۲y = \frac{-۴(۳x^۲+۱)}{(۱-x^۴)^۲} dx^۲$$

۸۷. گزینه‌ی ۲.

$$dy = (۲x-۴)dx = (۲۰-۴)(۰/۱) = ۱/۶ \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{۱/۶}{۶۱} = ۰/۰۲۶$$

۸۸. گزینه‌ی ۳.

$$dy = \left(\frac{-x^۲+۱}{(۱+x^۲)^۲} + \frac{۱}{۱+x^۲}\right) dx = \frac{۲dx}{(۱+x^۲)^۲}$$

۸۹. گزینه‌ی ۲.

$$y = \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x \Longrightarrow dy = dx$$

۹۰. گزینه‌ی ۳. نقاط بحرانی را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{۲}{۳}(x+۱)^{-۱/۳} = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)}}$$

مشتق تابع صفر نمی‌شود ولی به‌ازای ریشه مخرج، مشتق وجود ندارد.

$$x + ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -۱$$

پس $x = -۱$ نقطه بحرانی تابع است.

x	-۲	-۱	۱
y	۱	۰	$\sqrt[۳]{۴}$

مدیریت

۱. در تابع $y = x^۲ - ۲x + ۱$، اگر x به‌اندازه $h = ۰/۱$ نمو کند، در $x = ۰$ نمو y کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) $-۰/۱۹$ ۲) $-۰/۱۸$ ۳) $۰/۲۰$ ۴) $۰/۲۱$

۲. دیفرانسیل تابع $y = e^{x^۲ - x}$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) صفر ۲) $۲dx$ ۳) $۳dx$ ۴) dx

۳. مشتق تابع $y = xe^{x-۱}$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴. مماس بر منحنی $y = \ln(x - ۱)$ در نقطه $x = ۲$ محور عرض‌ها را در چه عرضی قطع می‌کند؟ [۱۳۷۰]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۵. مختصات ماکزیمم یا مینیمم تابع $y = \frac{-x}{x^۲ - ۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) صفر ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) فاقد ماکزیمم و مینیمم

۶. طول نقطه عطف تابع $y = xe^{-x}$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) $x = -۲$ ۲) $x = ۲$ ۳) $x = ۱$ ۴) $x = -۱$

۷. مقدار مشتق تابع $y = \ln\left(\frac{x}{x^۲ + ۱}\right)$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\ln \frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۰

۸. مشتق تابع $y = x^x$ در نقطه $x = ۲$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $۴(\ln ۲ + ۱)$ ۴) $۲(\ln ۲ + ۱)$

۹. در تابع $y = ۲x^۲ + ۳x + ۱$ در نقطه $x = ۱$ به‌ازای $\Delta x = ۰/۱$ مقدار Δy کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $۰/۷۴$ ۲) $۰/۷$ ۳) $۰/۷۲$ ۴) $۰/۷۶$

۱۰. در تابع $y = ۲x^۲ + ۳x + ۱$ دیفرانسیل y در نقطه $x = ۱$ به‌ازای $dx = ۰/۱$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $۰/۷۱$ ۲) $۰/۷۲$ ۳) $۰/۶۹$ ۴) $۰/۷$

۱۱. مقدار $\frac{dy}{dx}$ در رابطه $x^۲ + ۵xy - ۴y^۲ - ۲x + ۲y - ۲ = ۰$ در نقطه $x = y = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۲. معادله مماس بر منحنی $y = x\ln x$ در نقطه $(۱, ۰)$ محور طول‌ها را در چه طولی قطع می‌کند؟ [۱۳۷۱]

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۳. در تابع $y = \frac{x}{x+۱}$ طول نقطه‌ی عطف کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) فاقد نقطه عطف

۱۴. طول نقطه ماکزیمم یا مینیمم $y = e^x - ۳$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) فاقد نقطه بحرانی ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۲

۱۵. طول نقطه بحرانی تابع $y = x^۴ - ۳۲x$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۲ ماکزیمم ۲) ۲ مینیمم ۳) ۴ ماکزیمم ۴) ۴ مینیمم

۱۶. شیب خط مماس بر منحنی $y = e^{۲x} + ۲x + ۵$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۷. مشتق تابع $y = (x+۱)^x$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱ ۲) $\ln ۲ + \frac{۱}{۲}$ ۳) $۲\ln ۲ + ۱$ ۴) ۲

۱۸. طول مینیمم تابع $y = x\ln x$ برابر است با: [۱۳۷۲]

۱) $\frac{۱}{e}$ ۲) $-\frac{۱}{e}$ ۳) e ۴) $-e$

۱۹. طول نقطه عطف منحنی $y = x^۳ + ۵x + ۲$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) فاقد نقطه عطف ۴) ۲

۲۰. دیفرانسیل تابع $y = x^۲ + ۲x - ۱$ در نقطه $x = ۰$ به‌ازای $dx = ۰/۱$ برابر است با: [۱۳۷۲]

۱) ۰ ۲) $۰/۲$ ۳) $-۰/۱$ ۴) $۰/۱$

۲۱. اگر $y = \sqrt{u^۲ + ۲u}$ و $u = (x^۲ - ۱)^۳$ باشند، $y''_{x^۲}$ در $x = ۱$ چقدر است؟ [۱۳۷۳]

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

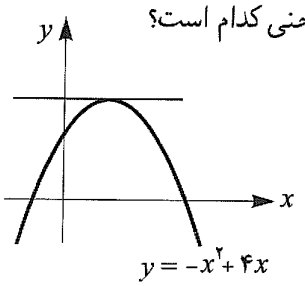
۲۲. اگر $y = ۲x^۳ - ۲x^۲ + ۱$ باشد، مشتق x'_y در نقطه $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳. مشتق مرتبه nام تابع $y = e^{۲x}$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲^n

۲۴. با توجه به شکل، معادله خط مماس بر منحنی کدام است؟ [۱۳۷۳]



۱) $y = ۴$
۲) $y = ۳$
۳) $y = ۲$
۴) $y = ۱$

۲۵. اگر $y = -x^۲ + ۴x$ باشد، در $x = ۱$ مقدار دیفرانسیل y در صورتی که $dx = ۰/۱$ باشد، کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۲۶. تابع $y = \frac{x+۱}{x-۱}$ را درنظر بگیرید، این تابع در فاصله $[۲, ۱)$ چگونه است؟ [۱۳۷۳]

۱) مقعر، صعودی ۲) مقعر، نزولی ۳) محدب، نزولی ۴) محدب، صعودی

۲۷. طول نقطه عطف $y = x \ln x - \frac{۲}{x}$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) صفر ۲) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۳) ± ۱ ۴) ± ۲

۲۸. از رابطه $x^۲ + y^۲ - ۲xy = y - x$ مقدار y' در نقطه $x = y = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۲ ۴) ۱

۲۹. تابع $y = xe^x$ درکدام فاصله صعودی است؟ [۱۳۷۴]

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $(-۱, +\infty)$ ۴) $(-\infty, -۱)$

۳۰. طول نقطه مینیمم تابع $y = xe^{۲x}$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۱. طول نقطه ماکزیمم تابع $y = x^۳ - ۹x$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۳۲. در تابع $y = \ln(x+۱)$ مقدار y'' به‌ازای $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۳۳. مشتق تابع $y = x^{x+۲}$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۱

۳۴. تابع $y = e^x - ۲x$ در فاصله بسته $[۰, ۱]$ چگونه است؟ [۱۳۷۵]

۱) مقعر ۲) محدب

۳) ابتدا محدب و سپس مقعر ۴) ابتدا مقعر و سپس محدب

۳۵. درباره تابع $y = x \ln x$ کدام گزاره صحیح است؟ [۱۳۷۵]

۱) $\min(e, -e)$ ۲) $\min(e^{-۱}, -e^{-۱})$ ۳) $\max(e, -e)$ ۴) $\max(e^{-۱}, -e^{-۱})$

۳۶. مشتق مرتبه پنجم $y = e^{۲x}$ در $x = ۰$ برابر است با: [۱۳۷۶]

۱) ۱ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۳۲

۳۷. اگر $y = \frac{x}{۱+x}$ باشد، مقدار dy به‌ازای $\Delta x = ۰/۴$ در $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۳۸. تابع f به معادله $y = x^۳ + ۱$ از نظر تحدب و تقعر چگونه است؟ [۱۳۷۶]

۱) ابتدا محدب و سپس مقعر ۲) ابتدا مقعر و سپس محدب

۳) همواره مقعر ۴) همواره محدب

۳۹. کدام یک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی نزولی است؟ [۱۳۷۶]

۱) $f(x) = x \sin x$
۲) $f(x) = x - \sin x$
۳) $f(x) = -x + \sin x$
۴) $f(x) = -x + ۲ \sin x$

۴۰. طول نقطه مینیمم تابع $y = xe^{۲x}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۴۱. اگر f به معادله $y + x^۲ + xy^۲ + y^۲ - ۴x = ۰$ باشد، y'_x در $(۱, ۱)$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $-\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴۲. مشتق مرتبه هشتم $y = \frac{x+۱}{x}$ در $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) صفر ۲) $۸!$ ۳) $(-۱)۸!$ ۴) ۴۰۹۶

۴۳. در تابعی به معادله $y = x^۲ + x$ به‌ازای $x = ۱$ و $\Delta x = ۰/۱$، مقدار dy کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $۰/۱$ ۲) $۰/۲$ ۳) $۰/۳$ ۴) $۰/۴$

۴۴. تابعی به معادله $y = \ln(x^۲ + ۱)$ در فاصله $[۰, ۱)$ چه وضعیتی دارد؟ [۱۳۷۷]

۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی
۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی
۳) همواره صعودی
۴) همواره نزولی

۴۵. در تابعی به معادله $f(x) = ۲x + ۵e^{۲x}$، در صورتی که x، یک واحد تغییر کند، مقدار f در نقطه $x = ۰$ چه مقدار تغییر خواهد کرد؟ [۱۳۷۸]

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۶. از رابطه $x^۲ + xy + y^۲ - ۲x \ln y - ۲y \ln x - ۳ = ۰$، مقدار y'_x به‌ازای $x = y = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۷. اگر f به معادله $y = \frac{\ln x - x}{e^{۲x}}$ باشد، مقدار $\frac{dx}{dy}$ در $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $\frac{۱}{۲}e^{-۲}$ ۲) $۲e^{-۲}$ ۳) $۲e^{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}e^{۲}$

۴۸. بیشترین مقدار تابع $y = e^x + ۲x$ در فاصله $[-۱, ۱]$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $-\ln ۲$ ۴) $e + ۲$

۴۹. کدام مورد برای تقعر منحنی به معادله، $y = x^۳ + x$، در فاصله $[-۲, ۲]$ صحیح است؟ [۱۳۷۸]

۱) ابتدا مقعر سپس محدب
۲) ابتدا محدب سپس مقعر
۳) همواره محدب
۴) همواره مقعر

۵۰. اگر $y = xe^{۲x}$ باشد، مشتق مرتبه nام این تابع به‌ازای $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) ۲^n ۲) $n \cdot ۲^{n-۱}$ ۳) $n \cdot ۲^n$ ۴) صفر

۵۱. طول نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع $y = \frac{e^{۲x}}{x}$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $x = ۳$ ۲) $x = ۲$ ۳) $x = \frac{۱}{۲}$ ۴) $x = \frac{۱}{۳}$

۵۲. مشتق تابع $y = x^{(-x^۲)}$ عبارت است از: ۱۳۷۹

۱) $y' = -x^{-x^۲+۱}(۱ + \ln x^۲)$
۲) $y' = x^{-x^۲-۱}$
۳) $y' = x^{-x^۲-۱}(-۲x)$
۴) $y' = -x(x \ln x + ۱)$

۵۳. مشتق مرتبه دهم تابع $f(x) = \ln(۱ + x)$ در $x = ۰$ کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) $-۱۰!$ ۲) $-۹!$ ۳) $۹!$ ۴) $۱۰!$

۵۴. مشتق تابع $f(x) = |x| + ۵$ در $x = ۰$ کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) فاقد مشتق است

۵۵. در دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم تابع با ضابطه‌ی $y = xe^x$ در نقطه $x = ۱$، در صورت $\Delta x = ۰/۱$، برابر است با: ۱۳۸۰

۱) $۰/۰۲e$ ۲) $۰/۰۱e$ ۳) $۰/۰۳e$ ۴) $۰/۱e$

۵۶. تابع با ضابطه‌ی $y = xe^x$ در فاصله $[-۳, ۳]$ چگونه است؟ ۱۳۸۰

۱) اکیداً محدب
۲) اکیداً مقعر
۳) ابتدا محدب، سپس مقعر
۴) ابتدا مقعر، سپس محدب

۵۷. طول نقطه عطف تابع $y = xe^x$ کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۸. شیب خط مماس بر منحنی $x^۵ + y^۵ = ۲xy$ در نقطه $(x, y) = (۱, ۱)$ برابر است با: ۱۳۸۱

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۵۹. طول نقطه عطف تابع $y = \ln(x^۲ + ۱)$ برابر است با: ۱۳۸۱

۱) $x = -۱$ و $x = ۱$
۲) $x = -۲$ و $x = ۲$
۳) $x = -۳$ و $x = ۳$
۴) $x = -۴$ و $x = ۴$

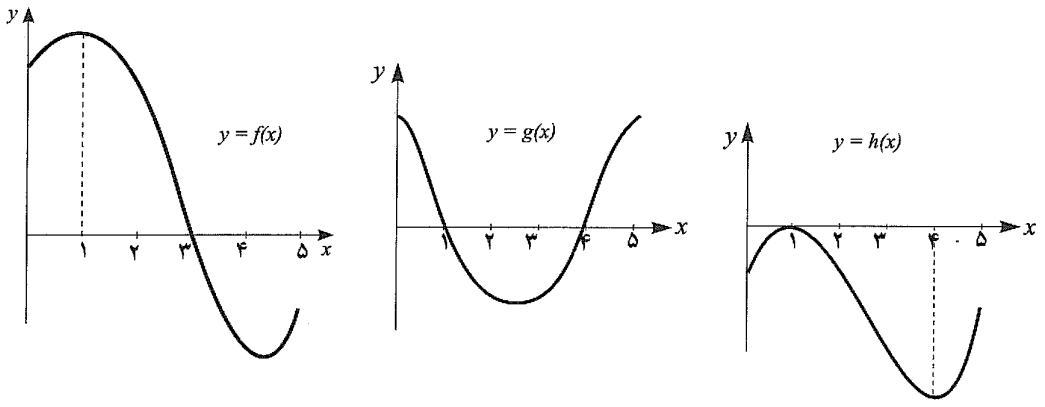
۶۰. اگر داشته باشیم $y = (x + ۱)^{۲x}$، مقدار dy در $x = ۱$ برابر است با: ۱۳۸۱

۱) $e^۲dx$
۲) $۲(\ln ۲ + ۱)dx$
۳) $۴dx$
۴) $۴(۲ \ln ۲ + ۱)dx$

۶۱. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ۳ - x & x \leqslant ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱ & x > ۲ \end{cases}$ در نقطه $x = ۲$ چگونه است؟ ۱۳۸۲

۱) ناپیوسته ۲) فاقد حد ۳) مشتق‌پذیر ۴) مشتق‌ناپذیر

۶۲. با توجه به نمودارهای زیر، کدام عبارت درست است؟ ۱۳۸۲

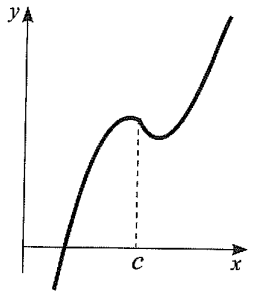


۱) h مشتق f است.
۲) h مشتق g است.
۳) f مشتق g است.
۴) g مشتق f است.

۶۳. اگر داشته باشیم $y = \ln(1+x)$، مشتق nام این تابع در $x = 0$ کدام است؟ ۱۳۸۲

۱) صفر
۲) ۱
۳) $(-1)^n \cdot n!$
۴) $(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$

۶۴. شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ است، در همسایگی $x = c$ کدام بیان برای مشتق‌های مرتبه‌ی اول و دوم صحیح است؟ ۱۳۸۲



۱) برای $x < c$ داریم $f' > 0$ و $f'' < 0$ و $f'(c)$ موجود نیست.
۲) برای $x < c$ داریم $f' < 0$ و $f'' < 0$ و $f'(c)$ موجود است.
۳) برای $x > c$ داریم $f' > 0$ و $f'' > 0$ و $f'(c)$ موجود نیست.
۴) برای $x > c$ داریم $f' < 0$ و $f'' < 0$ و $f'(c)$ موجود است.

۶۵. تابع ضمنی حقیقی به معادله‌ی $e^x + e^y - xe^{2x} - e^{2y} - 1 = 0$ مفروض است، y'_x در نقطه $(0,0)$ برابر است؟ ۱۳۸۲

۱) صفر
۲) -2
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $-\frac{1}{3}$

۶۶. اگر داشته باشیم $y = u^2 + 4$ و $u = \frac{x+3}{x}$ و $x = \frac{1}{t} - t + 3$، در این صورت y'_t در $t = 1$ برابر است با: ۱۳۸۳

۱) $\frac{14}{9}$
۲) $\frac{5}{3}$
۳) $\frac{8}{3}$
۴) $\frac{7}{3}$

۶۷. اگر داشته باشیم $y_1 = e^x$ و $y_2 = x + 1$، $x \in \mathbb{R}$، کدام رابطه صحیح است؟ ۱۳۸۳

۱) $y_1 > y_2$
۲) $y_1 \geqslant y_2$
۳) $y_1 < y_2$
۴) $y_1 \leqslant y_2$

۶۸. طول نقطه عطف $y = x^2 e^x$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $-4 \pm \sqrt{2}$
۲) $-2 \pm \sqrt{2}$
۳) $-1 \pm \sqrt{2}$
۴) $2 \pm \sqrt{2}$

۶۹. مشتق عبارت $(x-2)\sqrt[3]{x^2}$ به‌ازای $x = -1$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۳

۷۰. معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{-2x}$ در نقطه‌ای به طول صفر واقع بر آن کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $y + 2x = 1$
۲) $y - 2x = 1$
۳) $2y + x = 2$
۴) $2y - x = 2$

۷۱. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$ در کدام بازه نزولی است؟ ۱۳۸۴

۱) $(-1,1)$
۲) $(0,1)$
۳) $(0,e)$
۴) $(1,e)$

۷۲. طول نقطه عطف نمودار تابع $f(x) = \ln(x^2+4)$ با علامت مثبت کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $\sqrt{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

۷۳. از رابطه $x^۲ + ۲y^۲ - ۳xy + ۴x = ۸$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(۲, ۱)$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) -۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۱.

$$\Delta y \approx f(x+h) - f(x) = f(۰/۱) - f(۰)$$
$$\Delta y \approx ۰/۰۱ - ۰/۲ + ۱ - ۱ = ۰/۱۹$$

۲. گزینه‌ی ۴.

$$dy = (۲x-۱)e^{x^۲-x}dx \xrightarrow{x=۱} dy = (۲-۱)e^{۱-۱}.dx \Longrightarrow dy = dx$$

۳. گزینه‌ی ۳.

$$y' = e^{x-۱} + xe^{x-۱} \Longrightarrow y'_{(۱)} = e^{۰} + e^{۰} = ۲$$

۴. گزینه‌ی ۴.

$$y' = \frac{۱}{x-۱} \Longrightarrow y'_{(۲)} = m = \frac{۱}{۲-۱} = ۱, x = ۲ \Longrightarrow y = \ln(۲-۱) = ۰$$
$$\Longrightarrow (۲, ۰) : y - ۰ = ۱(x-۲) \Longrightarrow y = x - ۲ \longrightarrow y = ۰ - ۲ = -۲$$

۵. گزینه‌ی ۴.

$$y' = \frac{-x^۲ + ۱ + ۲x^۲}{(x^۲-۱)^۲} = \frac{x^۲+۱}{(x^۲-۱)^۲} \Longrightarrow y' > ۰ \Longrightarrow$$ تابع همواره صعودی و فاقد اکسترمم

۶. گزینه‌ی ۲.

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} \Longrightarrow y'' = -e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x} - ۲e^{-x}$$
$$y'' = ۰ \Longrightarrow e^{-x}(x-۲) = ۰ \Longrightarrow e^{-x} > ۰, x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۲$$

۷. گزینه‌ی ۴.

$$y = \ln x - \ln(x^۲+۱) \Longrightarrow y' = \frac{۱}{x} - \frac{۲x}{x^۲+۱} = \frac{۱-x^۲}{x(x^۲+۱)} \Longrightarrow y'_{(۱)} = \frac{۱-۱}{(۱+۱)} = ۰$$

۸. گزینه‌ی ۳.

$$y' = x^x \left(\ln x + x.\frac{۱}{x}\right) = x^x(\ln x + ۱) \Longrightarrow y'_{(۲)} = ۲^۲(\ln ۲ + ۱) = ۴(\ln ۲ + ۱)$$

۹. گزینه‌ی ۳.

$$\Delta y \approx f(x+\Delta x) - f(x) = f(۱/۱) - f(۱)$$
$$\Delta y \approx ۲(۱/۱)^۲ + ۳(۱/۱) + ۱ - (۲+۳+۱) = ۰/۷۲$$

۱۰. گزینه‌ی ۴.

$$dy = (۴x + ۳)dx = [(۴(۱) + ۳](۰/۱) = ۰/۷$$

۱۱. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۲x + ۵y - ۲}{۵x - ۸y + ۲} \xrightarrow{x=y=۱} \frac{dy}{dx} = -\frac{۲ + ۵ - ۲}{۵ - ۸ + ۲} = ۵$$

۱۲. گزینه‌ی ۳.

$$y' = \ln x + ۱ \Longrightarrow y'_{(۱)} = m = ۰ + ۱ = ۱$$

$$y - ۰ = ۱(x - ۱) \Longrightarrow y = x - ۱, \text{ محور طول‌ها} \xrightarrow{y=۰} ۰ = x - ۱ \Longrightarrow x = ۱$$

۱۳. گزینه‌ی ۴.

$$y' = \frac{(x + ۱) - x}{(x + ۱)^۲} = \frac{۱}{(x + ۱)^۲} \Longrightarrow y'' = \frac{-۲(x + ۱)}{(x + ۱)^۴} = \frac{-۲}{(x + ۱)^۳}$$

y'' به‌ازای هیچ مقداری از x برابر صفر نخواهد شد تا تغییر علامت دهد.

۱۴. گزینه‌ی ۱.

$$y' = e^x - ۰ \Longrightarrow y' = e^x > ۰ \Longrightarrow \text{همواره صعودی و فاقد نقطه بحرانی}$$

۱۵. گزینه‌ی ۲.

$$y' = ۴x^۳ - ۳۲ \Longrightarrow ۴x^۳ - ۳۲ = ۰ \Longrightarrow x^۳ = ۸ \Longrightarrow x = ۲$$

$$y'' = ۱۲x^۲ \Longrightarrow y''_{(۲)} = ۱۲(۲)^۲ = ۴۸ > ۰ \Longrightarrow \text{نقطه min}$$

۱۶. گزینه‌ی ۴.

$$y' = ۲e^{۲x} + ۲ \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = y'_{(۰)} = ۲e^۰ + ۲ = ۴$$

۱۷. گزینه‌ی ۳.

$$y' = (x + ۱)^x \left(\ln(x + ۱) + x.\frac{۱}{x + ۱}\right) \Longrightarrow y'_{(۱)} = ۲ \left(\ln ۲ + \frac{۱}{۲}\right) = ۲\ln ۲ + ۱$$

۱۸. گزینه‌ی ۱.

$$y' = \ln x + ۱ \Longrightarrow \ln x + ۱ = ۰ \Longrightarrow \ln x = -۱ \Longrightarrow x = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

۱۹. گزینه‌ی ۳. توابع درجه دوم فاقد نقطه عطف‌اند.

۲۰. گزینه‌ی ۲.

$$dy = (۲x + ۲).dx \xrightarrow[dx=۰/۱]{x=۰} dy = (۰ + ۲)(۰/۱) = ۰/۲$$

۲۱. گزینه‌ی ۱.

۲۲. گزینه‌ی ۲.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = ۶x^۲ - ۴x \Longrightarrow x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{۱}{۶x^۲ - ۴x} \Longrightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=۱} = \frac{۱}{۲}$$

یا

$$۲x^۳ - ۲x^۲ + ۱ - y = ۰ \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{-۱}{۶x^۲ - ۴x} \Longrightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=۱} = \frac{۱}{۲}$$

۲۳. گزینه‌ی ۴.

$$y' = ۲e^{۲x} \Longrightarrow y'' = ۲^۲e^{۲x} \Longrightarrow y''' = ۲^۳e^{۲x} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow y^{(n)} = ۲^n e^{۲x} \Longrightarrow y^{(n)}_{(۰)} = ۲^n$$

۲۴. گزینه‌ی ۱.

$$\text{خط مماس} = y_{\max} = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۰ - ۱۶}{-۴} \Longrightarrow y = ۴$$

۲۵. گزینه‌ی ۲.

$$dy = (-۲x + ۴)dx \xrightarrow[dx=۰/۱]{x=۱} dy = (-۲ + ۴)(۰/۱) = ۰/۲$$

۲۶. گزینه‌ی ۳.

$$y' = \frac{x - ۱ - x - ۱}{(x-۱)^۲} = \frac{-۲}{(x-۱)^۲} < ۰ \Longrightarrow \text{تابع همواره نزولی}$$

$$y'' = \frac{۴(x-۱)}{(x-۱)^۴} = \frac{۴}{(x-۱)^۳} \Longrightarrow \quad \text{تابع محدب است} \Longrightarrow (x-۱)^۳ \text{ در فاصله } [۱, ۲) \text{ همواره مثبت}$$

۲۷. گزینه‌ی ۴.

$$y' = \ln x + ۱ + \frac{۲}{x^۲} \Longrightarrow y'' = \frac{۱}{x} - \frac{۴}{x^۳} = \frac{x^۲ - ۴}{x^۳} = ۰ \Longrightarrow x = \pm ۲$$

۲۸. گزینه‌ی ۴.

$$x^۲ + y^۲ - ۲xy - y + x = ۰, y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x - ۲y + ۱}{۲y - ۲x - ۱} \xrightarrow{x=y=۱} y' = ۱$$

۲۹. گزینه‌ی ۳.

$$y' = e^x + xe^x \Longrightarrow e^x(۱ + x) = ۰ \Longrightarrow e^x > ۰, x = -۱$$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	

$\Longrightarrow$ در $(-\infty, -۱)$ صعودی است

۳۰. گزینه‌ی ۱.

$$y' = e^{۲x} + ۲xe^{۲x} \Longrightarrow e^{۲x}(۱ + ۲x) = ۰ \Longrightarrow e^{۲x} \neq ۰, ۱ + ۲x = ۰ \Longrightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

۳۱. گزینه‌ی ۴.

$$y' = ۳x^۲ - ۹ \Longrightarrow ۳x^۲ - ۹ = ۰ \Longrightarrow x^۲ = ۳ \Longrightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

$$y'' = ۶x \Longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \Longrightarrow y'' = ۶\sqrt{۳} > ۰ & \text{طول نقطه min} \\ x = -\sqrt{۳} \Longrightarrow y'' = -۶\sqrt{۳} < ۰ & \text{طول نقطه max} \end{cases}$$

۳۲. گزینه‌ی ۱.

$$y' = \frac{۱}{x+۱} \Longrightarrow y'' = \frac{-۱}{(x+۱)^۲} \Longrightarrow y''_{(۰)} = \frac{-۱}{(۰+۱)^۲} = -۱$$

۳۳. گزینه‌ی ۱.

$$y' = x^{x+۲}\left(\ln x + (x+۲).\frac{۱}{x}\right) \Longrightarrow y'_{(۱)} = \left(\ln ۱ + \frac{۳}{۱}\right) = ۰ + ۳ = ۳$$

۳۴. گزینه‌ی ۲.

$$y' = e^x - ۲ \Longrightarrow y'' = e^x > ۰ \Longrightarrow \text{تابع محدب است}$$

۳۵. گزینه‌ی ۲.

$$y' = \ln x + ۱ \Longrightarrow \ln x + ۱ = ۰ \Longrightarrow \ln x = -۱ \Longrightarrow x = e^{-۱}$$

$$y'' = \frac{۱}{x} \xrightarrow{x=e^{-۱}} y'' = \frac{۱}{\frac{۱}{e}} = e > ۰ \Longrightarrow \min$$

$$y = e^{-۱}\ln e^{-۱} = -e^{-۱} \Longrightarrow \min(e^{-۱}, -e^{-۱})$$

۳۶. گزینه‌ی ۴.

$$y = e^{۲x} \Longrightarrow y' = ۲e^{۲x} \Longrightarrow y'' = ۲^۲e^{۲x} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow y^{(۵)} = ۲^۵e^{۲x} \Longrightarrow y^{(۵)}_{(۰)} = ۳۲$$

۳۷. گزینه‌ی ۱.

$$dy = \frac{۱+x-x}{(۱+x)^۲}.dx = \frac{dx}{(۱+x)^۲} \xrightarrow[\Delta x \approx dx = ۰/۴]{x=۱} dy = \frac{۰/۴}{۴} = ۰/۱$$

۳۸. گزینه‌ی ۲.

$$y' = ۳x^۲ \Longrightarrow y'' = ۶x \Longrightarrow ۶x = ۰ \Longrightarrow x = ۰$$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$
y	مقعر		محدب

۳۹. گزینه‌ی ۳.

$$f(x) = x\sin x \Longrightarrow f'(x) = \sin x + x\cos x \Longrightarrow \text{صعودی و نزولی}$$

$$f(x) = x - \sin x \Longrightarrow f'(x) = ۱ - \cos x \Longrightarrow ۰ \leqslant f'(x) \leqslant ۲ \Longrightarrow \text{صعودی}$$

$$f(x) = -x + \sin x \Longrightarrow f'(x) = -۱ + \cos x \Longrightarrow -۲ \leqslant f'(x) \leqslant ۰ \Longrightarrow \text{نزولی}$$

$$f(x) = -x + ۲\sin x \Longrightarrow f'(x) = -۱ + ۲\cos x \Longrightarrow -۳ \leqslant f'(x) \leqslant ۱ \Longrightarrow \text{صعودی و نزولی}$$

۴۰. گزینه‌ی ۲.

$$y = xe^{۲x} \Longrightarrow y' = e^{۲x} + ۲xe^x = ۰ \Longrightarrow (۱+۲x)e^{۲x} = ۰ \Longrightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

۴۱. گزینه‌ی ۳.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x + y^۲ - ۴}{۱ + ۲xy + ۲y} \xrightarrow{(۱,۱)} = -\frac{۲ + ۱ - ۴}{۱ + ۲ + ۲} = \frac{۱}{۵}$$

۴۲. گزینه‌ی ۲.

$$y^{(۸)}_x = \frac{(-۱)^۷ ۸!(۰ - ۱)}{(x)^۹} \Longrightarrow y^{(۸)}_{(۱)} = ۸!$$

۴۳. گزینه‌ی ۳.

$$dy = y'dx = (۲x + ۱)dx$$

به‌ازای $x = ۱$ و $\Delta x \approx = ۰/۱$ داریم:

$$dy = (۲ + ۱)(۰/۱) = ۰/۳$$

۴۴. گزینه‌ی ۳.

$$y = \ln(x^۲ + ۱) \Longrightarrow y' = \frac{۲x}{x^۲ + ۱} \xrightarrow{۰ < x \leqslant ۱} y' > ۰ \Longrightarrow \text{همواره صعودی}$$

۴۵. گزینه‌ی ۴.

$$dx = ۱, x = ۰$$
$$dy = f'(x)dx = (۲ + ۱۰e^{۲x})dx = (۲ + ۱۰e^{۰})(۱) \Longrightarrow dy = ۱۲$$

۴۶. گزینه‌ی ۲.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x + y - ۲\ln y - \frac{۲y}{x}}{x + ۲y - \frac{۲x}{y} - ۲\ln x} \xrightarrow{x=y=۱} y'_x = -\frac{۲ + ۱ - ۰ - \frac{۲}{۱}}{۱ + ۲ - \frac{۲}{۱} - ۰} = -۱$$

۴۷. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{۱}{x} - ۱\right)e^{۲x} - ۲e^{۲x}(\ln x - x)}{e^{۴x}} \xrightarrow{x=۱} \frac{dy}{dx} = \frac{۰ - ۲e^۲(۰ - ۱)}{e^۴} = \frac{۲e^۲}{e^۴} = \frac{۲}{e^۲}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{dy/dx} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{۲}{e^۲}} = \frac{۱}{۲}e^۲$$

۴۸. گزینه‌ی ۴.

$$y' = e^x + ۲ > ۰$$
$$y = f(۱) = e + ۲, y = f(-۱) = e^{-۱} - ۲ = \frac{۱}{e} - ۲$$

۴۹. گزینه‌ی ۱.

$$y' = ۳x^۲ + ۱ \Longrightarrow y'' = ۶x = ۰ \Longrightarrow x = ۰$$

x	$-\infty$		$\circ$		$+\infty$
y''		$-$	$\circ$	$+$	
y		مقعر		محدب	

۵۰. گزینه‌ی ۲.

$$y' = e^{۲x} + ۲xe^{۲x} = e^{۲x}(۱ + ۲x)$$
$$y'' = ۲e^{۲x}(۱ + ۲x) + ۲e^{۲x} = ۲e^{۲x}(۲ + ۲x)$$
$$y''' = ۴e^{۲x}(۲ + ۲x) + ۴e^{۲x} = ۴e^{۲x}(۳ + ۲x)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}_{(x)} = ۲^{n-۱}e^{۲x}(n + ۲x) \Longrightarrow y^{(n)}_{(\circ)} = ۲^{n-۱}e^{\circ}(n + \circ) = n \cdot ۲^{n-۱}$$

راه حل دوم: مشتق تابع $y = xe^{۲x}$ را در نقطه $x = \circ$ به‌دست می‌آوریم:

$$y'_x = e^{۲x} + ۲xe^{۲x} \Longrightarrow y'_{(\circ)} = e^{\circ} + \circ \Longrightarrow y'_{(\circ)} = ۱$$

اکنون نگاه می‌کنیم درکدام گزینه به‌ازای $n = ۱$ حاصل مشتق برابر ۱ می‌شود که گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۵۱. گزینه‌ی ۳.

$$y' = \frac{۲xe^{۲x} - e^{۲x}}{x^{۲}} \Longrightarrow y' = \frac{e^{۲x}(۲x - ۱)}{x^{۲}}$$
$$y' = \circ \Longrightarrow e^{۲x}(۲x - ۱) = \circ \Longrightarrow e^{۲x} > \circ \ , \ ۲x - ۱ = \circ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

۵۲. گزینه‌ی ۱.

$$y' = x^{(-x^{۲})}\left[-۲x\ln x + (-x^{۲})\frac{۱}{x}\right] = x^{(-x^{۲})}(-۲x\ln x - x)$$
$$y' = -x^{(-x^{۲})}.x(۲\ln x + ۱) = -x^{-x^{۲}+۱}(\ln x^{۲} + ۱)$$

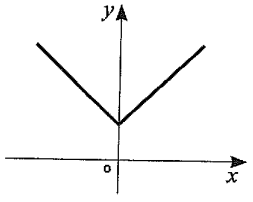
۵۳. گزینه‌ی ۲.

$$y' = \frac{۱}{۱ + x}$$

اگر از تابع فوق مشتق مرتبه‌ی نهم بگیریم، مشتق مرتبه‌ی دهم تابع $y = \ln(۱ + x)$ به دست می‌آید،

$$y^{(۹)}_x = \frac{(-۱)^{۸}۹!(\circ - ۱)}{(۱ + x)^{۱\circ}} \Longrightarrow y^{(۱\circ)}_{(\circ)} = \frac{-۹!}{۱} = -۹!$$

۵۴. گزینه‌ی ۴. زیرا تابع در نقطهٔ $x = \circ$، زاویه‌دار است.



۵۵. گزینه‌ی ۳.

$$dy = (e^x + xe^x)dx \Longrightarrow d^۲y = (e^x + e^x + xe^x)dx^۲$$
$$x = ۱, dx \approx \Delta x = ۰/۱ \Longrightarrow d^۲y = (e + e + e)(۰/۱)^۲ \Longrightarrow d^۲y = ۰/۰۳e$$

۵۶. گزینه‌ی ۴. با توجه به جدول زیر f در فاصله‌ی $[-۳, ۳]$ ابتدا مقعر و سپس محدب است.

$$y' = e^x + xe^x \Longrightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = e^x(x + ۲)$$
$$y'' = ۰ \Longrightarrow e^x(x + ۲) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} e^x > ۰ \\ x = -۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y''		$-$	۰	$+$	
y		مقعر		محدب	

۵۷. گزینه‌ی ۱.

$$y' = e^x + xe^x \Longrightarrow y'' = e^x(x + ۲)$$
$$y'' = ۰ \Longrightarrow e^x(x + ۲) = ۰ \Longrightarrow x = -۲$$

۵۸. گزینه‌ی ۲.

$$x^۵ + y^۵ - ۲xy = ۰ \Longrightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۵x^۴ - ۲y}{۵y^۴ - ۲x} \xrightarrow{(۱,۱)} m = -\frac{۵ - ۲}{۵ - ۲} = -۱$$

۵۹. گزینه‌ی ۱.

$$y = \ln(x^۲ + ۱) \Longrightarrow y' = \frac{۲x}{x^۲ + ۱} \Longrightarrow y'' = \frac{۲x^۲ + ۲ - ۴x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} = \frac{۲ - ۲x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲}$$
$$y'' = ۰ \Longrightarrow ۲ - ۲x^۲ = ۰ \Longrightarrow x^۲ = ۱ \Longrightarrow x = -۱, ۱$$

۶۰. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{dy}{dx} = (x + ۱)^{۲x}\left(۲\ln(x + ۱) + ۲x \cdot \frac{۱}{x + ۱}\right)$$
$$dy|_{x=۱} = (۲)^۲(۲\ln ۲ + \frac{۲}{۲})dx \Longrightarrow dy = ۴(۲\ln ۲ + ۱)dx$$

۶۱. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x \to ۲+} f(x) = \frac{۱}{۲}(۲)^۲ - ۱ = ۱ \ , \ \lim_{x \to ۲-} f(x) = ۳ - ۲ = ۱ \ , \ f(۲) = ۳ - ۲ = ۱$$

حد راست و حد چپ تابع در نقطه $x = ۲$ با هم برابرند، پس تابع حد دارد. و چون حد تابع با مقدار تابع برابر است، بنابراین تابع پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۲ \\ x & x > ۲ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(۲^+) = ۲ \\ f'(۲^-) = -۱ \end{cases}$$

چون مشتق راست و مشتق چپ در نقطه $x = ۲$ برابر نیستند، پس تابع مشتق‌ناپذیر است.

۶۲. گزینه‌ی ۴. نمودار تابع f در نقاط $x = ۱$ و $x = ۴$ دارای اکسترمم نسبی است. از طرفی می‌دانیم مشتق در نقاط اکسترمم برابر صفر است، بنابراین g مشتق f است.

۶۳. گزینه‌ی ۴.

$$y' = \ln(x+۱) \Longrightarrow y_x^{(n)} = \frac{(-۱)^{n-۱} \cdot (n-۱)!}{(x+۱)^n} \Longrightarrow y_{(۰)}^{(n)} = (-۱)^{n-۱} \cdot (n-۱)!$$

۶۴. گزینه‌ی ۱. با توجه به شکل، برای $x < c$ اولاً: شیب خطوط مماس بر منحنی مثبت است و بنابراین $f' > ۰$، ثانیاً: تقعر منحنی به طرف پایین است، پس $f'' < ۰$، ثالثاً: $f'(c)$ موجود نیست زیرا $f'(c^+)$ و $f'(c^-)$ با هم برابر نیستند.

۶۵. گزینه‌ی ۱.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{e^x - e^{۲x} - ۲xe^{۲x}}{e^y - ۲e^{۲y}} \xrightarrow{(۰,۰)} y' = -\frac{e^۰ - e^۰ - ۰}{e^۰ - ۲e^۰} = -\frac{۰}{-۱} = ۰$$

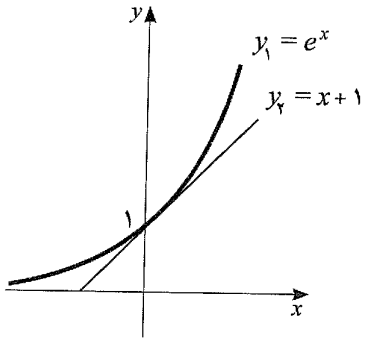
۶۶. گزینه‌ی ۳.

$$y'_t = y'_u.u'_x \cdot x'_t = ۲u \cdot \frac{x - x - ۳}{x^۲} \cdot -\frac{۱}{t^۲} - ۱ = ۲u \cdot \frac{-۳}{x^۲} \cdot -\frac{۱}{t^۲} - ۱$$

$$t = ۱ \Longrightarrow x = ۳ \Longrightarrow u = ۲ \Longrightarrow y = ۸$$

$$y'\Big|_{t=۱} = ۲(۲) \cdot \frac{-۳}{۹} \cdot -۲ = \frac{۸}{۳}$$

۶۷. گزینه‌ی ۲.



۶۸. گزینه‌ی ۲.

$$y = x^۲e^x \Longrightarrow y' = ۲xe^x + x^۲e^x = (۲x + x^۲)e^x$$

$$\Longrightarrow y'' = (۲ + ۲x)e^x + (۲x + x^۲)e^x$$

$$\Longrightarrow y'' = (x^۲ + ۴x + ۲)e^x = ۰ \quad , \quad e^x > ۰$$

$$\Longrightarrow x^۲ + ۴x + ۲ = ۰ \Longrightarrow x = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ - ۲}}{۱} = -۲ \pm \sqrt{۲}$$

۶۹. گزینه‌ی ۴.

$$f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}(x-۲) \Longrightarrow f'(x) = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(x-۲) + \sqrt[۳]{x^۲}$$

$$f'(-۱) = \frac{۲}{-۳}(-۱-۲)+۱ = ۲+۱ = ۳$$

۷۰. گزینه‌ی ۱.

$$x = ۰ \Longrightarrow y = e^{۰} = ۱ \Longrightarrow \text{نقطه تماس } (۰,۱)$$
$$y' = -۲e^{-۲x} \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = y'(۰) = -۲e^{۰} = -۲$$
$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Longrightarrow y - ۱ = -۲(x-۰) \Longrightarrow y = -۲x + ۱$$

۷۱. گزینه‌ی ۲.

$$D_f = \{x | x > ۰\}$$
$$f'(x) = x - \frac{۱}{x} = ۰ \Longrightarrow x = \pm ۱$$

x	۰		۱	
y'	∞	$-$	۰	$+$
y	∞	↘	$\frac{۱}{۲}$	↗

۷۲. گزینه‌ی ۴.

$$f'(x) = \frac{۲x}{x^۲+۴} \Longrightarrow f''(x) = \frac{۲x^۲ + ۸ - ۴x^۲}{(x^۲+۴)^۲} = \frac{۸ - ۲x^۲}{(x^۲+۴)^۲}$$
$$f''(x) = ۰ \Longrightarrow ۸ - ۲x^۲ = ۰ \Longrightarrow x = \pm ۲$$

۷۳. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x - ۳y + ۴}{۴y - ۳x} \xrightarrow{(۲,۱)} \frac{dy}{dx} = -\frac{۴ - ۳ + ۴}{۴ - ۶} = \frac{۵}{۲}$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

حسابداری

۱. تابع $y = ۲x^۲ - x + ۳$ در نقطه $x = ۱$ در ازای افزایش $\Delta x = ۰/۱$ چه مقدار افزایش خواهد داشت؟ [۱۳۷۱]

۱) ۰/۳۵ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۳۴ ۴) ۰/۳۷

۲. مقدار dy/dx در تابع $y = \frac{\ln x}{x}$ به‌ازای $x = e^۲$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $e^{-۴}$ ۲) $-e^۴$ ۳) $e^۴$ ۴) $-e^{-۴}$

۳. از رابطه $x^۲ - y^۲ + xy - ۲x = ۵$ مقدار dy/dx در نقطه $(۱, ۳)$ چه‌قدر است؟ [۱۳۷۱]

۱) -۳ ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) ۳

۴. دیفرانسیل تابع $y = (\text{Arctan } ۳x) + e^{-x}$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $۲dx$ ۲) dx ۳) $۴dx$ ۴) $۳dx$

۵. اگر $y = e^{۱/u}$ و $u = \sqrt{x^۲ - ۳}$ مقدار dy/dx به‌ازای $x = ۲$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{۱}{۲}e$ ۲) $۲e$ ۳) $-۲e$ ۴) $-\frac{۱}{۲}e$

۶. معادله خط مماس بر منحنی $y = x \ln x$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $y = x + ۱$ ۲) $y = x - ۱$ ۳) $y = x$ ۴) $y = -x + ۱$

۷. ضریب زاویه قائم بر منحنی تابع $y = \frac{x+۱}{x-۲}$ در نقطه $x = ۵$ واقع بر آن کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۸. طول نقطه عطف تابع $y = x \ln x - x^۲$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

۹. طول نقطه بحرانی تابع $y = ۲x^۴ + x$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\left(\frac{۱}{۲}\right)$، ماکزیمم ۲) $\left(\frac{۱}{۲}\right)$، عطف ۳) $\left(-\frac{۱}{۲}\right)$، مینیمم ۴) $\left(-\frac{۱}{۲}\right)$، ماکزیمم

۱۰. عرض نقطه بحرانی تابع $y = e^x$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $e^۲$ ۲) e ۳) فاقد نقطه بحرانی ۴) ۱

۱۱. مشتق تابع $x^۳ + y^۳ + xy = ۸$ در نقطه $x = ۰$، کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۰ ۴) ۲

۱۲. معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{۳x} + ۱$ در نقطه $x = ۰$، کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $y = x - ۲$ ۲) $y = x + ۲$ ۳) $y = ۳x + ۲$ ۴) $y = ۳x - ۲$

۱۳. مشتق مرتبه پنجم تابع $y = e^{۲x} + x$ در نقطه $x = ۰$، کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) ۳۲

۱۴. اگر $x = \ln(\sqrt{\cos ۲y})$ فرض شود، $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $-\tan ۲y$ ۲) $-\cot ۲y$ ۳) $\frac{\sin ۲y}{\sqrt{\cos ۲y}}$ ۴) $\frac{-\sin ۲y}{\sqrt{\cos ۲y}}$

۱۵. مقدار ماکزیمم تابع $y = x^۲ + ۱$ در فاصله $[۲, ۰]$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۱۶. مشتق تابع $y = (x+۱)^x$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۱۷. طول نقطه عطف منحنی $y = x \ln x$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) فاقد نقطه عطف ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۸. تابع $y = xe^x$، در چه فاصله‌ای صعودی است؟ [۱۳۷۲]

۱) $x < ۱$ ۲) $x > -۱$ ۳) $x > -۲$ ۴) $x < ۲$

۱۹. شیب وترگذرنده از دو نقطه $x = ۱$ و $x = h + ۱$ واقع بر منحنی $y = ۴x^۲ - ۶x$ هنگامی که h به سمت صفر میل می‌کند، کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

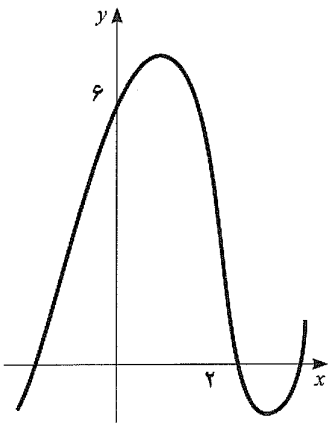
۲۰. اگر داشته باشیم $y = u^۲ + ۲u$ و $x = (\tan x - ۱)^۳$ مقدار $y'_{x^۲}$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱. در تابع $y = x^۴ + ۲x^۳$ مقدار x'_y در نقطه $x = -۱$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۲۲. شکل زیر نمودار $y = x^۳ + ax^۲ + x + c$ است، مقدار ac کدام است؟ [۱۳۷۳]

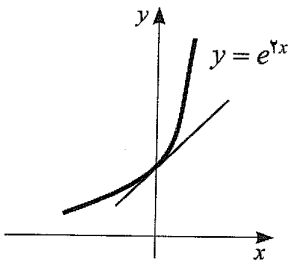


۱) -۲۴
۲) ۲۴
۳) ۱۲
۴) -۱۲

۲۳. معادله منحنی توزیع نرمال استاندارد $y = \frac{e^{\frac{-x^۲}{۲}}}{\sqrt{۲\pi}}$ است، طول نقطه عطف این تابع کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{e}$ ۴) $e^{-۱}$

۲۴. با توجه به شکل مقابل، معادله خط مماس بر منحنی کدام است؟ [۱۳۷۳]



۱) $y - ۲x + ۱ = ۰$
۲) $y + ۲x + ۲ = ۰$
۳) $y - ۲x - ۲ = ۰$
۴) $y - ۲x - ۱ = ۰$

۲۵. دیفرانسیل تابع $y = e^{\operatorname{Arctan} x}$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) edx ۲) $e^{\pi/۴}dx$ ۳) $\frac{۱}{۲}edx$ ۴) $\frac{۱}{۲}e^{\pi/۴}dx$

۲۶. در تابع $y = \frac{x+۱}{x}$ اگر در نقطه $x = ۱$ به x نموی به اندازه $\Delta x = ۰/۱$ بدهیم، Δy کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $-\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $-\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۷. در رابطه $xy + e^{xy} - ۲x + y - ۱ = ۰$ مقدار y'_x در نقطه $x = y = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۸. مقدار مشتق تابع $y = (x+۱)^x$ به‌ازای $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $۲\ln ۲ + ۱$

۲۹. درکدام تابع $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ همواره برابر شیب منحنی در هر نقطه آن است؟ [۱۳۷۴]

۱) $y = x^۲$ ۲) $y = \frac{۱}{x}$ ۳) $y = ax + b$ ۴) $y = \ln x$

۳۰. مشتق nام تابع $y = \frac{e^{۲x}}{۴}$ در $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۲^n ۲) $\frac{۱}{۲}e^۲$ ۳) $۲^{n-۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}e$

۳۱. طول نقاط ماکزیمم یا مینیمم تابع $y = x^۳ - ۳x$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) در $x = -۱$ ماکزیمم و در $x = ۱$ مینیمم
۲) در $x = \sqrt{۳}$ ماکزیمم و در $x = -۳$ مینیمم
۳) در $x = -\sqrt{۳}$ ماکزیمم و در $x = \sqrt{۳}$ مینیمم
۴) در $x = ۱$ ماکزیمم و در $x = -۱$ مینیمم

۳۲. در تابع $y = \sin x$ مقدار $y'_x \times x'_y$ در نقطه $x = \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۳۳. مشتق مرتبه nام تابع $y = \frac{۱}{۱-x}$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $n!$ ۴) $(n-۱)!$

۳۴. مشتق تابع $y = (x^۲ + ۱)^x$ در نقطه $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\ln ۲ + ۱$ ۴) $۲ + ۲\ln ۲$

۳۵. در فاصله $۲ \leqslant x \leqslant ۱$ تابع $y = x^۲ + ۱$، مقدار مینیمم تابع کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

۳۶. دیفرانسیل تابع $y = xe^x + \frac{۱}{x+۱}$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) صفر ۲) dx ۳) $۲dx$ ۴) $۲edx$

۳۷. مشتق y'_x برای f به ضابطه $xy + y^۲ - ۲ = ۰$، در نقطه $(۱, ۱)$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

۳۸. مشتق مرتبه دهم $y = \frac{۱}{۱-x}$ به‌ازای $x = ۲$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $-(۱۱!)$ ۲) $-(۱۰!)$ ۳) $۱۰!$ ۴) $۱۱!$

۳۹. اگر $y = \frac{x}{x+۱}$ باشد، حاصل $\Delta y - dy$ در نقطه $x = ۰$ به‌ازای $\Delta x = ۰/۲$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $-\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۴۰. تابع f با ضابطه $y = x^۴ + ۱$ از نظر تحدب و تقعر چگونه است؟ [۱۳۷۶]

۱) ابتدا محدب، سپس مقعر
۲) ابتدا مقعر، سپس محدب
۳) همواره محدب
۴) همواره مقعر

۴۱. کدام یک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی اکیداً نزولی است؟ [۱۳۷۶]

۱) $f(x) = x + \sin x$
۲) $f(x) = -۲x + \sin x$
۳) $f(x) = x - \sin x$
۴) $f(x) = -x + ۲\cos x$

۴۲. به‌ازای کدام مقدار a نقطه عطف تابع $y = xe^{ax}$ در $x = ۱$ است؟ [۱۳۷۶]

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۳. مشتق مرتبه دهم $y = e^{۲x}$ در $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $۲^{۱۰}$

۴۴. در تابعی با ضابطه $y = \frac{x}{x-۱}$ به‌ازای $x = ۲$ و $\Delta x = ۰/۱$، مقدار dy کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $-۰/۱$ ۲) $-۰/۲$ ۳) $۰/۱$ ۴) $۰/۲$

۴۵. در فاصله $[-۱, ۱]$، تابع $y = xe^x$ به چه صورتی است؟ [۱۳۷۷]

۱) محدب مؤکد
۲) مقعر مؤکد
۳) ابتدا مقعر، سپس محدب
۴) ابتدا محدب، سپس مقعر

۴۶. طول نقطه عطف تابعی به معادله $y = xe^{\frac{x}{۲}}$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $x = -۴$ ۲) $x = -۲$ ۳) $x = ۰$ ۴) $x = ۱$

۴۷. در تابعی به معادله $y = xe^{۲x} + ۵x + ۱$، با افزایش یک واحد برای x، در نقطه $x = ۰$ تقریباً چه مقدار بر y اضافه می‌شود؟ [۱۳۷۸]

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۸. اگر داشته باشیم $y = \frac{e^{۲x} - ۲x}{x+۲}$ مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

۴۹. کدامین تابع همواره محدب است؟ [۱۳۷۸]

۱) $y=\cos x$ ۲) $y=\sin x$ ۳) $y=e^{۲x}+x$ ۴) $y=\ln x$

۵۰. مقدار ماکزیمم تع $y=\ln x+x$ در فاصله $[۱,۲]$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\ln ۲+۲$

۵۱. از رابطه $z=(x+۲y)^x$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در $x=y=۱$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $۳\ln ۳+۱$ ۲) $\ln ۳-۱$ ۳) ۱ ۴) ۳

۵۲. از رابطه‌ی $x^۲+xy+۵y^۲-۴x-۳y=۰$، مقدار x'_y در نقطه $(۱,۱)$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) ۸ ۲) -۵ ۳) ۱ ۴) -۱

۵۳. اگر داشته باشیم $x^۲-۵xy+y^۲-۷x+y=-۹۴$، مقدار دیفرانسیل y در نقطه $(۱,۱)$ به کدام چقدر است؟ [۱۳۷۹]

۱) $dy=-\frac{۱}{۲}dx$ ۲) $dy=-۵dx$ ۳) $dy=-\frac{۱}{۵}dx$ ۴) $dy=-۲dx$

۵۴. طول نقطه ماکزیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳-۳x$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۵. عرض نقطه عطف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=xe^{-x}$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $-۲e^۲$ ۲) $-e$ ۳) $e^{-۱}$ ۴) $۲e^{-۲}$

۵۶. کدام مورد برای تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳-۹x$، در فاصله‌ی $[۰,۲]$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) صعودی ۲) مقعر ۳) محدب ۴) نزولی

۵۷. اگر داشته باشیم $x^۲+y^۲-۵xy+۴x-۱=۰$، مقدار y'_x در نقطه $(۱,۱)$ کدام است؟ [۱۳۸۰]

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۸. اگر تابع f به معادله‌ی $y=x^۲+x$ باشد، حاصل $(dy-\Delta y)$ در نقطه‌ی $x=۱$ و $\Delta x=۰/۱$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $-۰/۰۲$ ۲) $-۰/۰۱$ ۳) $۰/۰۲$ ۴) $۰/۰۳$

۵۹. تابع f به معادله‌ی $y=xe^x$ مفروض است، این تابع در چه فاصله‌ای اکیداً صعودی است؟ [۱۳۸۰]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$

۶۰. در تابع سؤال قبل، تابع در چه فاصله‌ای اکیداً مقعر است؟ [۱۳۸۰]

۱) $(-\infty,-۲)$ ۲) $(-۲,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۶۱. طول مثبت نقطه‌ی عطف تابع $y=\ln(۱+x^۲)$ کدام است؟ [۱۳۸۰]

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۲. در معادله‌ی $x^۳+y^۳=xy+۱$، مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x=۱$ واقع در ناحیه‌ی اول، کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۶۳. اگر داشته باشیم $y=x^x$، مقدار مشتق این تابع در $x=e$ برابر است با: [۱۳۸۱]

۱) e ۲) $e^{-۱}$ ۳) $۲e^e$ ۴) $e\cdot e^{e-۱}$

۶۴. تابع $y=xe^x$ در چه فاصله‌ای محدب است؟ [۱۳۸۱]

۱) $(-\infty,-۱)$ ۲) $(۲,+\infty)$ ۳) $(۱,\infty)$ ۴) $(-\infty,-۲)$

۶۵. شیب خط مماس بر منحنی $y = (۲x - ۱)^{\frac{x}{۲}}$ در نقطه $x = ۲$ کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) $\frac{۱}{۲}\ln ۳ - ۳$ ۲) $\frac{۱}{۲}\ln ۲ + ۳$ ۳) $\frac{۳}{۲}\ln ۳ + ۲$ ۴) $\frac{۳}{۲}\ln ۲ + ۳$

۶۶. در تابع حقیقی f به معادله $y = (\ln x)^۲ + ۱$، نقطه بحرانی و نوع آن کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) $(۱, ۱)$–ماکزیمم ۲) $(۱, ۱)$–مینیمم

۳) $(e, ۲)$–مینیمم ۴) $(e, ۲)$–ماکزیمم

۶۷. اگر تابع $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ از نقطه $(۰, ۱)$ عبورکرده و در $x = ۱$ ماکزیمم و در $x = ۲$ نقطه‌ی عطف داشته باشد، آنگاه b کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۹ ۴) -۹

۶۸. اگر داشته باشیم $x^۲ - ۳xy + ۲y^۲ = ۰$ و در نقطه $x = y = ۱$ مقدار dy برابر کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) dx ۲) $-dx$ ۳) $۲dx$ ۴) $-۲dx$

۶۹. اگر داشته باشیم $y = \sqrt{u + ۲}$، $u = \sqrt{x + ۳}$، $x = \sqrt[۳]{t}$، مقدار y'_t به‌ازای $t = ۱$ برابر است با: [۱۳۸۳]

۱) $\frac{۱}{۴۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) ۱

۷۰. تابع با ضابطه $y = \ln \frac{x}{x + ۱}$، در فاصله $[۱, ۲]$ چگونه است؟ [۱۳۸۳]

۱) محدب ۲) مقعر ۳) نزولی اکید ۴) شامل نقطه عطف

۷۱. نقطه بحرانی تابع $y = x \ln x$ به کدام صورت است؟ [۱۳۸۴]

۱) $x = e$ ماکزیمم ۲) $x = -e$ مینیمم ۳) $x = e^{-۱}$ مینیمم ۴) $x = -e^{-۱}$ ماکزیمم

۷۲. اگر $f(x) = \sqrt[۳]{(x^۲ - ۲x)^۲}$ باشد، حاصل $\lim_{h \to ۰} \frac{f(۴ + h) - f(۴)}{h}$ برابر کدام است؟ [۱۳۸۴]

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۷۳. خط مماس بر منحنی تابع $y = \ln(x^۲ - ۳)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟ [۱۳۸۴]

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۲

۷۴. تابع $f(x) = (x^۲ + ۱)e^{-x}$ در کدام بازه صعودی است؟ [۱۳۸۴]

۱) $(-\infty, -۱)$ ۲) $(-۱, +\infty)$ ۳) R ۴) ϕ

۷۵. مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = xe^{\frac{-۱}{۲}x^۲}$ کدام است؟ [۱۳۸۴]

۱) $\{-\sqrt{۶}, \sqrt{۶}\}$ ۲) $\{-\sqrt{۳}, \sqrt{۳}\}$

۳) $\{-\sqrt{۶}, ۰, \sqrt{۶}\}$ ۴) $\{-\sqrt{۳}, ۰, \sqrt{۳}\}$

۷۶. از رابطه $y^۲ = f(y - ۲x)$ با شرط $f'(۱) = -۲$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x = ۱$ و $y = ۳$ کدام است؟ [۱۳۸۴]

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۲.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(۱/۱) - f(۱)$$
$$\Delta y = ۲(۱/۱)^۲ - ۱/۱ + ۳ - ۲ + ۱ - ۳ = ۰/۳۲$$

۲. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{۱}{x}.x - \ln x}{x^۲} = \frac{۱ - \ln x}{x^۲} \xrightarrow{x=e^۲} \frac{dy}{dx} = \frac{۱ - \ln e^۲}{e^۴} = \frac{۱-۲}{e^۴} = -e^{-۴}$$

۳. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۲x + y - ۲}{-۲y + x} \xrightarrow[y=۱]{x=۳} \frac{dy}{dx} = -\frac{۶ + ۱ - ۲}{-۲ + ۳} = -۵$$

۴. گزینه‌ی ۱.

$$dy = \left(\frac{۳}{۱ + ۹x^۲} - e^x\right) dx \xrightarrow{x=۰} dy = (۳ - e^۰)dx = ۲dx$$

۵. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{۱}{u^۲}e^{۱/u}\cdot\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ - ۳}}, x = ۲ \Longrightarrow u = \sqrt{۴ - ۳} = ۱$$
$$\frac{dy}{dx} = -e\cdot\frac{۲}{\sqrt{۴-۳}} = -۲e$$

۶. گزینه‌ی ۲.

$$y' = \ln x + ۱ \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = y'_{(۱)} = ۰ + ۱ = ۱$$

$$y = \ln ۱ = ۰ \Longrightarrow \text{نقطه}(۱, ۰), y - ۰ = ۱(x-۱) \Longrightarrow y = x - ۱ \text{ معادله خط مماس}$$

۷. گزینه‌ی ۱.

$$y' = \frac{(x-۲) - (x+۱)}{(x-۲)^۲} = \frac{-۳}{(x-۲)^۲} \Longrightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{y'_{(۵)}} = ۳$$

۸. گزینه‌ی ۲.

$$y' = \ln x + ۱ - ۲x \Longrightarrow y'' = \frac{۱}{x} - ۲ = \frac{۱-۲x}{x} \Longrightarrow \frac{۱-۲x}{x} = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

۹. گزینه‌ی ۳.

$$y' = ۸x^۳ + ۱ \Longrightarrow ۸x^۳ + ۱ = ۰ \Longrightarrow x^۳ = -\frac{۱}{۸} \Longrightarrow x = -\frac{۱}{۲} \text{ طول نقطه بحرانی}$$
$$y'' = ۲۴x^۲,\ y''(-\frac{۱}{۲}) = ۲۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ = ۶ > ۰ \Longrightarrow \text{نوع نقطه } \min$$

۱۰. گزینه‌ی ۳.

$$y' = e^x > ۰ \Longrightarrow \text{تابع همواره صعودی و فاقد نقطه بحرانی}$$

۱۱. گزینه‌ی ۱.

$$x=۰ \Longrightarrow y^۳=۸ \Longrightarrow y=۲, \frac{dy}{dx}=\frac{-(۳x^۲+y)}{۳y^۲+x} \xrightarrow{x=۰,y=۲} \frac{dy}{dx}=-\frac{۱}{۶}$$

۱۲. گزینه‌ی ۳.

$$x=۰ \Longrightarrow y=e^{۰}+۱ \Longrightarrow y=۲ \Longrightarrow (۰,۲)$$
$$y'=۳e^{۳x} \Longrightarrow m_{\text{مماس}}=y'_{(۰)}=۳e^{۰}=۳, y-۲=۳(x-۰) \Longrightarrow y=۳x+۲$$

۱۳. گزینه‌ی ۴.

$$y'=۲e^{۲x}+۱ \Longrightarrow y''=۲^۲e^{۲x} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow y^{(۵)}=۲^۵e^{۲x} \Longrightarrow y^{(۵)}_{(۰)}=۳۲$$

۱۴. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-۲\sin ۲y/۲\sqrt{\cos ۲y}}{\sqrt{\cos ۲y}}=\frac{-۲\sin ۲y}{۲\cos ۲y}=-\tan ۲y \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{۱}{\tan ۲y}=-\cot ۲y$$

۱۵. گزینه‌ی ۱.

$$y'=۲x \Longrightarrow ۲x=۰ \Longrightarrow x=۰$$

x	۰	۲
y	۱	۵

۱۶. گزینه‌ی ۴.

$$y'=(x+۱)^x\left[\ln(x+۱)+x.\frac{۱}{x+۱}\right] \Longrightarrow y'_{(۰)}=۱(\ln ۱+۰)=۰$$

۱۷. گزینه‌ی ۱.

$$y'=\ln x+۱ \Longrightarrow y''=\frac{۱}{x} \Longrightarrow \frac{۱}{x}\neq ۰ \Longrightarrow \text{نقطه عطف ندارد}$$

۱۸. گزینه‌ی ۲.

$$y'=e^x+xe^x \Longrightarrow e^x(۱+x)=۰ \Longrightarrow e^x>۰, ۱+x=۰ \Longrightarrow x=-۱$$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	

$\Longrightarrow$ به‌ازای $x>-۱$ صعودی است

۱۹. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۴(x+h)^۲-۶(x+h)-۴x^۲+۶x}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۸x+۴h-۶)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۸x+۴h-۶)=۸x-۶ \xrightarrow{x=۱} ۸-۶=۲$$

یا:

$$y=۴x^۲-۶x \Longrightarrow y'=۸x-۶ \Longrightarrow y'_{(۱)}=۲$$

۲۰. گزینه‌ی ۱.

$$y = f(x) = (\tan x - ۱)^۶ + ۲(\tan x - ۱)^۳, g(x) = x^۲$$
$$y'_{g(x)} = y'_{x^۲} = \frac{۶(۱ + \tan^۲ x)(\tan x - ۱)^۵ + ۶(۱ + \tan^۲ x)(\tan x - ۱)^۲}{۲x}$$
$$x = \frac{\pi}{۴} \Longrightarrow y'_{x^۲} = \frac{۶(۱ + ۱)(۱ - ۱)^۵ + ۶(۱ + ۱)(۱ - ۱)^۲}{۲ \times \frac{\pi}{۴}} = ۰$$

۲۱. گزینه‌ی ۳.

$$x = -۱ \Longrightarrow y = ۱ - ۲ \Longrightarrow y = -۱$$
$$y = x^۴ + ۲x^۳ \Longrightarrow x^۴ + ۲x^۳ - y = ۰ \Longrightarrow x'_y = -\frac{-۱}{۴x^۳ + ۶x^۲} \Longrightarrow x'_{(-۱)} = \frac{۱}{۲}$$

۲۲. گزینه‌ی ۱.

$$x = ۲ \xrightarrow{\text{روی محور طول‌ها}} y = ۰ \Longrightarrow ۰ = ۸ + ۴a + ۲ + c \Longrightarrow ۴a + c = -۱۰$$
$$y = ۶ \xrightarrow{\text{روی محور عرض‌ها}} x = ۰ \Longrightarrow ۶ = c, ۴a + ۶ = -۱۰ \Longrightarrow a = -۴ \Longrightarrow a \cdot c = -۲۴$$

۲۳. گزینه‌ی ۲.

$$y' = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\right)(-x)e^{\frac{-x^۲}{۲}} \Longrightarrow y'' = \left(-\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\right)e^{\frac{-x^۲}{۲}} + \left(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\right)(x^۲)e^{\frac{-x^۲}{۲}} \Longrightarrow$$
$$y'' = ۰ \Longrightarrow \left(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-x^۲}{۲}}\right)(-۱ + x^۲) = ۰ \Longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-x^۲}{۲}} > ۰, -۱ + x^۲ = ۰ \Longrightarrow x = \pm ۱$$

۲۴. گزینه‌ی ۴. منحنی $y = e^{۲x}$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند، بنابراین $x = ۰$ است. پس:

$$y = e^{۰} = ۱ \Longrightarrow (۰, ۱)$$
$$y' = ۲e^{۲x} \Longrightarrow m_{\text{مماس}} = y'_{(۰)} = ۲e^{۰} = ۲, y - ۱ = ۲(x - ۰) \Longrightarrow y - ۲x - ۱ = ۰$$

۲۵. گزینه‌ی ۴.

$$dy = \frac{۱}{۱ + x^۲}e^{\text{Arctan}\, x}.dx \xrightarrow{x=۱} dy = \frac{۱}{۲}e^{\frac{\pi}{۴}} \cdot dx$$

۲۶. گزینه‌ی ۱.

$$\Delta y \approx f(۱/۱) - f(۱)$$
$$\Delta y \approx \frac{۱/۱ + ۱}{۱/۱} - \frac{۱ + ۱}{۱} = \frac{-۱}{۱۱}$$

۲۷. گزینه‌ی ۳.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y + ye^{xy} - ۲}{x + xe^{xy} + ۱} \xrightarrow{x=y=۰} y'_x = -\frac{-۲}{۱} = ۲$$

۲۸. گزینه‌ی ۴.

$$y' = (x + ۱)^x \left[\ln(x + ۱) + x.\frac{۱}{x + ۱}\right] \Longrightarrow y'_{(۱)} = ۲\left(\ln ۲ + \frac{۱}{۲}\right) = ۲\ln ۲ + ۱$$

۲۹. گزینه‌ی ۳. تنها درگزینه‌ی سوم $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مقدار ثابتی است.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ۲x, \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{۱}{x^۳}, \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۱}{x}$$

۳۰. گزینه‌ی ۳.

$$y' = ۲ \times \frac{۱}{۴}e^{۲x} \Longrightarrow y'' = ۲^۲ \times \frac{۱}{۴}e^{۲x} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow y^{(n)} = ۲^n \times \frac{۱}{۴}e^{۲x}$$

$$y^{(n)}_{(۰)} = ۲^n \times \frac{۱}{۴}e^{۰} = \frac{۲^n}{۴} = ۲^{n-۲}$$

۳۱. گزینه‌ی ۱.

$$y' = ۳x^۲ - ۳ \Longrightarrow ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Longrightarrow x = \pm ۱$$

$$y'' = ۶x \Longrightarrow \begin{cases} x = ۱ \Longrightarrow y'' = ۶ > ۰ & \Longrightarrow \text{نقطه } \min \\ x = -۱ \Longrightarrow y'' = -۶ < ۰ & \Longrightarrow \text{نقطه } \max \end{cases}$$

۳۲. گزینه‌ی ۲.

$$y'_x \times x'_y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = ۱$$

۳۳. گزینه‌ی ۳.

$$y^{(n)} = \frac{(۱)^{n-۱}n!(۱-۰)}{(۱-x)^{n+۱}} = \frac{n!}{(۱-x)^{n+۱}} \Longrightarrow y^{(n)}_{(۰)} = n!$$

۳۴. گزینه‌ی ۴.

$$y' = (x^۲+۱)^x \left[\ln(x^۲+۱) + x.\frac{۲x}{x^۲+۱}\right] \Longrightarrow y'_{(۱)} = ۲\left[\ln ۲ + \frac{۲}{۲}\right] = ۲\ln ۲ + ۲$$

۳۵. گزینه‌ی ۳.

$$y' = ۲x \Longrightarrow ۲x = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \notin [۱, ۲]$$

x	۱	۲
y	۲	۵

۳۶. گزینه‌ی ۱.

$$dy = \left[e^x + xe^x - \frac{۱}{(x+۱)^۲}\right]dx \xrightarrow{x=۰} dy = \left(e^۰ + ۰ - \frac{۱}{(۰+۱)^۲}\right)dx = ۰$$

۳۷. گزینه‌ی ۲.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y}{x+۲y} \xrightarrow{(۱,۱)} y'_x = -\frac{۱}{۱+۲} = -\frac{۱}{۳}$$

۳۸. گزینه‌ی ۲.

$$y^{(۱۰)} = \frac{(-۱)^۹۱۰!(۰-۱)}{(۱-x)^{۱۱}} \Longrightarrow y^{(۱۰)}_{(۲)} = -(۱۰!)$$

۳۹. گزینه‌ی ۲.

$$\Delta y \approx f(x+\Delta x) - f(x) = f(۰/۲) - f(۰) = \frac{۰/۲}{۰/۲+۱} - ۰ = \frac{۱}{۶}$$

$$dy = \frac{x+۱-x}{(x+۱)^۲} \cdot dx \Longrightarrow dy = \frac{۱}{۱}(۰/۲) = \frac{۲}{۱۰}$$

$$\Delta y - dy = \frac{۱}{۶} - \frac{۲}{۱۰} = -\frac{۱}{۳۰}$$

۴۰. گزینه‌ی ۳.

$$y' = ۴x^۳ \Longrightarrow y'' = ۱۲x^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow \text{همواره محدب}$$

۴۱. گزینه‌ی ۲.

$$f'(x) = ۱ + \cos x \geqslant ۰ \quad , \quad f'(x) = -۲ + \cos x \leqslant -۱$$
$$f'(x) = ۱ - \cos x \geqslant ۰ \quad , \quad f'(x) = -۱ - ۲\sin x \Longrightarrow -۳ \leqslant f'(x) \leqslant ۱$$

۴۲. گزینه‌ی ۱.

$$y' = e^{ax} + axe^{ax} \Longrightarrow y'' = ae^{ax} + ae^{ax} + a^۲xe^{ax},\ x = ۱ \Longrightarrow$$
$$e^{ax}(۲a + a^۲) = ۰ \Longrightarrow e^{ax} > ۰, a(۲ + a) = ۰ \Longrightarrow a = ۰, a = -۲$$

۴۳. گزینه‌ی ۴.

$$y = e^{۲x} \Longrightarrow y' = ۲e^{۲x} \Longrightarrow y'' = ۲^۲e^{۲x} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow y^{(۱۰)} = ۲^{۱۰}e^{۲x}$$
$$\Longrightarrow y^{(۱۰)}_{(۰)} = ۲^{۱۰}e^{۰} = ۲^{۱۰}$$

۴۴. گزینه‌ی ۱.

$$dy = y'dx = \frac{x - ۱ - x}{(x-۱)^۲}dx = \frac{-۱}{(x-۱)^۲}dx$$

به‌ازای $x = ۲$ و $\Delta x \approx dx = ۰/۱$ داریم:

$$dy = \frac{-۰/۱}{(۲-۱)^۲} = -۰/۱$$

۴۵. گزینه‌ی ۱.

$$y = xe^x \Longrightarrow y' = e^x + xe^x \Longrightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = (۲ + x)e^x$$

$$y'' = ۰ \Longrightarrow (۲ + x)e^x = ۰ \Longrightarrow x = -۲ \Longrightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & -۲ & \\ \hline y'' & - & ۰ & + \end{array}$$

۴۶. گزینه‌ی ۱.

$$y = xe^{\frac{x}{۲}} \Longrightarrow y' = e^{\frac{x}{۲}} + \frac{۱}{۲}xe^{\frac{x}{۲}} \Longrightarrow y'' = \frac{۱}{۲}e^{\frac{x}{۲}} + \frac{۱}{۲}e^{\frac{x}{۲}} + \frac{۱}{۴}xe^{\frac{x}{۲}}$$
$$y'' = \Longrightarrow (۱ + \frac{۱}{۴}x)e^{\frac{x}{۲}} = ۰ \Longrightarrow ۱ + \frac{۱}{۴}x = ۰ \Longrightarrow x = -۴$$

۴۷. گزینه‌ی ۴.

$$dx = ۱, x = ۰$$
$$dy = f'(x)dx = (e^{۲x} + ۲xe^{۲x} + ۵)dx = (e^{۰} + ۰ + ۵)(۱) = ۶$$

۴۸. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(۲e^{۲x} - ۲)(x + ۲) - (e^{۲x} - ۲x)}{(x+۲)^۲} \xrightarrow{x=۰} \frac{dy}{dx} = \frac{۰ - (۱ - ۰)}{۴} = -\frac{۱}{۴}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{dy/dx} = -۴$$

۷۵. گزینه‌ی ۴.

$$f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}\Longrightarrow f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}-x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}=(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$
$$f''(x)=-2xe^{-\frac{1}{2}x^2}-x(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}=(-2x-x+x^3)e^{-\frac{1}{2}x^2}=0$$
$$-3x+x^3=0\Longrightarrow x(-3+x^2)=0\Longrightarrow x=0\ ,\ x=\sqrt{3}\ ,\ x=-\sqrt{3}$$

۷۶. گزینه‌ی ۲.

$$y^2=f(y-2x)\Longrightarrow f(y-2x)-y^2=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-2f'(y-2x)}{f'(y-2x)-2y}\xrightarrow[y=3]{x=1}\frac{dy}{dx}=\frac{2f'(1)}{f'(1)-6}=\frac{1}{2}$$

فصل ۶

انتگرال

تابع اولیه یا پادمشتق

۶ـ۱ در فصل قبل طریقه پیدا کردن مشتق توابع را بررسی کردیم. به‌این‌صورت که «تابعی داده می‌شد، و مشتق آن را می‌خواستند». اما در بسیاری از مسائل و کاربردها، با ضد این مسأله روبرو می‌شویم، یعنی «مشتق تابعی داده شده است، و تابع مورد نظر را می‌خواهند». مثلاً، فرض کنید از شما می‌خواهند تابعی مانند F را طوری بیابید که $F'(x) = ۲x$. به سادگی می‌گویید یکی از این تابع‌ها، $F(x) = x^۲$ است، زیرا $(x^۲)' = ۲x$ تابع $F(x) = x^۲$ یک تابع اولیه یا پادمشتق از تابع $۲x$ نامیده می‌شود.

۶ـ۲ تابع $F(x)$ یک پادمشتق یا تابع اولیه از تابع $f(x)$ نامیده می‌شود اگر برای هر x در دامنه‌ی f، رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$F'(x) = f(x)$$

مثال توابع $x^۲$، $x^۲ + ۳$، $x^۲ - \sqrt{۵}$، تابع اولیه‌هایی از $f(x) = ۲x$ هستند، زیرا

$$(x^۲)' = ۲x \ , \ (x^۲ + ۳)' = ۲x \ , \ (x^۲ - \sqrt{۵})' = ۲x$$

این مثال نشان می‌دهد که یک تابع می‌تواند تابع اولیه‌های بسیاری داشته باشد. درواقع اگر $F(x)$ یک تابع اولیه‌ی $f(x)$ و c یک ثابت دلخواه باشد، آنگاه $F(x) + c$ نیز یک تابع اولیه‌ی $f(x)$ است. بنابراین کلیه‌ی توابع به‌صورت $F(x) = x^۲ + c$ تابع اولیه‌هایی از $f(x) = ۲x$ هستند.

۶ـ۳ نمایش همه تابع اولیه‌های یک تابع: اگر $F(x)$ تابع اولیه‌ای از $f(x)$ باشد، آنگاه به‌ازای هر مقدار ثابت c، تابع $F(x) + c$ نیز تابع اولیه‌ای از $f(x)$ است.

انتگرال نامعین

۶ـ۴ مجموعه‌ی همه‌ی تابع اولیه‌های f، انتگرال نامعین f نسبت به x نامیده شده، و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\int f(x)\,dx$$

نماد $\int$ علامت انتگرال است، تابع f انتگرالده انتگرال و x متغیر انتگرال‌گیری است.

۶ـ۵ اگر یک تابع اولیه F از تابع f را به‌دست آوریم، سایر تابع اولیه‌های f در یک مقدار ثابت با F تفاوت دارند.این مسأله را با استفاده از نماد انتگرال به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

ثابت c، ثابت انتگرال‌گیری یا ثابت دلخواه است. معادله‌ی بالا را چنین بخوانید «انتگرال نامعین f نسبت به x، $F(x)+c$ است.» وقتی $F(x)+c$ را به‌دست آوریم، گوییم که از f انتگرال‌گیری نموده و انتگرال را محاسبه کرده‌ایم.

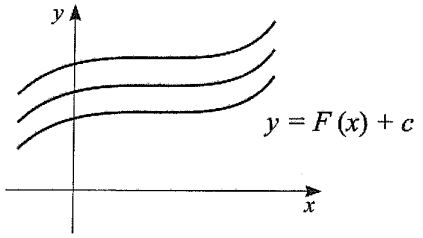
مثال $\int ۲x\,dx$ را محاسبه کنید.

$$\int ۲x\,dx = \underbrace{x^۲}_{\text{یک تابع اولیه‌ی } ۲x} + \underbrace{c}_{\text{ثابت دلخواه}}$$

فرمول $x^۲ + c$ تمامی تابع اولیه‌های $۲x$ را نتیجه می‌دهد. می‌توان درستی این امر را با مشتق‌گیری بررسی کرد.

۶ـ۶ انتگرال‌هایی که در نتایج آن‌ها یک ثابت دلخواه c وجود دارد. انتگرال‌های نامعین نامیده می‌شوند، زیرا مقدار دقیق آن‌ها را نمی‌توان بدون اطلاعات دیگری تعیین کرد.

۶ـ۷ در بسیاری از کاربردهای انتگرال‌گیری، اطلاعات معینی در مسأله داده می‌شود که شرایط اولیه یا شرایط مرزی نام دارد و به کمک آن، مقدار منحصر به‌فردی برای ثابت انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید. از نظر هندسی $y = F(x) + c$ نمایش خانواده‌ی منحنی‌هایی است که هر یک، با انتقال منحنی $y = F(x)$ (متناظر با $c = ۰$) به‌اندازه‌ی c در امتداد محور yها به‌دست می‌آید.



منحنی‌های نمایش داده شده متناظر با معادله‌ی $y = F(x) + c$، با یکدیگر موازی‌اند، به‌این معنا که شیب مماس، در تمامی نقاطی که طول آن‌ها مساوی x است، برابر $f(x)$ است. از این‌رو این خانواده‌ی منحنی‌ها، دارای این خاصیت است که به‌ازای هر نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$، تنها و فقط تنها یک منحنی از خانواده‌ی منحنی‌ها وجود دارد که از این نقطه خاص می‌گذرد.

مثال انتگرال نامعین $I = \int ۲x\,dx$ را در نظر بگیرید. از میان منحنی‌های تابع اولیه‌ی این انتگرال، آن منحنی را پیدا کنید که از نقطه‌ی $(۲, ۱)$ بگذرد.

حل

$$I = \int ۲x\,dx = x^۲ + c \Longrightarrow y = x^۲ + c$$

$$(۲, ۱) \Longrightarrow ۱ = ۴ + c \Longrightarrow c = -۳ \Longrightarrow y = x^۲ - ۳$$

۶ـ۸ چون دو عمل مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عکس یکدیگرند، بنابراین

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+c)' \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$

یا

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)}$$

یعنی مشتق انتگرال یک تابع برابر خود آن تابع است. نتیجه:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x)+c\right) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

یا

$$\boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)\,dx}$$

یعنی دیفرانسیل انتگرال یک تابع برابر است با دیفرانسیل خود تابع.

مثال

$$\left(\int \sin x\,dx\right)' = \sin x \quad , \quad d\left(\int x^{۳}\,dx\right) = x^{۳}dx$$

۶ـ۹ قضیه:

۱) اگر k یک عدد حقیقی ثابتی باشد، آنگاه

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

یعنی یک عامل ثابت همیشه می‌تواند از علامت انتگرال عبور نماید.

۲) اگر $f_۱, f_۲, \ldots, f_n$ توابعی از x باشند، آنگاه

$$\int \left(f_۱(x) \pm f_۲(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)\,dx = \int f_۱(x)dx \pm \int f_۲(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)\,dx$$

صورت‌های متعارف انتگرال‌گیری

۶ـ۱۰ می‌دانیم محاسبه‌ی انتگرال نامعین یا تابع اولیه و مشتق‌گیری دو عمل عکس یکدیگرند. فرض کنیم که داریم:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+c}$$

در این‌صورت می‌توان نوشت:

$$\boxed{F(x)+c \underset{\text{انتگرال‌گیری}}{\overset{\text{مشتق‌گیری}}{\Longleftrightarrow}} f(x)}$$

از خاصیت فوق برخی از فرمول‌های محاسبه‌ی انتگرال نامعین به‌دست می‌آید که موسوم به‌صورت‌های متعارف و یا صورت‌های استاندارد است. در زیر این فرمول‌ها به‌طور جداگانه شرح داده شده است.

۶ـ۱۱ فرمول‌های انتگرال توابع توانی:

$$۱)\ \int dx = x + c$$
$$۲)\ \int a\,dx = ax + c$$
$$۳)\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c\ ,\quad n \neq -۱$$
$$۴)\ \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+۱}}{a(n+۱)} + c\ ,\quad n \neq -۱$$

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{۱}{x^۳} dx$ ۲) $x\sqrt{x}\,dx$ ۳) $\int \frac{x^۴ - ۲x - ۱}{x^۳}\,dx$

حل

۱)
$$\int \frac{۱}{x^۳}\,dx = \int x^{-۳} dx = \frac{x^{-۲}}{-۲} + c = \frac{-۱}{۲x^۲} + c$$

۲)
$$\int x\sqrt{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{۱}{۲}} dx = \int x^{\frac{۳}{۲}} dx = \frac{۲}{۵} x^{\frac{۵}{۲}} + c = \frac{۲}{۵}\sqrt{x^۵} + c = \frac{۲}{۵} x^۲ \sqrt{x} + c$$

۳)
$$\int \frac{x^۴ - ۲x - ۱}{x^۳} dx = \int (x - ۲x^{-۲} - x^{-۳}) dx = \frac{x^۲}{۲} - \frac{۲x^{-۱}}{-۱} - \frac{x^{-۲}}{-۲} + c$$
$$= \frac{۱}{۲} x^۲ + \frac{۲}{x} + \frac{۱}{۲x^۲} + c$$

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int (۵x+۲)^۳ dx$ ۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{۲x+۳}}$

۳) $x\sqrt{x-a} dx$ ۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+۲} - \sqrt{x}}$

حل

۱)
$$\int (۵x+۲)^۳ dx = \frac{(۵x+۲)^۴}{۵ \times ۴} + c = \frac{۱}{۲۰}(۵x+۲)^۴ + c$$

۲)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{۲x+۳}} = \int (۲x+۳)^{-\frac{۱}{۲}} dx = \frac{(۲x+۳)^{\frac{۱}{۲}}}{۲ \times \frac{۱}{۲}} + c = \sqrt{۲x+۳} + c$$

۳)
$$\int x\sqrt{x-a} dx = \int (x - a + a)\sqrt{x-a} dx = \int [(x-a)\sqrt{x-a} + a\sqrt{x-a}] dx$$
$$= \int [(x-a)^{\frac{۳}{۲}} + a(x-a)^{\frac{۱}{۲}}] dx = \frac{۲}{۵}(x-a)^{\frac{۵}{۲}} + \frac{۲}{۳} a (x-a)^{\frac{۳}{۲}} + c$$

۴)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+۲} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+۲} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x+۲} - \sqrt{x})(\sqrt{x+۲} + \sqrt{x})} dx = \int \frac{\sqrt{x+۲} + \sqrt{x}}{x+۲-x} dx$$
$$= \frac{۱}{۲} \int (x+۲)^{\frac{۱}{۲}} dx + \frac{۱}{۲} \int x^{\frac{۱}{۲}} dx = \frac{۱}{۳}[(x+۲)^{\frac{۳}{۲}} + x^{\frac{۳}{۲}}] + c$$
$$= \frac{۱}{۳}[(x+۲)\sqrt{(x+۲)} + x\sqrt{x}] + c$$

تست اگر $\int \frac{(1-\sqrt{3x})(1+\sqrt{3x})}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}f(x)+c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $2-2x$ ۲) $2-x$ ۳) $1+2x$ ۴) $1+x$

حل گزینه‌ی ۱.

$$\int \frac{(1-\sqrt{3x})(1+\sqrt{3x})}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1-3x}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + c = \sqrt{x}(2-2x)+c \Longrightarrow f(x) = 2-2x$$

تست ضریب زاویه‌ی مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در هر نقطه $M(x,y)$ واقع بر آن مربع معکوس طول آن نقطه است. اگر نمودار تابع از نقطه‌ی $(1,1)$ بگذرد، $f(\frac{1}{3})$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

حل گزینه‌ی ۲.

$$m = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \int f'(x)dx = \int x^{-2}dx \Longrightarrow$$
$$f(x) = -\frac{1}{x} + c \Longrightarrow (1,1) \Longrightarrow 1 = -1 + c \Longrightarrow c = 2$$
$$f(x) = -\frac{1}{x} + 2 \Longrightarrow f(\frac{1}{3}) = -3 + 2 = -1$$

۶ـ۱۲ قاعده‌ی زنجیره‌ای انتگرال: اگر u تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$\int u'u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad ،n \neq -1$$

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int (2x+2)(x^2+2x-5)^3\,dx$ ۲) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}dx$

حل

۱) $u = x^2+2x-5$ ، $u' = 2x+2$، بنابراین:

$$\int \underbrace{(2x+2)}_{u'}\underbrace{(x^2+2x-5)}_{u}^3 dx = \frac{(x^2+2x-5)^4}{4} + c$$

۲) $u = x^3+4$ ، $u' = 3x^2$، بنابراین:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}dx = \int x^2(x^3+4)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{3x^2}_{u'}\underbrace{(x^3+4)}_{u}^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{(x^3+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+4} + c$$

تست اگر $F(x)$ یکی از توابع اولیه‌ی $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$ باشد. $F(\sqrt{۳})-F(۰)$ برابر است با:

۱) $۱-\sqrt{۳}$ ۲) $۱+\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۴. $u=x^۲+۱\ ,\ u'=۲x$، بنابراین

$$F(x)=\int x(x^۲+۱)^{-\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۱}{۲}\int \underbrace{۲x}_{u'}\underbrace{(x^۲+۱)}_{u}{}^{-\frac{۱}{۲}}dx \Longrightarrow$$

$$F(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{(x^۲+۱)^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+c=\sqrt{x^۲+۱}+c$$

$$F(\sqrt{۳})-F(۰)=\sqrt{۳+۱}+c-\sqrt{۰+۱}-c=۲-۱=۱$$

۱۳ـ۶ انتگرال توابع مثلثاتی:

۱) $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$	۲) $\int \sin ax\,dx=-\frac{۱}{a}\cos ax+c$
۳) $\int u'\sin u\,dx=-\cos u+c$	۴) $\int \cos x\,dx=\sin x+c$
۵) $\int \cos ax\,dx=\frac{۱}{a}\sin ax+c$	۶) $\int u'\cos u\,dx=\sin u+c$
۷) $\int(۱+\tan^۲ x)\,dx=\tan x+c$	۸) $\int(۱+\tan^۲ ax)\,dx=\frac{۱}{a}\tan ax+c$
۹) $\int u'(۱+\tan^۲ u)\,dx=\tan u+c$	۱۰) $\int \tan ax\,dx=-\frac{۱}{a}\ln\lvert\cos ax\rvert+c$
۱۱) $\int(۱+\cot^۲ x)\,dx=-\cot x+c$	۱۲) $\int(۱+\cot^۲ ax)\,dx=-\frac{۱}{a}\cot ax+c$
۱۳) $\int u'(۱+\cot^۲ u)\,dx=-\cot u+c$	۱۴) $\int \cot ax\,dx=\frac{۱}{a}\ln\lvert\sin ax\rvert+c$
۱۵) $\int \sec u\,dx=\ln(\tan(\frac{u}{۲}+\frac{\pi}{۴}))+c$	۱۶) $\int \csc u\,dx=\ln(\tan\frac{u}{۲})+c$

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int -\frac{۱}{x^۲}\cos(\frac{۱}{x})\,dx$

۲) $\int x\sin(۲x^۲)dx$

۳) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

۴) $\int \tan^۲ ۳x\,dx$

۵) $\int \frac{\sin x}{\cos^۲ x}\,dx$

۶) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

حل

۱) $u=\frac{۱}{x}\ ,\ u'=-\frac{۱}{x^۲}$، بنابراین:

$$\int \underbrace{-\frac{۱}{x^۲}}_{u'}\cos(\underbrace{\frac{۱}{x}}_{u})\,dx=\sin\frac{۱}{x}+c$$

۲) $u=۲x^۲\ ,\ u'=۴x$، بنابراین:

$$\int x\sin(۲x^۲)\,dx=\frac{۱}{۴}\int \underbrace{۴x}_{u'}\sin(\underbrace{۲x^۲}_{u})\,dx=-\frac{۱}{۴}\cos(۲x^۲)+c$$

۳) $u = \sqrt{x}$, $u' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$، بنابراین:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = ۲\int \underbrace{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}_{u'} \cos \underbrace{\sqrt{x}}_{u} = ۲\sin\sqrt{x} + c$$

۴)

$$\int \tan^۲ ۳x\,dx = \int (۱ + \tan^۲ ۳x - ۱)\,dx = \frac{۱}{۳}\tan ۳x - x + c$$

۵) $u = \cos x$, $u' = -\sin x$، بنابراین:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^۲ x}\,dx = \int \sin x(\cos x)^{-۲}dx = -\int \underbrace{-\sin x}_{u'}\underbrace{(\cos x)}_{u}^{-۲}dx$$

$$= -\frac{(\cos x)^{-۱}}{-۱} + c = \frac{۱}{\cos x} + c$$

۶) $u = \sin x$, $u' = \cos x$، بنابراین:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int \underbrace{\cos x}_{u'}\underbrace{(\sin x)}_{u}^{-\frac{۱}{۲}}dx = \frac{(\sin x)^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}} + c = ۲\sqrt{\sin x} + c$$

تست اگر $f'(x) = \frac{۱ + \tan^۲ x}{\tan^۲ x}$, $f(\frac{\pi}{۴}) = ۰$، آنگاه $f(\frac{۳\pi}{۴})$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۳. $u = \tan x$, $u' = ۱ + \tan^۲ x$، بنابراین:

$$f(x) = \int \frac{۱ + \tan^۲ x}{\tan^۲ x}dx = \int \underbrace{(۱ + \tan^۲ x)}_{u'}\underbrace{(\tan x)}_{u}^{-۲}dx = -(\tan x)^{-۱} + c$$

$$f(x) = -\frac{۱}{\tan x} + c$$

$$f(\tfrac{\pi}{۴}) = ۰ \Longrightarrow -۱ + c = ۰ \Longrightarrow c = ۱ \Longrightarrow f(\tfrac{۳\pi}{۴}) = ۱ + ۱ = ۲$$

۶ـ۱۴ محاسبه‌ی انتگرال‌های وابسته به توابع مثلثاتی: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و خواص انتگرال، می‌توانیم انتگرال‌ها را به انتگرال‌های ساده تبدیل و با کاربرد فرمول‌های (۶-۱۳) محاسبه کنیم.

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int \sin^۲ x\,dx$

۲) $\int \cos^۳ x\,dx$

۳) $\int \frac{۱}{۱ - \sin x}dx$

۴) $\int \frac{\cos ۲x + ۲\sin^۲ x}{\cos^۲ x}dx$

حل

۱) داریم $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ و در نتیجه $\sin^۲ x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}$، بنابراین:

$$\int \sin^۲ x\, dx = \int \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} dx = \frac{۱}{۲}\int (۱ - \cos ۲x) dx$$
$$= \frac{۱}{۲}(x - \frac{۱}{۲}\sin ۲x) + c = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + c$$

۲) می‌دانیم $\cos ۳x = ۴\cos^۳ x - ۳\cos x$ و در نتیجه $\cos^۳ x = \frac{\cos ۳x + ۳\cos x}{۴}$، بنابراین:

$$\int \cos^۳ x\, dx = \frac{۱}{۴}\int (\cos ۳x + ۳\cos x)\, dx = \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۳}\sin ۳x + ۳\sin x) + c$$
$$= \frac{۱}{۱۲}\sin ۳x + \frac{۳}{۴}\sin x + c$$

۳)

$$\int \frac{۱}{۱ - \sin x} dx = \int \frac{۱ + \sin x}{(۱ - \sin x)(۱ + \sin x)} dx = \int \frac{۱ + \sin x}{\cos^۲ x} dx$$
$$= \int (\frac{۱}{\cos^۲ x} + \frac{\sin x}{\cos^۲ x}) dx = \int (۱ + \tan^۲ x) dx + \int \sin x (\cos x)^{-۲} dx$$
$$= \tan x + \frac{۱}{\cos x} + c$$

۴) می‌دانیم $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$، بنابراین:

$$\int \frac{\cos ۲x + ۲\sin^۲ x}{\cos^۲ x} dx = \int \frac{۱ - ۲\sin^۲ x + ۲\sin^۲ x}{\cos^۲ x} dx = \int \frac{۱}{\cos^۲ x} dx$$
$$= \int (۱ + \tan^۲ x) dx = \tan x + c$$

۱۵ـ۶ اگر انتگرال به‌صورت $\int \sin^n x\, dx$ یا $\int \cos^n x\, dx$ باشد و n یک عدد فرد و مثبت باشد، در این حالت یک sin یا یک cos از عبارت جدا کرده و بقیه را که توانش زوج است با استفاده از روابط $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$ یا $\cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$ به نسبت دیگر تبدیل کرده و ....

مثال مطلوب است $I = \int \cos^۵ x\, dx$.

حل

$$I = \int \cos x \cos^۴ x\, dx = \int \cos x (۱ - \sin^۲ x)^۲ dx$$
$$= (\cos x + \cos x \sin^۴ x - ۲\cos x \sin^۲ x) dx$$
$$= \sin x + \frac{۱}{۵}\sin^۵ x - \frac{۲}{۳}\sin^۳ x + c$$

۱۶ـ۶ اگر انتگرال به‌صورت $\int \sin^n x\, dx$ یا $\int \cos^n x\, dx$ باشد و n یک عدد زوج و مثبت باشد. در این حالت مرتباً از فرمول‌های $\sin^۲ x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}$ و $\cos^۲ x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲}$ استفاده می‌کنیم تا هیچ توان زوجی وجود نداشته باشد دراین‌صورت یا انتگرال هر جمله قابل محاسبه است یا به حالت توان فرد تبدیل می‌شود که در بالا بررسی کردیم.

مثال مطلوب است $I = \int \sin^۴ x\, dx$.

حل

$$\begin{aligned} I &= \int (\frac{۱ - \cos ۲x}{۲})^۲ dx = \frac{۱}{۴} \int (۱ + \cos^۲ ۲x - ۲\cos ۲x)\, dx \\ &= \frac{۱}{۴} \int (۱ + \frac{۱ + \cos ۴x}{۲} - ۲\cos ۲x)\, dx \\ &= \frac{۱}{۴}(x + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۸}\sin ۴x - \sin ۲x) + c \\ &= \frac{۳}{۸}x + \frac{۱}{۳۲}\sin ۴x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + c \end{aligned}$$

۶ـ۱۷ اگر انتگرال به‌صورت $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\, dx$ باشد، وقتی که حداقل یکی از توان‌ها فرد باشد، برای حل مانند حالت (n یک عدد فرد و مثبت) عمل می‌کنیم.

مثال مطلوب است $I = \int \sin^۳ ۳x \cdot \cos^۵ ۳x\, dx$.

حل

$$\begin{aligned} I &= \int \sin ۳x(\sin^۲ ۳x) \cdot \cos^۵ ۳x\, dx = \int \sin ۳x(۱ - \cos^۲ ۳x)\cos^۵ ۳x\, dx \\ &= \int (\sin ۳x \cos^۵ ۳x - \sin ۳x \cos^۷ ۳x)dx = -\frac{۱}{۱۸}\cos^۶ ۳x + \frac{۱}{۲۴}\cos^۸ ۳x + c \end{aligned}$$

۶ـ۱۸ اگر انتگرال به‌صورت $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\, dx$ باشد، وقتی که هر دو توان زوج باشد، برای حل مانند حالت (n یک عدد زوج و مثبت) عمل می‌کنیم.

مثال مطلوب است $I = \int \sin^۴ x \cdot \cos^۲ x\, dx$.

حل

$$\begin{aligned} I &= \int (\sin^۲ x)^۲ \cdot \cos^۲ x\, dx = \int (\frac{۱ - \cos ۲x}{۲})^۲ (\frac{۱ + \cos ۲x}{۲})dx \\ &= \frac{۱}{۸}\int (۱ - ۲\cos ۲x + \cos^۲ ۲x)(۱ + \cos ۲x)dx \\ &= \frac{۱}{۸}\int (۱ - \cos ۲x - \cos^۲ ۲x + \cos^۳ ۲x)dx \\ &= \frac{۱}{۸}\int (۱ - \cos ۲x - \frac{۱ + \cos ۴x}{۲} + (\cos^۲ ۲x)(\cos ۲x))dx \\ &= \frac{۱}{۸}\int (\frac{۱}{۲} - \cos ۲x - \frac{۱}{۲}\cos ۴x)dx + \frac{۱}{۸}\int (۱ - \sin^۲ ۲x)\cos ۲x\, dx \\ &= \frac{۱}{۸}(\frac{x}{۲} - \frac{۱}{۲}\sin ۲x - \frac{۱}{۸}\sin ۴x) + \frac{۱}{۸}\int \cos ۲x dx - \frac{۱}{۱۶}\int \sin^۲ ۲x(۲\cos ۲x)dx \\ &= \frac{۱}{۱۶}x - \frac{۱}{۱۶}\sin ۲x - \frac{۱}{۶۴}\sin ۴x + \frac{۱}{۱۶}\sin ۲x - \frac{۱}{۴۸}\sin^۳ ۲x + c \\ &= \frac{۱}{۱۶}(x - \frac{۱}{۴}\sin ۴x - \frac{۱}{۳}\sin^۳ ۲x) + c \end{aligned}$$

۶ـ۱۹ محاسبه‌ی انتگرال‌های توان‌های فرد تانژانت و کتانژانت ($n = ۲k + ۱$):

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-۱} x}{n-۱} - \frac{\tan^{n-۳} x}{n-۳} + \cdots + (-۱)^k \ln|\frac{۱}{\cos x}| + c$$
$$\int \cot^n x\, dx = -\frac{\cot^{n-۱} x}{n-۱} + \frac{\cot^{n-۳} x}{n-۳} - \cdots + (-۱)^k \frac{\cot^۲ x}{۲} + (-۱)^k \ln|\sin x| + c$$

مثال مطلوب است $I = \int \tan^۹ x\, dx$.

حل

$$I = \int \tan^۹ x\, dx = \frac{\tan^۸ x}{۸} - \frac{\tan^۶ x}{۶} + \frac{\tan^۴ x}{۴} - \frac{\tan^۲ x}{۲} + \ln|\frac{۱}{\cos x}| + c$$

۶ـ۲۰ محاسبه‌ی انتگرال‌های توان‌های زوج تانژانت و کتانژانت ($n = ۲k$):

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-۱} x}{n-۱} - \frac{\tan^{n-۳} x}{n-۳} + \cdots + (-۱)^k x + c$$
$$\int \cot^n x\, dx = -\frac{\cot^{n-۱} x}{n-۱} + \frac{\cot^{n-۳} x}{n-۳} - \cdots + (-۱)^k \cot x + (-۱)^k x + c$$

مثال مطلوب است $I = \int \cot^{۱۰} x\, dx$.

حل

$$I = \int \cot^{۱۰} x\, dx = -\frac{\cot^۹ x}{۹} + \frac{\cot^۷ x}{۷} - \frac{\cot^۵ x}{۵} + \frac{\cot^۳ x}{۳} - \cot x - x + c$$

۶ـ۲۱ انتگرال‌های مثلثاتی قابل محاسبه با کاربرد فرمول‌های مثلثاتی: بسیاری از انتگرال‌های دشوار به کمک فرمول‌های مثلثاتی ساده زیر به انتگرال‌هایی از نوع بخش‌های قبل تبدیل و محاسبه می‌شوند.

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

مثال مطلوب است $I = \int \sin ۳x \cos ۲x\, dx$.

حل

$$I = \frac{۱}{۲}\int (\sin ۵x + \sin x)dx = \frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۵}\cos ۵x - \sin x) + c$$
$$= -\frac{۱}{۱۰}\cos ۵x - \frac{۱}{۲}\sin x + c$$

۶ـ۲۲ فرمول‌های انتگرال توابع مثلثاتی معکوس:

$$۱)\ \int \frac{۱}{\sqrt{a^۲-x^۲}}dx = \sin^{-۱}\frac{x}{a}+c \qquad ۲)\ \int \frac{u'}{\sqrt{a^۲-u^۲}}dx = \sin^{-۱}\frac{u}{a}+c$$
$$۳)\ \int \frac{-۱}{\sqrt{a^۲-x^۲}}dx = \cos^{-۱}\frac{x}{a}+c \qquad ۴)\ \int \frac{-u'}{\sqrt{a^۲-u^۲}}dx = \cos^{-۱}\frac{u}{a}+c$$
$$۵)\ \int \frac{۱}{a^۲+x^۲}dx = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a}+c \qquad ۶)\ \int \frac{u'}{a^۲+u^۲}dx = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{u}{a}+c$$
$$۷)\ \int \frac{-۱}{a^۲+x^۲}dx = \frac{۱}{a}\cot^{-۱}\frac{x}{a}+c \qquad ۸)\ \int \frac{-u'}{a^۲+u^۲}dx = \frac{۱}{a}\cot^{-۱}\frac{u}{a}+c$$

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{۴x-x^۲-۳}}$ ۲) $\int \frac{dx}{۱+۴x^۲}$ ۳) $\int \sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}\,dx$

حل

۱)

$$۴x-x^۲-۳ = ۴x-x^۲-۴+۱ = ۱-(x-۲)^۲$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{۱-(x-۲)^۲}} = \int \frac{۱}{\sqrt{۱-(x-۲)^۲}}dx = \sin^{-۱}(x-۲)+c$$

۲)

$$\int \frac{dx}{۱+۴x^۲} = \int \frac{dx}{۴(\frac{۱}{۴}+x^۲)} = \frac{۱}{۴}\int \frac{dx}{(\frac{۱}{۲})^۲+x^۲} = \frac{۱}{۴}\times ۲\tan^{-۱}۲x+c$$
$$= \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}۲x+c$$

۳)

$$\int \sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}dx = \int \sqrt{\frac{(۱+x)(۱+x)}{(۱-x)(۱+x)}}dx = \int \sqrt{\frac{(۱+x)^۲}{۱-x^۲}}dx$$
$$= \int \frac{۱+x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$$
$$= \sin^{-۱}x + \int x(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}dx = \sin^{-۱}x - \sqrt{۱-x^۲}+c$$

تست اگر $F(x)=\int \frac{dx}{x^۲+۲x+۱۰}$، آنگاه $F(۲)-F(-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۲\pi}{۵}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۲}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$x^۲+۲x+۱۰ = x^۲+۲x+۱+۹ = (x+۱)^۲+۳^۲$$
$$F(x) = \int \frac{dx}{۳^۲+(x+۱)^۲} = \frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(\frac{x+۱}{۳})+c$$
$$F(۲)-F(-۱) = \frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(۱)+c-\frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(۰)-c = \frac{۱}{۳}\times\frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۱۲}$$

۶ـ۲۳ فرمول‌های انتگرال توابع نمایی:

$$۱)\ \int e^x dx = e^x + c \qquad ۲)\ \int e^{nx} dx = \frac{۱}{n} e^{nx} + c$$
$$۳)\ \int u' e^u dx = e^u + c \qquad ۴)\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$۵)\ \int a^{nx} dx = \frac{a^{nx}}{n \ln a} + c \qquad ۶)\ \int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

مثال انتگرال‌های زیر را بیابید

۱) $\int (e^{۳x} + ۲^x) dx$

۲) $\int (ax + a^x - x^a)\, dx$

۳) $\dfrac{(a^x + b^x)^۲}{a^x b^x} dx$

۴) $\int \dfrac{e^{۳x} + ۱}{e^x + ۱} dx$

حل

۱)
$$\int (e^{۳x} + ۲^x) dx = \frac{۱}{۳} e^{۳x} + \frac{۲^x}{\ln ۲} + c$$

۲)
$$\int (ax + a^x - x^a) dx = \frac{a}{۲} x^۲ + \frac{a^x}{\ln a} - \frac{x^{a+۱}}{a+۱} + c$$

۳)
$$\int \frac{(a^x + b^x)^۲}{a^x b^x} dx = \int \frac{a^{۲x} + ۲a^x b^x + b^{۲x}}{a^x b^x} dx = \int (\frac{a}{b})^x dx + ۲\int dx + \int (\frac{b}{a})^x dx$$
$$= \frac{(\frac{a}{b})^x}{\ln(\frac{a}{b})} + ۲x + \frac{(\frac{b}{a})^x}{\ln(\frac{b}{a})} + c$$

۴)
$$\int \frac{e^{۳x} + ۱}{e^x + ۱} dx = \int \frac{(e^x + ۱)(e^{۲x} + e^x + ۱)}{e^x + ۱} dx = \int (e^{۲x} + e^x + ۱) dx$$
$$= \frac{۱}{۲} e^{۲x} + e^x + x + c$$

مثال انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int (۳x^۲ + ۱) e^{x^۳ + x} dx$

۲) $\int e^x \sqrt{۱ + e^x} dx$

۳) $\int x e^{x^۲} dx$

۴) $\int \cos x \cdot ۲^{\sin x} dx$

حل

۱) $u = x^۳ + x$, $u' = ۳x^۲ + ۱$، بنابراین:

$$\int (۳x^۲ + ۱) e^{x^۳ + x} dx = e^{x^۳ + x} + c$$

۲) $u = e^x + ۱$, $u' = e^x$، بنابراین:

$$\int e^x (۱ + e^x)^{\frac{۱}{۲}} dx = \frac{(۱ + e^x)^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + c = \frac{۲}{۳} (۱ + e^x) \sqrt{۱ + e^x}$$

۳) $u = x^۲ \ , \ u' = ۲x$، بنابراین:

$$\int xe^{x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\int ۲xe^{x^۲}dx = \frac{۱}{۲}e^{x^۲} + c$$

۴) $u = \sin x \ , \ u' = \cos x$، بنابراین:

$$\int \cos x \cdot ۲^{\sin x}dx = \frac{۲^{\sin x}}{\ln ۲} + c$$

تست مقدار $\int ۲^x \cdot ۳^x dx$ در $x = ۰$ کدام است؟

۱) $\ln ۲ + \ln^۳ + c$ ۲) $\frac{۲c}{\ln ۲ + \ln ۳}$ ۳) $\frac{۱}{\ln ۶} + c$ ۴) $\frac{c}{\ln ۲ + \ln ۳}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$F(x) = \int ۲^x \cdot ۳^x \, dx = \int ۶^x \, dx = \frac{۶^x}{\ln ۶} + c \Longrightarrow F(۰) = \frac{۱}{\ln ۶} + c$$

۶ـ۲۴ فرمول‌های انتگرال توابع لگاریتمی:

۱) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ ۲) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{۱}{a}\ln|ax+b| + c$

۳) $\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + c$

مثال انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int \frac{dx}{۳x-۱}$ ۲) $\int \frac{x+۱}{x^۲}dx$

۳) $\int \frac{۳x^۲+۱}{x^۳+x}dx$ ۴) $\int \frac{e^x}{e^x+۱}dx$

حل

۱) $\int \frac{dx}{۳x-۱} = \frac{۱}{۳}\ln|۳x-۱| + c$

۲) $\int \frac{x+۱}{x^۲}dx = \int(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۲})dx = \ln|x| - \frac{۱}{x} + c$

۳) $u = x^۳ + x \ , \ u' = ۳x^۲ + ۱$، بنابراین:

$$\int \frac{۳x^۲+۱}{x^۳+x}dx = \ln|x^۳+x| + c$$

۴) $u = e^x + ۱ \ , \ u' = e^x$، بنابراین:

$$\int \frac{e^x}{e^x+۱}dx = \ln|e^x+۱| + c$$

۶ـ۲۵ در صورتی‌که صورت و مخرج کسر چندجمله‌ای باشند، و درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بزرگ‌تر یا مساوی باشد، صورت کسر را بر مخرج تقسیم می‌کنیم، آنگاه بنویسید $\int(\text{خارج‌قسمت} + \frac{\text{باقیمانده}}{\text{مقسوم علیه}})dx$ سپس حل را ادامه دهید.

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{x}{x+۱}dx$ ۲) $\int \frac{۲x^۲+x}{x-۱}dx$

۳) $\int \frac{x^۴}{x+۱}$ ۴) $\int \frac{x^۴+۴}{x^۲+۱}dx$

حل

۱)

$$\begin{array}{r|l} x & x+۱ \\ \hline \vdots & ۱ \\ -۱ & \end{array} \Longrightarrow \int \frac{x}{x+۱}dx = \int (۱ + \frac{-۱}{x+۱})dx$$

$$= \int dx - \int \frac{۱}{x+۱}dx = x - \ln|x+۱| + c$$

راه حل دوم:

$$\int \frac{x}{x+۱}dx = \int \frac{x+۱-۱}{x+۱}dx = \int \frac{x+۱}{x+۱}dx - \int \frac{۱}{x+۱}dx$$

$$= \int dx - \int \frac{۱}{x+۱}dx = x - \ln|x+۱| + c$$

۲)

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۲+x & x-۱ \\ \hline \vdots & ۲x+۳ \\ ۳ & \end{array} \Longrightarrow \int \frac{۲x^۲+x}{x-۱}dx = \int (۲x+۳+\frac{۳}{x-۱})dx$$

$$= x^۲ + ۳x + ۳\ln|x-۱| + c$$

۳)

$$\begin{array}{r|l} x^۴+x & x+۱ \\ \hline \vdots & x^۳-x^۲+x-۱ \\ ۱ & \end{array} \Longrightarrow \int \frac{x^۴}{x+۱}dx = \int (x^۳ - x^۲ + x - ۱ + \frac{۱}{x+۱})dx$$

$$= \frac{۱}{۴}x^۴ - \frac{۱}{۳}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ - x + \ln|x+۱| + c$$

۴)

$$\begin{array}{r|l} x^۴+۴ & x^۲+۱ \\ \hline \vdots & x^۲-۱ \\ ۵ & \end{array} \Longrightarrow \int \frac{x^۴+۴}{x^۲+۱}dx = \int (x^۲ - ۱ + \frac{۵}{x^۲+۱})dx$$

$$= \frac{x^۳}{۳} - x + ۵\tan^{-۱}x + c$$

تست مقدار $I = \int \frac{x^۳}{x^۲-۱}dx$ در نقطه‌ی $x = \sqrt{۲}$ به‌ازای $c = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱$ ۲) $\sqrt{۲} - ۱$ ۳) $\sqrt{۲} + ۱$ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۴.

$$\begin{array}{r|l} x^۳ & x^۲-۱ \\ \hline \vdots & x \\ x & \end{array} \Longrightarrow \int \frac{x^۳}{x^۲-۱}dx = \int (x + \frac{x}{x^۲-۱})dx$$

$$= \int x\,dx + \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x}{x^۲-۱}dx = \frac{x^۲}{۲} + \frac{۱}{۲}\ln(x^۲-۱) + c$$

$$c = ۰\ ,\ x = \sqrt{۲} \Longrightarrow I = \frac{۲}{۲} + \frac{۱}{۲}\ln ۱ = ۱$$

۶ـ۲۶ محاسبه‌ی چند انتگرال خاص:

$$۱)\ \int \frac{dx}{x^۲-a^۲}=\frac{۱}{۲a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$
$$۲)\ \int \frac{dx}{a^۲-x^۲}=\frac{۱}{۲a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$
$$۳)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^۲-a^۲}}=\ln(x+\sqrt{x^۲-a^۲})+c$$
$$۴)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^۲+a^۲}}=\ln(x+\sqrt{x^۲+a^۲})+c$$

مثال انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int \frac{dx}{x^۲-۹}$ ۲) $\int \frac{۴\,dx}{۴-x^۲}$ ۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲-۲۵}}$

حل

۱)

$$\int \frac{dx}{x^۲-۹}=\int \frac{dx}{x^۲-۳^۲}=\frac{۱}{۲\times ۳}\ln\left|\frac{x-۳}{x+۳}\right|+c=\frac{۱}{۶}\ln\left|\frac{x-۳}{x+۳}\right|+c$$

۲)

$$\int \frac{۴\,dx}{۴-x^۲}=۴\int \frac{dx}{۲^۲-x^۲}=۴\times\frac{۱}{۲\times ۲}\ln\left|\frac{۲+x}{۲-x}\right|+c=\ln\left|\frac{۲+x}{۲-x}\right|+c$$

۳)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲-۲۵}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲-۵^۲}}=\ln(x+\sqrt{x^۲-۲۵})+c$$

تست مقدار $I=\int \frac{x^۲}{۱-x^۲}dx$ در نقطه‌ی $x=۰$ به‌ازای $c=۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل گزینه‌ی ۱.

$$\begin{array}{r|l} x^۲ & ۱-x^۲ \\ \hline \vdots & -۱ \\ \hline ۱ & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x^۲}{۱-x^۲}dx=\int(-۱+\frac{۱}{۱-x^۲})dx$$
$$=-\int dx+\int \frac{dx}{۱-x^۲}=-x+\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{۱+x}{۱-x}\right|+c$$
$$x=۰\ ,c=۱\Longrightarrow I=۰+\frac{۱}{۲}\ln ۱+۱=۱$$

انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر

۶ـ۲۷ اغلب با تعویض متغیر می‌توانیم یک انتگرال نا آشنا را به انتگرالی تبدیل کنیم که روش محاسبه‌ی آن را می‌دانیم. روش انجام دادن این کار روش تغییر متغیر است.

۶ـ۲۸ در این روش ما انتگرال مورد محاسبه را بر حسب متغیری چون u و du کاملاً بازنویسی می‌کنیم. یعنی، هرگاه $u = g(x)$ می‌نویسیم $du = g'(x)dx$ و لذا:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)du = F(u) + c$$

که در آن f و g' توابعی پیوسته‌اند و F یک تابع اولیه برای $f(u)$ است.

۶ـ۲۹ برای روش تغییر متغیر مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱) متغیر جدیدی چون $u = g(x)$ انتخاب می‌کنیم[۱].

۲) $du = g'(x)\,dx$ را محاسبه می‌کنیم.

۳) انتگرال اصلی را بر حسب متغیر u بازنویسی می‌کنیم[۲].

۴) انتگرال حاصله را بر حسب u محاسبه می‌کنیم.

۵) u را با $g(x)$ جایگزین می‌کنیم تا تابع اولیه را بر حسب x به‌دست آوریم.

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int x^۲(۳x^۳ + ۱)^۵ dx$

۲) $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{۱ - x^۲}}$

۳) $\int \dfrac{۱}{x^۲ + ۴x + ۴} dx$

۴) $\int \dfrac{x + ۱}{۲\sqrt{x + ۱}} dx$

۵) $\int \dfrac{۱}{\sqrt{x}(۱ + \sqrt{x})} dx$

۶) $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt[۳]{۱ - ۳x}}$

۷) $\int x(۱ - x)^{۱۰} dx$

۸) $\int \dfrac{۱ + x}{۱ - x} dx$

حل

۱)

$$u = ۳x^۳ + ۱ \Longrightarrow du = ۹x^۲\,dx \Longrightarrow \frac{du}{۹} = x^۲\,dx$$

$$\int x^۲(۳x^۳ + ۱)^۵\,dx = \int u^۵ \cdot \frac{du}{۹} = \frac{۱}{۹}\int u^۵\,du = \frac{۱}{۹} \times \frac{u^۶}{۶} + c$$

$$= \frac{۱}{۵۴}(۳x^۳ + ۱)^۶ + c$$

۲)

$$u = ۱ - x^۲ \Longrightarrow du = -۲x\,dx \Longrightarrow -\frac{du}{۲} = x\,dx$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \int \frac{-\frac{du}{۲}}{\sqrt{u}} = -\frac{۱}{۲}\int u^{-\frac{۱}{۲}} du = -\frac{۱}{۲}\left(\frac{u^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}\right) + c$$

$$= -\sqrt{u} + c = -\sqrt{۱ - x^۲} + c$$

---

۱. معمولاً بهتر است تابع داخلی یک تابع مرکب را u بگیرید (در عبارتی به‌صورت $\sqrt{۳x - ۲}$، تابع داخلی $۳x - ۲$ است و یا در عبارت $\sin^۳ x$ تابع داخلی $\sin x$ است).

۲. کاری کنید که تمام تابع زیر انتگرال برحسب u باشد و هیچ xای نباشد، یعنی انتگرال را به شکل $\int f(u)\,du$ درآورید.

۳) می‌دانیم $x^۲ + ۴x + ۴ = (x+۲)^۲$، بنابراین:

$$u = x + ۲ \Longrightarrow du = dx$$
$$\int \frac{۱}{(x+۲)^۲} dx = \int \frac{du}{u^۲} = \int u^{-۲} du = \frac{u^{-۱}}{-۱} + c = \frac{-۱}{x+۲} + c$$

۴)

$$u = x + ۱ \Longrightarrow du = dx$$
$$\int \frac{x+۱}{۲\sqrt{x+۱}} dx = \int \frac{u}{۲\sqrt{u}} du = \frac{۱}{۲} \int u^{\frac{۱}{۲}} du = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}} + c$$
$$= \frac{۱}{۳}\sqrt{u^۳} + c = \frac{۱}{۳} u\sqrt{u} + c = \frac{۱}{۳}(x+۱)\sqrt{x+۱} + c$$

۵)

$$u = ۱ + \sqrt{x} \Longrightarrow du = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} dx \Longrightarrow ۲du = \frac{۱}{\sqrt{x}} dx$$
$$\int \frac{۱}{\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})} dx = \int \frac{۱}{u}(۲\, du) = ۲ \int \frac{۱}{u}\, du = \ln|u| + c = \ln|۱ + \sqrt{x}| + c$$

۶)

$$u = ۱ - ۳x \Longrightarrow du = -۳\, dx \Longrightarrow -\frac{du}{۳} = dx\ ,\ x = \frac{۱-u}{۳}$$
$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt[۳]{۱-۳x}} = \frac{۱}{۹} \int \frac{u-۱}{\sqrt[۳]{u}} du = \frac{۱}{۹} \int u^{-\frac{۱}{۳}}(u-۱)\, du$$
$$= \frac{۱}{۹} \int (u^{\frac{۲}{۳}} - u^{-\frac{۱}{۳}}) du = \frac{۱}{۹}\left(\frac{۳}{۵} u^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۳}{۲} u^{\frac{۲}{۳}}\right) + c$$
$$= \frac{۱}{۱۵}(۱-۳x)^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۱}{۶}(۱-۳x)^{\frac{۲}{۳}} + c$$

۷)

$$u = ۱ - x \Longrightarrow du = -dx\ ,\ x = ۱ - u$$
$$\int x(۱-x)^{۱۰} dx = -\int (۱-u)u^{۱۰} du = \int (-u^{۱۰} + u^{۱۱}) du$$
$$= -\frac{۱}{۱۱} u^{۱۱} + \frac{۱}{۱۲} u^{۱۲} + c = -\frac{۱}{۱۱}(۱-x)^{۱۱} + \frac{۱}{۱۲}(۱-x)^{۱۲} + c$$

۸)

$$u = ۱ - x \Longrightarrow du = -dx\ ,\ x = ۱ - u$$
$$\int \frac{۱+x}{۱-x} dx = \int \frac{u-۲}{u} du = \int du - ۲\int \frac{du}{u} = u - ۲\ln|u| + c$$
$$= (۱-x) - ۲\ln|۱-x| + c$$

تست اگر $F(x)$ تابع اولیه‌ی تابع $y = \dfrac{dx}{(۱+x)\sqrt{x}}$ باشد، $F(۱) - F(۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

حل گزینه‌ی ۱.

$$u=\sqrt{x} \Longrightarrow du=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx \Longrightarrow ۲\,du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$u=\sqrt{x} \Longrightarrow u^{۲}=x \Longrightarrow ۱+u^{۲}=۱+x$$
$$F(x)=\int \frac{dx}{(۱+x)\sqrt{x}}=\int \frac{۲\,du}{u^{۲}+۱}=۲\tan^{-۱}u+c=۲\tan^{-۱}\sqrt{x}+c$$
$$F(۱)-F(۰)=۲\tan^{-۱}(۱)+c-۲\tan^{-۱}(۰)-c=۲\times\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

مثال انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int x\sin(۲x^{۲})dx$

۲) $\int \frac{\sin ۲x}{\sqrt{۲-\cos ۲x}}dx$

۳) $\int \frac{\tan^{۲}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

۴) $\int \frac{\cos x}{۱+\sin x}dx$

حل

۱)

$$u=۲x^{۲} \Longrightarrow du=۴x\,dx \Longrightarrow \frac{du}{۴}=x\,dx$$
$$\int x\sin(۲x^{۲})dx=\int \sin u\cdot\frac{du}{۴}=\frac{۱}{۴}\int \sin u\,du=-\frac{۱}{۴}\cos u+c$$
$$=-\frac{۱}{۴}\cos(۲x^{۲})+c$$

۲)

$$u=۲-\cos ۲x \Longrightarrow du=۲\sin ۲x\,dx \Longrightarrow \frac{du}{۲}=\sin ۲x\,dx$$
$$\int \frac{\sin ۲x}{\sqrt{۲-\cos ۲x}}dx=\int \frac{\frac{du}{۲}}{\sqrt{u}}=\frac{۱}{۲}\int u^{-\frac{۱}{۲}}du=\frac{۱}{۲}\times ۲u^{\frac{۱}{۲}}+c$$
$$=\sqrt{u}+c=\sqrt{۲-\cos ۲x}+c$$

۳)

$$u=\sqrt{x} \Longrightarrow du=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx \Longrightarrow ۲du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$\int \tan^{۲}\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int \tan^{۲}u\cdot ۲du=۲\int \tan^{۲}u\,du=۲\int(۱+\tan^{۲}u-۱)du$$
$$=۲(\tan u-u)+c=۲\tan\sqrt{x}-۲\sqrt{x}+c$$

۴)

$$u=۱+\sin x \Longrightarrow du=\cos x\,dx$$
$$\int \frac{\cos x\,dx}{۱+\sin x}=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln|۱+\sin x|+c$$

تست حاصل $\int \frac{dx}{x\cos^{۲}(۱+\ln x)}$ کدام است؟

۱) $-\cot(۱+\ln x)+c$
۲) $\tan(۱+\ln x)+c$
۳) $\frac{۱}{\cos(۱+\ln x)}+c$
۴) $\frac{۱}{\cos(۱+\ln x)}+\tan(۱+\ln x)+c$

حل گزینه‌ی ۲.

$$u=۱+\ln x \Longrightarrow du=\frac{۱}{x}dx$$
$$\int \frac{dx}{x\cos^{۲}(۱+\ln x)}=\int \frac{du}{\cos^{۲}u}=\int (۱+\tan^{۲}u)du=\tan u+c=\tan(۱+\ln x)+c$$

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^{۲}}$
۲) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{۱+\ln x}}$
۳) $\int \frac{۱}{x}\sin(\ln x)dx$
۴) $\int \frac{e^{x}}{۱-e^{x}}dx$
۵) $\int \frac{(۱+e^{x})^{۲}}{۱+e^{۲x}}dx$
۶) $\int ۲^{۳-x}dx$

حل

۱)

$$u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^{۲}}=\int \frac{du}{u^{۲}}=\int u^{-۲}du=-u^{-۱}+c=\frac{-۱}{\ln x}+c$$

۲)

$$u=۱+\ln x \Longrightarrow du=\frac{dx}{x},\ \ln x=u-۱$$
$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{۱+\ln x}}dx=\int \frac{u-۱}{\sqrt{u}}du=\int (u^{\frac{۱}{۲}}-u^{-\frac{۱}{۲}})du$$
$$=\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}-۲u^{\frac{۱}{۲}}+c=\frac{۲}{۳}(۱+\ln x)^{\frac{۳}{۲}}-۲(۱+\ln x)^{\frac{۱}{۲}}+c$$

۳)

$$u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{۱}{x}dx$$
$$\int \frac{۱}{x}\sin(\ln x)dx=\int \sin u\,du=\cos u+c=\cos(\ln x)+c$$

۴)

$$u=۱-e^{x} \Longrightarrow du=-e^{x}\,dx \Longrightarrow -du=e^{x}\,dx$$
$$\int \frac{e^{x}}{۱-e^{x}}dx=\int \frac{-du}{u}=-\ln|u|+c=-\ln|۱-e^{x}|+c$$

۵)

$$\int \frac{(۱+e^x)^۲}{۱+e^{۲x}}dx = \int \frac{۱+e^{۲x}+۲e^x}{۱+e^{۲x}}dx = \int dx + \int \frac{۲e^x}{۱+e^{۲x}}dx$$

برای حل انتگرال دوم، باید تغییر متغیر زیر را انجام دهیم.

$$u = e^x \Longrightarrow du = e^x dx$$
$$I = \int dx + ۲\int \frac{du}{۱+u^۲} = x + ۲\operatorname{Arctan} u + c = x + ۲\operatorname{Arctan}(e^x) + c$$

۶)

$$u = ۳ - x \Longrightarrow du = -dx \Longrightarrow -du = dx$$
$$\int ۲^{۳-x}dx = -\int ۲^u du = -\frac{۲^u}{\ln ۲} + c = -\frac{۲^{۳-x}}{\ln ۲} + c$$

تست اگر $F(x)$ تابع اولیه‌ی $f(x) = \frac{۱}{x}\ln x$ باشد. $F(e) - F(۱)$ کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۲.

$$u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{۱}{x}dx$$
$$F(x) = \int \frac{۱}{x}\ln x\, dx = \int u\, du = \frac{u^۲}{۲} + c = \frac{(\ln x)^۲}{۲} + c$$
$$F(e) - F(۱) = \frac{(\ln e)^۲}{۲} + c - \frac{(\ln ۱)^۲}{۲} - c = \frac{۱}{۲}$$

تست حاصل $I = \int \frac{e^x}{e^x - ۵}dx$ کدام است؟

۱) $\ln(e^x - ۵) + e^x + c$ ۲) $۲\ln(e^x - ۵) + e^x + c$
۳) $۵\ln(e^x - ۵) + e^x + c$ ۴) $\frac{۱}{۲}\ln(e^x - ۵) + e^x + c$

حل گزینه‌ی ۳.

$$u = e^x \Longrightarrow du = e^x\, dx$$
$$I = \int \frac{e^x}{e^x - ۵}dx = \int \frac{u}{u-۵}du = \int \frac{u - ۵ + ۵}{u-۵}du = \int du + ۵\int \frac{du}{u-۵}$$
$$I = u + ۵\ln(u-۵) + c = e^x + ۵\ln(e^x - ۵) + c$$

تست حاصل $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ کدام است؟

۱) $e^x + \operatorname{Arctan} e^x + c$ ۲) $e^x - \operatorname{Arctan} e^x + c$
۳) $\operatorname{Arctan} e^x + c$ ۴) $-\operatorname{Arctan} e^x + c$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\int \frac{dx}{e^x + \frac{۱}{e^x}} = \int \frac{e^x}{e^{۲x}+۱}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^۲+۱}dx$$

اکنون از تغییر متغیر $u = e^x$ استفاده می‌کنیم، دراین‌صورت $du = e^x dx$، و بنابراین:

$$\int \frac{e^x}{(e^x)^۲+۱}dx = \int \frac{du}{u^۲+۱} = \operatorname{Arctan} u + c = \operatorname{Arctan} e^x + c$$

۶ـ۳۰ تغییر متغیر توانی: این تغییر متغیرها با رابطه‌ی $u^n = f(x)$ مشخص می‌شوند که در آن $f(x)$ در تابع انتگرال به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم ظاهر شده است و n معمولاً عدد صحیح است. گرچه می‌توان آن را وابسته به‌ضرورت غیر صحیح نیز انتخاب کرد.

مثال انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(۱+۲x)^۳}}$ ۲) $\int \sqrt{e^x - ۱}\,dx$

حل

۱)

$$u^۲ = ۱+۲x \Longrightarrow ۲u\,du = ۲dx \Longrightarrow u\,du = x\,dx\ ,\ x = \frac{u^۲-۱}{۲}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(۱+۲x)^۳}} = \frac{۱}{۲}\int \frac{(u^۲-۱)u\,du}{u^۳} = \frac{۱}{۲}\int \frac{(u^۳-u)du}{u^۳} = \frac{۱}{۲}\int \frac{(u^۲-۱)du}{u^۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\int (۱ - \frac{۱}{u^۲})du = \frac{۱}{۲}(u + \frac{۱}{u}) + c = \frac{۱}{۲}(\frac{u^۲+۱}{u}) + c$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\frac{(۱+۲x)+۱}{(۱+۲x)^{\frac{۱}{۲}}}\right] + c = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲+۲x}{\sqrt{۱+۲x}}\right) + c$$

۲)

$$u^۲ = e^x - ۱ \Longrightarrow ۲u\,du = e^x\,dx \Longrightarrow dx = \frac{۲u\,du}{e^x} = \frac{۲u\,du}{u^۲+۱}$$

$$\int \sqrt{e^x-۱}\,dx = \int \sqrt{u^۲}\cdot\frac{۲u\,du}{u^۲+۱} = \int \frac{۲u^۲\,du}{u^۲+۱} = ۲\int \frac{u^۲+۱-۱}{u^۲+۱}du$$

$$= ۲\int (۱ - \frac{۱}{u^۲+۱})du = ۲(u - \tan^{-۱} u) + c$$

$$= ۲(\sqrt{e^x-۱} - \tan^{-۱}\sqrt{e^x-۱}) + c$$

تست اگر $f(x) = \int \frac{dx}{۱+\sqrt{x}}$، آنگاه $f(۴) - f(۰)$ کدام است؟

۱) $۴ - \ln ۲$ ۲) $۹ - \ln ۴$ ۳) $۴ + \ln ۹$ ۴) $۹ + \ln ۴$

حل گزینه‌ی ۱.

$$u^۲ = x \Longrightarrow ۲u\,du = dx, u = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \int \frac{dx}{۱+\sqrt{x}} = \int \frac{۲u du}{۱+u} = \int \left(۲ - \frac{۲}{۱+u}\right) du = ۲u - ۲\ln(۱+u) = ۲\sqrt{x} - ۲\ln(۱+\sqrt{x}) + c$$

$$f(۴) - f(۰) = ۲\sqrt{۴} - ۲\ln(۱+\sqrt{۴}) + c - ۰ + ۰ - c = ۴ - \ln ۹$$

انتگرال‌گیری به‌روش جزء به جزء

۶ـ۳۱ انتگرال‌گیری جزء به جزء روشی برای ساده کردن انتگرال‌هایی به‌صورت زیر است:

$$\int f(x) \cdot g(x) dx$$

که در آن از f می‌توان چندین بار مشتق گرفت و g بدون مشکل زیادی قابل انتگرال‌گیری است.

۶ـ۳۲ این روش به‌خصوص در مواقعی مفید است که انتگرال داده شده، حاصل‌ضرب یک تابع جبری و یک تابع لگاریتمی یا حاصل‌ضرب یک تابع جبری و یک تابع نمایی و نظایر آن، مانند $\int x \ln x \, dx$، $\int x^{۲} e^{x} \, dx$ یا $\int x \sin x \, dx$.

۶ـ۳۳ اگر u و v تابع‌هایی مشتق‌پذیر از x باشند، آنگاه:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

این رابطه موسوم به فرمول جزءبه‌جزء است. استفاده از این فرمول منوط به انتخاب مناسب u و dv است، به‌طوری که $\int dv$ و $\int v \, du$ را بتوان محاسبه کرد. ولی توجه کنید که:

۱) dx همواره قسمتی از dv است.

۲) dv را پیچیده‌ترین بخش تابع زیر انتگرال می‌گیریم به‌طوری که با یکی از فرمول‌های اساسی انتگرال قابل محاسبه باشد. در این صورت u را قسمت باقی‌مانده‌ی تابع زیر انتگرال می‌گیریم.

۳) u را بخشی از تابع زیر انتگرال می‌گیریم که مشتقش ساده‌تر از v است. دراین‌صورت dv را بخش باقی‌مانده‌ی زیر انتگرال می‌توان گرفت.

۶ـ۳۴ برای انتگرال‌گیری از یک حاصل‌ضرب دو جمله، سؤال اصلی که بایستی طرح شود آن است که «کدام جزء بایستی مساوی با u» و «کدام جزء مساوی با dv» انتخاب شود. همواره قاعده‌ی زیر را می‌توان بکار برد: «چنانچه حاصل‌ضربی که قرار است از آن انتگرال‌گیری شود، شامل یک جمله‌ی جبری (نظیر $x^{۲}$) باشد، دراین‌صورت این جزء به‌عنوان «جزء u» انتخاب می‌شود. یک استثنا بر این قاعده وقتی است که یک جمله‌ی «$\ln x$» داشته باشیم. در چنین حالتی $\ln x$ به‌عنوان «جزء u» انتخاب می‌شود.

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int x e^{x} \, dx$ ۲) $\int x \cdot ۲^{-x} \, dx$

حل

۱)

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{x} \, dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{x} \end{cases}$$

$$\int x e^{x} \, dx = x e^{x} - \int e^{x} \, dx = x e^{x} - e^{x} + c$$

۲)

$$\begin{cases} u = x \\ dv = ۲^{-x}\,dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{-۲^{-x}}{\ln ۲} \end{cases}$$

$$\int x \cdot ۲^{-x}\,dx = \frac{-x \cdot ۲^{-x}}{\ln ۲} - \int (\frac{-۲^{-x}}{\ln ۲})dx = \frac{-x \cdot ۲^{-x}}{\ln ۲} - \frac{۲^{-x}}{(\ln ۲)^{۲}} + c$$

تست اگر $\int xe^{-x}\,dx = f(x)e^{-x} + c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x - ۱$ ۲) $-x + ۱$ ۳) $x + ۱$ ۴) $-x - ۱$

حل گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = e^{-x}(-x - ۱) + c$$

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int x^n \ln x\,dx$ ۲) $\int \sqrt{x} \ln x\,dx$ ۳) $\int \dfrac{\ln(x+۱)}{۲(x+۱)}\,dx$

حل

۱)

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^n\,dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^{n+۱}}{n+۱} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x\,dx &= \frac{x^{n+۱}}{n+۱}\ln x - \int \frac{x^{n+۱}}{n+۱} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^{n+۱}}{n+۱}\ln x - \frac{۱}{n+۱}\int x^n\,dx \\ &= \frac{x^{n+۱}}{n+۱}\ln x - \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)^{۲}} + c = \frac{x^{n+۱}}{n+۱}(\ln x - \frac{۱}{n+۱}) + c \end{aligned}$$

۲)

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \sqrt{x}\,dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{۲}{۳}x\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x}\ln x\,dx &= \frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\ln x - \int \frac{۲}{۳}x\sqrt{x} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\ln x - \frac{۲}{۳}\int \sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\ln x - \frac{۴}{۹}x\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

۳)

$$\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = \dfrac{dx}{2(x+1)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x+1} \\ v = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) \end{cases}$$

$$\int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2 - \int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}dx$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌شود، انتگرال به‌دست آمده همان انتگرال صورت مسأله است، پس آن را به‌سمت چپ تساوی انتقال داده و به جواب می‌رسیم.

$$\Longrightarrow 2\int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2 \Longrightarrow \int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}dx = \frac{1}{4}[\ln(x+1)]^2$$

تست اگر $F(x) = \int \ln(1+x^2)\,dx$، آنگاه $F(x)$ در نقطه‌ی $x = 0$ به‌ازای $c = 1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

حل گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} u = \ln(1+x^2) \\ dv = dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x\,dx}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x^2)\,dx &= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int (1 - \frac{1}{1+x^2})\,dx \\ &= x\ln(1+x^2) - 2(x - \operatorname{Arctan} x) + c \end{aligned}$$

$$x = 0\ ,\ c = 1 \Longrightarrow I = 0 - 2(0-0) + 1 = 1$$

مثال انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int x\sin x\,dx$ ۲) $\int \cos^{-1} x\,dx$ ۳) $\int \dfrac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx$

حل

۱)

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$$

۲)

$$\begin{cases} u = \cos^{-1} x \\ dv = dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \cos^{-1} x\, dx = x\cos^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\cos^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

۳)

$$\begin{cases} u = \ln(\sin x) \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \cot x\, dx \\ v = -\cot x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx &= -\cot x \cdot \ln(\sin x) + \int \cot^2 x\, dx \\ &= -\cot x \cdot \ln(\sin x) + \int (1 + \cot^2 x - 1)\, dx \\ &= -\cot x \cdot \ln(\sin x) - \cot x - x + c \end{aligned}$$

تست اگر $F(x) = \int x\sinh x\, dx$، آنگاه $F(1) - F(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) e ۳) $2e$ ۴) e^2

حل گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sinh x\, dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \cosh x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int x\sinh x\, dx &= x\cosh x - \int \cosh x\, dx = x\cosh x - \sinh x + c \\ &= x \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c \end{aligned}$$

$$F(1) - F(0) = \left(\frac{e + e^{-1}}{2} - \frac{e - e^{-1}}{2} + c\right) - \left(0 - \frac{e^0 - e^0}{2}\right) = \frac{1}{e}$$

۶ـ۳۵ گاهی ممکن است برای محاسبه‌ی یک انتگرال، روش جزءبه‌جزء را بیش از یک بار به کار بُرد.

مثال مطلوب است $\int e^x \cos x\, dx$.

حل

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x\, dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = e^x\, dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

برای محاسبه‌ی انتگرال دوم، مجدداً از روش جزءبه‌جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x\, dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = e^x\, dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx)$$

$$۲\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{۱}{۲}(e^x \sin x + e^x \cos x) + c$$

۶ـ۳۶ محاسبه‌ی دو انتگرال مهم:

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a}{a^۲ + b^۲} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^۲ + b^۲} e^{ax} \cos bx + c$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^۲ + b^۲} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^۲ + b^۲} e^{ax} \sin bx + c$$

مثال مطلوب است محاسبه‌ی $I = \int e^{۳x} \sin ۳x\, dx$.

حل

$$I = \frac{۳}{۹ + ۹} e^{۳x} \sin ۳x - \frac{۳}{۹ + ۹} e^{۳x} \cos ۳x + c = \frac{۱}{۶} e^{۳x} \sin ۳x - \frac{۱}{۶} e^{۳x} \cos ۳x + c$$

۶ـ۳۷ انتگرال‌گیری به روش تشکیل جدول: مشاهده کردیم که انتگرال‌هایی که به‌صورت $\int f(x) \cdot g(x)\, dx$ که در آن از f بتوان بارها مشتق گرفت تا زمانی که مشتق صفر شود و از g بدون هیچ مشکلی بتوان بارها انتگرال گرفت کاندیدهای اصلی برای استفاده از روش جزءبه‌جزء هستند، ولی اگر تعداد عملیات زیاد باشد ممکن است محاسبات خسته کننده شوند. در چنین مواردی روشی برای سازمان دادن به محاسبات موجود است که کار را آسانتر می‌کند. این روش را انتگرال‌گیری به کمک تشکیل جدول می‌نامند که در مثال‌های بعدی تشریح خواهد شد.

مثال مطلوب است محاسبه‌ی $\int x^۲ e^{-x}\, dx$

حل با $f(x) = x^۲$ و $g(x) = e^{-x}$ جدولی به شرح زیر تهیه می‌کنیم.

$f(x)$ و مشتق‌هایش		$g(x)$ و انتگرال‌هایش
$x^۲$	$+$	e^{-x}
$۲x$	$-$	$-e^{-x}$
۲	$+$	e^{-x}
۰		$-e^{-x}$

اکنون توابعی را که با پیکان به هم مربوط هستند با توجه به علامت روی پیکان در هم ضرب می‌کنیم تا حاصل جمع آن‌ها جواب انتگرال گردد.

$$\int x^۲ e^{-x}\, dx = -x^۲ e^{-x} - ۲x e^{-x} - ۲e^{-x} + c$$

مثال مطلوب است $\int x^{۳} \sin x \, dx$.

حل با $f(x) = x^{۳}$ و $g(x) = \sin x$ جدولی به شرح زیر تهیه می‌کنیم.

$f(x)$ و مشتق‌هایش		$g(x)$ و انتگرال‌هایش
$x^{۳}$		$\sin x$
	$+$	
$۳x^{۲}$		$-\cos x$
	$-$	
$۶x$		$-\sin x$
	$+$	
۶		$\cos x$
	$-$	
۰		$\sin x$

بنابراین:

$$\int x^{۳} \sin x \, dx = -x^{۳} \cos x + ۳x^{۲} \sin x + ۶x \cos x - ۶ \sin x + c$$

مثال مطلوب است $\int e^{۲x} \cos x \, dx$.

حل با $f(x) = e^{۲x}$ و $g(x) = \cos x$ جدولی به شرح زیر تهیه می‌کنیم.

$f(x)$ و مشتق‌هایش		$g(x)$ و انتگرال‌هایش
$e^{۲x}$		$\cos x$
	$+$	
$۲e^{۲x}$		$\sin x$
	$-$	
$۴e^{۲x}$	$+$	$-\cos x$

در این‌جا توقف می‌کنیم. به مجرد رسیدن به ردیفی شبیه ردیف اول بدون درنظرگرفتن ضرایب عمل را متوقف می‌کنیم. اکنون به شرح زیر عمل می‌کنیم.

$$\int e^{۲x} \cos x \, dx = e^{۲x} \sin x + ۲e^{۲x} \cos x - ۴ \int e^{۲x} \cos x \, dx$$

برای آخرین پیکان افقی علامت انتگرال می‌گذاریم.

$$۵ \int e^{۲x} \cos x \, dx = e^{۲x} \sin x + ۲e^{۲x} \cos x + c$$

$$\int e^{۲x} \cos x \, dx = \frac{۱}{۵}(e^{۲x} \sin x + ۲e^{۲x} \cos x) + c$$

۶ـ۳۸ ترکیب روش تغییر متغیر و جزءبه‌جزء: در این روش نخست انتگرال را با یک تغییر متغیر به انتگرالی مناسب برای انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء تبدیل می‌کنیم.

مثال مطلوب است $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$.

حل به کمک روش تغییر متغیر خواهیم داشت:

$$t = \sqrt{x} \Longrightarrow dt = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} dx \Longrightarrow dx = ۲t \, dt$$

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = \int ۲te^{t} \, dt = ۲ \int te^{t} \, dt$$

انتگرال به‌دست آمده را به کمک روش جزءبه‌جزء حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^t\,dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = ۲\int te^t\,dt = ۲(te^t - \int e^t\,dt) = ۲te^t - ۲e^t + c$$
$$= ۲e^t(t-۱) + c = ۲e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-۱) + c$$

۶ـ۳۹ محاسبه‌ی انتگرال‌های با انتگرالده $\frac{d}{dx}e^x f(x)$: فرض کنید f تابعی از متغیر حقیقی x و با مقدار حقیقی باشد، دراین‌صورت

$$\int e^x[f(x) + f'(x)]\,dx = e^x f(x)$$

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{xe^x}{(۱+x)^۲}\,dx$ ۲) $\int e^x \frac{۱+x}{(۲+x)^۲}\,dx$

حل

۱)

$$\int \frac{xe^x}{(۱+x)^۲}\,dx = \int \frac{e^x(x+۱-۱)\,dx}{(۱+x)^۲} = \int \frac{(x+۱)e^x - e^x}{(۱+x)^۲}\,dx$$
$$= \int \left(\frac{e^x}{۱+x} - \frac{e^x}{(۱+x)^۲}\right)dx = \int e^x \Bigg(\underbrace{\frac{۱}{۱+x}}_{f(x)} - \underbrace{\frac{۱}{(۱+x)^۲}}_{f'(x)}\Bigg)dx$$
$$= e^x \cdot \frac{۱}{۱+x} + c$$

۲)

$$\int e^x \frac{۱+x}{(۲+x)^۲}\,dx = \int e^x \frac{۲+x-۱}{(۲+x)^۲}\,dx = \int e^x \Bigg(\underbrace{\frac{۱}{۲+x}}_{f(x)} - \underbrace{\frac{۱}{(۲+x)^۲}}_{f'(x)}\Bigg)dx$$
$$= e^x \cdot \frac{۱}{۲+x} + c$$

انتگرال‌گیری از کسرهای گویا

۶ـ۴۰ در مواردی که تابع انتگرالده به‌صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ باشد، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ توابع چند جمله‌ای هستند، معمولاً روش تجزیه‌ی کسر برای محاسبه‌ی انتگرال بسیار مفید است. درصورتی‌که درجه‌ی P از Q بیشتر یا مساوی باشد، نخست چند جمله‌ای صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم تا به عبارت

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}$$

دست یابیم، که در آن $S(x)$ یک چندجمله‌ای است و $Q(x)$ خارج‌قسمت تقسیم می‌باشد. $R(x)$ باقیمانده تقسیم است که آشکارا درجه‌ی $R(x)$ از $Q(x)$ کم‌تر است. محاسبه‌ی انتگرال $S(x)$ بسیار ساده است. انتگرال $\frac{R(x)}{Q(x)}$ با روش تجزیه‌ی کسر یا روش‌های مربوط به کسرهایی از این نوع محاسبه می‌شود. بنابراین می‌توانیم انتگرال‌های $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را در حالتی که درجه‌ی $P(x)$ از درجه‌ی $Q(x)$ کم‌تر است مورد بررسی قرار دهیم. برای این منظور حالت‌های مختلفی از $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را بررسی می‌کنیم.

۶ـ۴۱ انتگرالی $\frac{P(x)}{Q(x)}$، تابع $Q(x)$ به‌صورت

$$Q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

است که α_iها متمایزند. در این حالت تجزیه‌ی کسر زیر را درنظر می‌گیریم.

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

که در آن A_iها اعداد ثابتی هستند.

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\dfrac{۴x\,dx}{(۱-۲x)(۱+۳x)}$ ۲) $\int \dfrac{x\,dx}{x^۲+x-۲}$.

حل

۱)

$$\frac{۴x}{(۱-۲x)(۱+۳x)} = \frac{A}{۱-۲x} + \frac{B}{۱+۳x}$$
$$۴x = (۱+۳x)A + (۱-۲x)B$$
$$x = -\frac{۱}{۳} \Longrightarrow -\frac{۴}{۳} = ۰ + B\left(۱+\frac{۲}{۳}\right) \Longrightarrow B = -\frac{۴}{۵}$$
$$x = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow ۲ = A\left(۱+\frac{۳}{۲}\right) + ۰ \Longrightarrow A = \frac{۴}{۵}$$

درنتیجه

$$\int \frac{۴x\,dx}{(۱-۲x)(۱+۳x)} = \int \frac{\frac{۴}{۵}}{۱-۲x}dx + \int \frac{-\frac{۴}{۵}}{۱+۳x}\,dx$$
$$= \frac{۴}{۵} \times \left(\frac{-۱}{۲}\right)\int \frac{-۲}{۱-۲x}\,dx - \frac{۴}{۵} \times \left(\frac{۱}{۳}\right)\int \frac{۳}{۱+۳x}\,dx$$
$$= -\frac{۲}{۵}\ln|۱-۲x| - \frac{۴}{۱۵}\ln|۱+۳x| + c$$

۲)

$$\frac{x}{x^۲+x-۲}=\frac{x}{(x+۲)(x-۱)}=\frac{A}{x+۲}+\frac{B}{x-۱}$$

$$x=A(x-۱)+B(x+۲)$$

$$x=۱\Longrightarrow ۱=B(۱+۲)\Longrightarrow B=\frac{۱}{۳}$$

$$x=-۲\Longrightarrow -۲=A(-۲-۱)\Longrightarrow A=\frac{۲}{۳}$$

در نتیجه

$$\int\frac{x\,dx}{x^۲+x-۲}=\int\frac{\frac{۲}{۳}}{x+۲}dx+\int\frac{\frac{۱}{۳}}{x-۱}\,dx$$
$$=\frac{۲}{۳}\ln|x+۲|+\frac{۱}{۳}\ln|x-۱|+c$$

تست حاصل $\int\frac{x+۱}{x^۲-x}\,dx$ کدام است؟

۱) $\ln\frac{(x-۱)^۲}{|x|}+c$ ۲) $\ln|\frac{x-۱}{x}|+c$ ۳) $\ln|\frac{x}{x-۱}|+c$ ۴) $\ln\frac{|x|}{(x-۱)^۲}+c$

گزینه‌ی ۱.

$$\frac{x+۱}{x(x-۱)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-۱}$$

$$x+۱=A(x-۱)+Bx\Longrightarrow\begin{cases}x=۰\Longrightarrow ۱=-A\Longrightarrow A=-۱\\ x=۱\Longrightarrow ۲=B\end{cases}$$

پس

$$\int\frac{x+۱}{x^۲-x}dx=\int\frac{-۱}{x}\,dx+\int\frac{۲}{x-۱}\,dx=-\ln|x|+۲\ln|x-۱|+c$$
$$=-\ln|x|+\ln(x-۱)^۲+c=\ln\frac{(x-۱)^۲}{|x|}+c$$

۴۲ـ۶ در انتگرال $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$، تابع $Q(x)$ به‌صورت

$$Q(x)=(x-\alpha)^n$$

است که n عدد صحیح مثبت بزرگ‌تر از یک می‌باشد. در این حالت تجزیه‌ی کسر زیر را درنظر می‌گیریم.

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^n}=\frac{A_۱}{x-\alpha}+\frac{A_۲}{(x-\alpha)^۲}+\cdots+\frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

که در آن A_iها اعداد ثابتی هستند.

مثال مطلوب است $\int\frac{x^۲\,dx}{(x-۱)^۳(x+۱)}$.

حل

$$\frac{x^۲}{(x-۱)^۳(x+۱)} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{(x-۱)^۲} + \frac{C}{(x-۱)^۳} + \frac{D}{(x+۱)}$$
$$x^۲ = A(x-۱)^۲(x+۱) + B(x-۱)(x+۱) + C(x+۱) + D(x-۱)^۳$$
$$x = ۱ \Longrightarrow ۱ = C(۱+۱) \Longrightarrow C = \frac{۱}{۲}$$
$$x = -۱ \Longrightarrow ۱ = D(-۱-۱)^۳ \Longrightarrow D = -\frac{۱}{۸}$$

با مقایسه‌ی ضرایب توان‌های مساوی در دو طرف رابطه داریم

$$A = -D \Longrightarrow A = \frac{۱}{۸}\ ,\ B = \frac{۳}{۴}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}\frac{x^۲\,dx}{(x-۱)^۳(x+۱)} &= \int \frac{\frac{۱}{۸}}{x-۱}dx + \int \frac{\frac{۳}{۴}}{(x-۱)^۲}dx + \int \frac{\frac{۱}{۲}}{(x-۱)^۳}dx + \int \frac{-\frac{۱}{۸}}{(x+۱)}dx \\ &= \frac{۱}{۸}\ln|x-۱| - \frac{۳}{۴(x-۱)} + \frac{۱}{۴(x-۱)^۲} - \frac{۱}{۸}\ln|x+۱| + c \\ &= \frac{۱}{۸}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right| - \frac{۳}{۴(x-۱)} + \frac{۱}{۴(x-۱)^۲} + c\end{aligned}$$

۶ـ۴۳ در انتگرال $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$، تابع $Q(x)$ به‌صورت

$$Q(x) = (x^۲ + p_۱x + q_۱)\dots(x^۲ + p_nx + q_n)$$

است[۱]. اگر p_iها و q_iها متمایز باشند، تجزیه‌ی کسر زیر را درنظر می‌گیریم.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_۱x + B_۱}{x^۲ + p_۱x + q_۱} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{x^۲ + p_nx + q_n}}$$

که در آن A_iها و B_iها اعداد ثابتی هستند.

مثال مطلوب است $\int \frac{dx}{(x^۲+۴)(x^۲+۱)}$.

حل

$$\frac{۱}{(x^۲+۴)(x^۲+۱)} = \frac{Ax+B}{x^۲+۴} + \frac{Cx+D}{x^۲+۱}$$
$$۱ = (Ax+B)(x^۲+۱) + (x^۲+۴)(Cx+D)$$

۱. عوامل درجه‌ی دوم غیر قابل تجزیه هستند ($\Delta < ۰$).

با مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های مساوی در دو طرف داریم.

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A+4C=0 \\ B+4D=1 \end{cases} \Longrightarrow A=0\ ,\ B=-\frac{1}{3}\ ,\ C=0\ ,\ D=\frac{1}{3}$$

در نتیجه

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\tan^{-1}x + c$$

۶ـ۴۴ در انتگرال $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$، تابع $Q(x)$ به‌صورت

$$Q(x) = (x^2+px+q)^n$$

است[1]. دراین‌حالت تجزیه‌ی کسر زیر را درنظر می‌گیریم

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^n} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{x^2+px+q}$$

که در آن A_iها و B_iها اعداد ثابتی هستند.

مثال مطلوب است $\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+3)}$.

حل

$$\frac{2x}{(x^2+1)^2(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+3}$$

$$2x = (Ax+B)(x^2+3) + (Cx+D)(x^2+1)(x^2+3) + (Ex+F)(x^2+3)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های مساوی در دو طرف داریم

$$\begin{cases} A+4C+2E=0 \\ C+E=0 \\ D+F=0 \\ B+4D+2F=0 \\ 3A+3C+E=0 \\ 3B+3D+F=0 \end{cases} \Longrightarrow F=B=D=0\ ,\ A=1\ ,\ C=-\frac{1}{2}\ ,\ E=\frac{1}{2}$$

۱. عوامل درجه‌ی دوم غیرقابل تجزیه هستند ($\Delta < 0$).

بنابراین:

$$\begin{aligned}\int \frac{۲x\,dx}{(x^۲+۱)^۲(x^۲+۳)} &= \int \frac{x}{(x^۲+۱)^۲}dx - \frac{۱}{۲}\int \frac{x}{x^۲+۱}dx + \frac{۱}{۲}\int \frac{x}{x^۲+۳}dx \\ &= -\frac{۱}{۲(x^۲+۱)} - \frac{۱}{۴}\ln|x^۲+۱| + \frac{۱}{۴}\ln|x^۲+۳| + c \\ &= -\frac{۱}{۲(x^۲+۱)} + \frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{x^۲+۳}{x^۲+۱}\right| + c\end{aligned}$$

۶ـ۴۵ در انتگرال $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$، تابع $Q(x)$ به‌صورت

$$Q(x) = (x-\alpha_۱)(x-\alpha_۲)\dots(x-\alpha_n)(x^۲+px+q)$$

است که α_iها متمایزند و ریشه‌ی معادله $x^۲+px+q=۰$ نمی‌باشند. در این حالت تجزیه کسرهای مناسب مربوط به حالات مختلف را به کمک مطالب گفته شده انجام می‌دهیم.

مثال مطلوب است $\int \frac{x\,dx}{(x-۱)(x^۲+۱)}$

حل

$$\frac{x}{(x-۱)(x^۲+۱)} = \frac{A}{x-۱} + \frac{Bx+C}{x^۲+۱}$$

$$x = A(x^۲+۱) + (Bx+C)(x-۱)$$

$$x=۱ \Longrightarrow ۱ = A(۱+۱) \Longrightarrow A = \frac{۱}{۲}$$

$$A+B=۰ \Longrightarrow B = -\frac{۱}{۲}\ ,\ A-C=۰ \Longrightarrow C = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{(x-۱)(x^۲+۱)} &= \int \frac{\frac{۱}{۲}}{x-۱}dx + \int \frac{-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}}{x^۲+۱}\,dx \\ &= \frac{۱}{۲}\ln|x-۱| + \int \frac{-x+۱}{۲(x^۲+۱)}dx \\ &= \frac{۱}{۲}\ln|x-۱| + \frac{۱}{۲}\int \frac{-x}{x^۲+۱}dx + \frac{۱}{۲}\int \frac{dx}{x^۲+۱} \\ &= \frac{۱}{۲}\ln|x-۱| - \frac{۱}{۴}\ln|x^۲+۱| + \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}x + c\end{aligned}$$

انتگرال معین

۶ـ۴۶ تعریف: فرض کنید f تابعی از x باشد که به‌ازای همه‌ی مقادیر در $[a,b]$ پیوسته است و فرض کنید $F(x)$ یکی از تابع‌های اولیه‌ی f باشد در این صورت $F(b)-F(a)$ انتگرال معین $f(x)$ بین حدود $x=a$ و $x=b$ نامیده می‌شود، و با نماد زیر نمایش داده می‌شود

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

که می‌خوانیم انتگرال معین $f(x)$ از a تا b، بنابراین

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

که در آن

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

در تعریف فوق a را حد پایینی انتگرال و b را حد بالایی انتگرال می‌خوانند.

۶ـ۴۷ در محاسبه‌ی $\int_a^b f(x)\,dx$ ثابت انتگرال‌گیری حذف می‌شود و چون انتگرال دارای مقدار معینی است، بدین دلیل انتگرال موسوم به انتگرال معین $f(x)$ از a تا b می‌باشد.

۶ـ۴۸ کلیه‌ی توابع پیوسته انتگرال‌پذیرند. این بدان معناست که اگر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی این بازه انتگرال‌پذیر است ثابت شده است شرط لازم برای این که تابع f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد این است که f روی $[a,b]$ کراندار باشد.

مثال توابع به معادله‌های $f(x) = \frac{۱}{x}$ و $g(x) = x^۲ + ۳$ و $h(x) = \log x$ در بازه‌ی $[۲, ۴]$ پیوسته‌اند، پس این تابع‌ها در بازه‌ی $[۲, ۴]$ انتگرال‌پذیرند.

۶ـ۴۹ پیوستگی تابع f روی $[a,b]$ برای انتگرال‌پذیری شرط کافی است اما در مورد توابعی که روی بازه‌ی $[a,b]$ کرانداراند ولی پیوسته نمی‌باشند چه می‌توان گفت؟ برای پاسخ قضیه‌ی زیر را درنظر بگیرید. فرض کنید تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ کراندار باشد. اگر تعداد نقاط ناپیوستگی f روی $[a,b]$ با پایان باشد، آنگاه f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

مثال تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را درنظر بگیرید، f روی $[-۱, ۱]$ بجز $x = ۰$ پیوسته است از طرفی f روی $[-۱, ۱]$ کراندار است. پس $\int_{-۱}^{۱} \frac{|x|}{x}\,dx$ موجود است. محاسبه‌ی این انتگرال را در بخش‌های بعد خواهیم دید.

ویژگی‌های انتگرال معین

۶ـ۵۰ اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و k یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

۶ـ۵۱ اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر در بازه‌ی $[a,b]$ باشند، آنگاه:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

۶ـ۵۲ اگر f در بازه‌ی بسته‌ای که شامل a، b و c است، انتگرال‌پذیر باشد، به‌طوری که $a < c < b$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال اگر در تابع انتگرال‌پذیر f داشته باشم $\int_{-۱}^{۳} f(x)dx = ۵$ و $\int_{-۱}^{۱} f(x)\,dx = ۲$، آنگاه $\int_{۱}^{۳} f(x)\,dx$ را بیابید.

حل

$$\int_{-۱}^{۳} f(x)\,dx = \int_{-۱}^{۱} f(x)\,dx + \int_{۱}^{۳} f(x)\,dx \Longrightarrow ۵ = ۲ + \int_{۱}^{۳} f(x)\,dx \Longrightarrow \int_{۱}^{۳} f(x)\,dx = ۳$$

۶ـ۵۳ اگر $a < b$ و $\int_a^b f(x)\,dx$ وجود داشته باشد، تعریف می‌کنیم:

۱) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

۲) اگر $f(a)$ وجود داشته باشد، آنگاه $\int_a^a f(x)\,dx = ۰$.

مثال اگر f تابعی انتگرال‌پذیر و $\int_{۲\sqrt{۲}}^{-۳} f(x)\,dx = -۸$ و $\int_{-۵}^{\sqrt{۸}} f(x)\,dx = ۱$، آنگاه $\int_{-۵}^{-۳} f(x)\,dx$ را بیابید.

حل می‌دانیم $۲\sqrt{۲} = \sqrt{۸}$، پس:

$$\int_{-۳}^{۲\sqrt{۲}} f(x)\,dx = -\int_{۲\sqrt{۲}}^{-۳} f(x)d = -(-۸) = ۸$$

$$\int_{-۵}^{\sqrt{۸}} f(x)\,dx = \int_{-۵}^{-۳} f(x)\,dx + \int_{-۳}^{۲\sqrt{۲}} f(x)\,dx$$

$$۱ = \int_{-۵}^{-۳} f(x)\,dx + ۸ \Longrightarrow \int_{-۵}^{-۳} f(x)\,dx = -۷$$

۶ـ۵۴ اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر در بازه‌ی $[a,b]$ باشند و برای هر $x \in [a,b]$، $f(x) \leqslant g(x)$. آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

۶ـ۵۵ اگر $F(x)$ یکی از توابع اولیه‌ی تابع پیوسته $f(x)$ بر فاصله‌ی $[a,b]$ باشد، دراین‌صورت

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

بنابراین:

۱) ابتدا انتگرال نامعین $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

۲) در نتیجه‌ی به‌دست آمده از بند (۱) ابتدا به‌جای x حد بالایی b و سپس به جای x حد پایینی a را جایگزین می‌کنیم.

۳) تفاضل دو مقدار $F(b)$ و $F(a)$ را تعیین می‌نماییم.

مثال انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int_{۱}^{۶} \frac{dx}{\sqrt{۳x-۲}}$

۲) $\int_{۰}^{۱} x\sqrt{۱-x^۲}\,dx$

۳) $\int_{۱}^{۲} \frac{x^۲-۱}{x^۲}dx$

۴) $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x^۲}$

۵) $\int_{۰}^{\pi} \cos^۲ x\,dx$

۶) $\int_{۱}^{۲} \frac{\ln x}{x}dx$

۷) $\int_{۰}^{۱} x\ln x\,dx$

۸) $\int_{۰}^{۱}(۳x+۱)d(x^۲-۱)$

حل

(۱

$$\int \frac{dx}{\sqrt{۳x-۲}} = \int (۳x-۲)^{-\frac{۱}{۲}}dx = \frac{(۳x-۲)^{\frac{۱}{۲}}}{-\frac{۱}{۲}(۳+۱)} + c$$

$$\int_{۱}^{۶} \frac{dx}{\sqrt{۳x-۲}} = -\frac{۱}{۲}\sqrt{۳x-۲}\Big|_{۱}^{۶} = -\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶} - (-\frac{۱}{۲}\sqrt{۱}) = -\frac{۳}{۲}$$

(۲

$$u = ۱-x^۲ \Longrightarrow du = -۲x\,dx \Longrightarrow -\frac{du}{۲} = x\,dx$$

$$\int x\sqrt{۱-x^۲}\,dx = -\frac{۱}{۲}\int \sqrt{u}\,du = -\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\sqrt{u^۳} + c = -\frac{۱}{۳}\sqrt{(۱-x^۲)^۳} + c$$

$$\int_{۰}^{۱} x\sqrt{۱-x^۲}\,dx = -\frac{۱}{۳}\sqrt{(۱-x^۲)^۳}\Big|_{۰}^{۱} = ۰ - (-\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۳}$$

(۳

$$\int \frac{x^۲-۱}{x^۲}\,dx = \int (۱-\frac{۱}{x^۲})\,dx = x + \frac{۱}{x} + c$$

$$\int_{۱}^{۲} \frac{x^۲-۱}{x^۲}\,dx = (x+\frac{۱}{x})\Big|_{۱}^{۲} = (۲+\frac{۱}{۲}) - (۱+۱) = \frac{۱}{۲}$$

(۴

$$\int \frac{dx}{۱+x^۲} = \tan^{-۱} x + c$$

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x^۲} = \tan^{-۱} x\Big|_{۰}^{۱} = \tan^{-۱} ۱ - \tan_{۰}^{-۱} = \frac{\pi}{۴}$$

۵)

$$\int \cos^{۲} x\, dx = \int \frac{۱+\cos ۲x}{۲}\, dx = \frac{۱}{۲}\int (۱+\cos ۲x)\, dx$$
$$= \frac{۱}{۲}(x + \frac{۱}{۲}\sin ۲x) + c$$
$$\int_{۰}^{\pi} \cos^{۲} x\, dx = \frac{۱}{۲}(x + \frac{۱}{۲}\sin ۲x)\Big|_{۰}^{\pi} = \frac{۱}{۲}(\pi + ۰) - \frac{۱}{۲}(۰ + ۰) = \frac{\pi}{۲}$$

۶)

$$u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{۱}{x}dx$$
$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int u\, du = \frac{u^{۲}}{۲} + c = \frac{(\ln x)^{۲}}{۲} + c$$
$$\int_{۱}^{۲} \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^{۲}}{۲}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{(\ln ۲)^{۲}}{۲} - \frac{\ln(۱)^{۲}}{۲} = \frac{(\ln ۲)^{۲}}{۲}$$

۷)

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \frac{۱}{x}dx \\ v = \frac{x^{۲}}{۲} \end{cases}$$
$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^{۲}\ln x}{۲} - \frac{۱}{۲}\int x\, dx = \frac{x^{۲}\ln x}{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۲} + c$$
$$\int_{۰}^{۱} x \ln x\, dx = \left(\frac{x^{۲}\ln x}{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۲}\right)\Big|_{۰}^{۱} = (۰ - \frac{۱}{۴}) - (۰ - ۰) = -\frac{۱}{۴}$$

۸)

$$\int (۳x+۱)d(x^{۲}-۱) = \int (۳x+۱)۲x\, dx = \int (۶x^{۲}+۲x)dx = ۲x^{۳} + x^{۲} + c$$
$$\int_{۰}^{۱} (۳x+۱)d(x^{۲}-۱) = (۲x^{۳}+x^{۲})\Big|_{۰}^{۱} = (۲+۱) - (۰) = ۳$$

تست انتگرال $I = \int_{۰}^{۱} x^{۲}e^{x}\, dx$ برابر کدام است؟

۱) e ۲) $۲e$ ۳) $e-۱$ ۴) $e-۲$

حل گزینه‌ی ۴.

$f(x)$ و مشتق‌هایش		$g(x)$ و انتگرال‌هایش
$x^{۲}$	$+$	e^{x}
$۲x$	$-$	e^{x}
۲	$+$	e^{x}
۰		e^{x}

$$\int_{۰}^{۱} x^{۲}e^{x}\, dx = (x^{۲}e^{x} - ۲xe^{x} + ۲e^{x})\Big|_{۰}^{۱} = (e - ۲e + ۲e) - (۰ - ۰ + ۲) = e - ۲$$

تست اگر $\int_{۰}^{۱} x^۲e^x\,dx = A - ۲\int_{۰}^{۱} xe^x\,dx$، آنگاه عدد A کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}e$ ۲) e ۳) $e-۱$ ۴) $۲e$

حل گزینه‌ی ۲. در تست قبلی دیدیم که:

$$\int_{۰}^{۱} x^۲e^x\,dx = e - ۲$$

و:

$f(x)$ و مشتق‌هایش		$g(x)$ و انتگرال‌هایش
x	$+$	e^x
۱	$-$	e^x
۰		e^x

$$\int_{۰}^{۱} xe^x\,dx = (xe^x - e^x)\Big|_{۰}^{۱} = (e-e) - (۰-۱) = ۱$$

درنتیجه:

$$e - ۲ = A - ۲ \times ۱ \Longrightarrow A = e$$

تست اگر $\ln A = \int_{۱}^{۲} \frac{dx}{x^۲+x}$، آنگاه عدد A کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$\int \frac{dx}{x^۲+x} = \int (\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x+۱})dx = \ln x - \ln(x+۱) = \ln\frac{x}{x+۱}$$

$$\int_{۱}^{۲} \frac{dx}{x^۲+x} = \ln(\frac{x}{x+۱})\Big|_{۱}^{۲} = \ln\frac{۲}{۳} - \ln\frac{۱}{۲} = \ln\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۲}} = \ln\frac{۴}{۳} \Longrightarrow A = \frac{۴}{۳}$$

تست حاصل $\int_{۱}^{۲} \frac{dx}{۲x^۳+x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}\ln ۲$ ۲) $\frac{۱}{۳}\ln\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\ln\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\ln\frac{۳}{۴}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\frac{۱}{۲x^۳+x} = \frac{۱}{x(۲x^۲+۱)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{۲x^۲+۱}$$

$$۱ \equiv A(۲x^۲+۱) + x(Bx+C)$$

$$\begin{cases} ۲A + B = ۰ \Longrightarrow B = -۲ \\ C = ۰ \\ A = ۱ \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{۲x^۳+x} = \int (\frac{dx}{x} - \frac{۲x}{۲x^۲+۱}dx) = \ln x - \frac{۱}{۲}\ln(۲x^۲+۱) + c$$

$$\int_{۱}^{۲} \frac{dx}{۲x^۳+x} = \ln x\Big|_{۱}^{۲} - \frac{۱}{۲}\ln(۲x^۲+۱)\Big|_{۱}^{۲} = \ln ۲ - \frac{۱}{۲}(\ln ۹ - \ln ۳)$$
$$= \ln ۲ - \frac{۱}{۲}\ln ۳ = \frac{۲\ln ۲ - \ln ۳}{۲} = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۴}{۳}$$

تست حاصل $\int_{e}^{e^۲} \frac{dx}{x(\ln x)^۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

حل گزینه‌ی ۱.

$$u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^۳} = \int u^{-۳}\,du = \frac{u^{-۲}}{-۲} + c = \frac{-۱}{۲(\ln x)^۲} + c$$
$$\int_{e}^{e^۲} \frac{dx}{x(\ln x)^۳} = \frac{-۱}{۲(\ln x)^۲}\Big|_{e}^{e^۲} = \frac{-۱}{۲(\ln e^۲)^۲} - \frac{-۱}{۲(\ln e)^۲} = \frac{-۱}{۸} + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۸}$$

۶ـ۵۶ در انتگرال معین می‌توان تغییر متغیر داد. برای این منظور اولاً: رابطه تغییر متغیر را می‌نویسیم، ثانیاً: حدود جدید انتگرال را پیدا می‌کنیم و ثالثاً: دیفرانسیل متغیر قدیم را پیدا کرده و انتگرال در کل بر حسب متغیر جدید محاسبه می‌شود.

مثال حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int_{۰}^{۱} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ ۲) $\int_{۲}^{۴} \frac{x\,dx}{x^۲+۲}$

حل

۱)

$$u = \sqrt{x} \Longrightarrow du = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\,dx \Longrightarrow ۲du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$x = ۱ \Longrightarrow u = ۱\ ,\ x = ۰ \Longrightarrow u = ۰$$
$$\int_{۰}^{۱} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_{۰}^{۱} ۲e^{u}\,du = ۲e^{u}\Big|_{۰}^{۱} = ۲e - ۲e^{۰} = ۲e - ۲$$

۲)

$$u = x^۲ + ۲ \Longrightarrow du = ۲x\,dx \Longrightarrow \frac{du}{۲} = x\,dx$$
$$x = ۲ \Longrightarrow u = ۶\ ,\ x = ۴ \Longrightarrow u = ۱۸$$
$$\int_{۲}^{۴} \frac{x\,dx}{x^۲+۲} = \frac{۱}{۲}\int_{۶}^{۱۸} \frac{du}{u} = \frac{۱}{۲}\ln u\Big|_{۶}^{۱۸} = \frac{۱}{۲}\ln(۱۸) - \frac{۱}{۲}\ln(۶) = \frac{۱}{۲}\ln ۳$$

تست مقدار $\int_{۰}^{۲} \frac{۳^{x}}{۱+۳^{x}}dx$ کدام است؟

۱) $\ln ۲$ ۲) $\frac{\ln ۸}{\ln ۳}$ ۳) $\frac{\ln ۵}{\ln ۳}$ ۴) $\ln ۵$

حل گزینه‌ی ۳.

$$u = ۱ + ۳^x \Longrightarrow du = ۳^x \ln ۳\, dx \Longrightarrow \frac{du}{\ln ۳} = ۳^x\, dx\ ,\ u - ۱ = ۳^x$$

$$x = ۰ \Longrightarrow u = ۱ + ۱ = ۲\ ,\ x = ۲ \Longrightarrow u = ۱ + ۹ = ۱۰$$

$$\int_۰^۲ \frac{۳^x}{۱ + ۳x}\, dx = \frac{۱}{\ln ۳} \int_۲^{۱۰} \frac{du}{۱ + u - ۱} = \frac{۱}{\ln ۳} \int_۲^{۱۰} \frac{du}{u} = \frac{۱}{\ln ۳} \cdot \ln u \Big|_۲^{۱۰}$$

$$= \frac{۱}{\ln ۳}(\ln ۱۰ - \ln ۲) = \frac{۱}{\ln ۳} \times \ln ۵ = \frac{\ln ۵}{\ln ۳}$$

۶ـ۵۷ دو نکته:

۱) اگر f تابعی انتگرال‌پذیر و فرد باشد، داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = ۰$$

۲) اگر f تابعی انتگرال‌پذیر و زوج باشد، داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = ۲ \int_۰^a f(x)\, dx$$

مثال حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int_{-۱}^{۱} \sin^۵ x\, dx$ ۲) $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{x \cos x}{x^۶ + x^۴ + ۱}\, dx$

حل

۱) تابع $f(x) = \sin^۵ x$ یک تابع فرد است، زیرا

$$f(-x) = \sin^۵(-x) = -\sin^۵ x = -f(x)$$

بنابراین:

$$\int_{-۱}^{۱} \sin^۵ x\, dx = ۰$$

۲) تابع $f(x) = \frac{x \cos x}{x^۶ + x^۴ + ۱}$ یک تابع فرد است، زیرا

$$f(-x) = \frac{(-x)\cos(-x)}{(-x)^۶ + (-x)^۴ + ۱} = \frac{-x \cos x}{x^۶ + x^۴ + ۱} = -f(x)$$

بنابراین:

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{x \cos x}{x^۶ + x^۴ + ۱}\, dx = ۰$$

تست مقدار انتگرال $\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \cos x \ln \frac{۱ + x}{۱ - x} dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $+\infty$ ۴) -۱

حل گزینه‌ی ۲. ابتدا ثابت می‌کنیم $\ln \frac{۱+x}{۱-x}$ تابعی فرد است

$$f(-x) = \ln \frac{۱-x}{۱+x} = \ln(\frac{۱+x}{۱-x})^{-۱} = -\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) = -f(x)$$

از طرفی $\cos x$ تابعی زوج است، بنابراین $\cos x \ln \frac{۱+x}{۱-x}$ تابعی فرد است، بنابراین

$$\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \cos x \ln \frac{۱+x}{۱-x} dx = ۰$$

۶ـ۵۸ برای محاسبه‌ی انتگرال معین توابع قدرمطلق خطی در فاصله‌ی داده شده تابع را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم، بدین‌ترتیب فاصله‌ی موردنظر به چندین فاصله تبدیل شده و می‌توان انتگرال تابع را حساب کرد.

مثال مقدارد انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int_{-۱}^{۲}(۲|x| - x)\, dx$ ۲) $\int_{-۱}^{۴}(|x| + |x-۲|)dx$

حل

۱) ابتدا تابع $۲|x| - x$ را در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ تبدیل به تابع چند ضابطه‌ای می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} -۲x - x = -۳x & -۱ \leqslant x \leqslant ۰ \\ ۲x - x = x & ۰ \leqslant x \leqslant ۲ \end{cases}$$

x		۰	
	$-$	۰	$+$

$$\int_{-۱}^{۲}(۲|x| - x)d = \int_{-۱}^{۰} -۳x\, dx + \int_{۰}^{۲} x\, dx = -\frac{۳}{۲}x^۲\Big|_{-۱}^{۰} + \frac{۱}{۲}x^۲\Big|_{۰}^{۲}$$
$$= (۰ - \frac{۳}{۲}) + (۲ - ۰) = \frac{۱}{۲}$$

۲) ابتدا تابع $|x-۲| + |x|$ را در بازه‌ی $[-۱, ۴]$ تبدیل به تابع چندضابطه‌ای می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} -x - (x-۲) = -۲x + ۲ & -۱ \leqslant x \leqslant ۰ \\ x - (x-۲) = ۲ & ۰ \leqslant x \leqslant ۲ \\ x + x - ۲ = ۲x - ۲ & ۲ \leqslant x \leqslant ۴ \end{cases}$$

x		۰		۲	
x	$-$	۰	$+$		$+$
$x-۲$	$-$		$-$	۰	$+$

$$\int_{-۱}^{۴}(|x| + |x-۲|\, dx = \int_{-۱}^{۰}(-۲x+۲)\, dx + \int_{۰}^{۲} ۲\, dx + \int_{۲}^{۴}(۲x-۲)\, dx$$
$$= (-x^۲ + ۲x)\Big|_{-۱}^{۰} + ۲x\Big|_{۰}^{۲} + (x^۲ - ۲x)\Big|_{۲}^{۴} = ۳ + ۴ + ۸ = ۱۵$$

تست حاصل $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} |\sin x - \cos x| dx$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲} - ۴$

حل گزینه‌ی ۲.

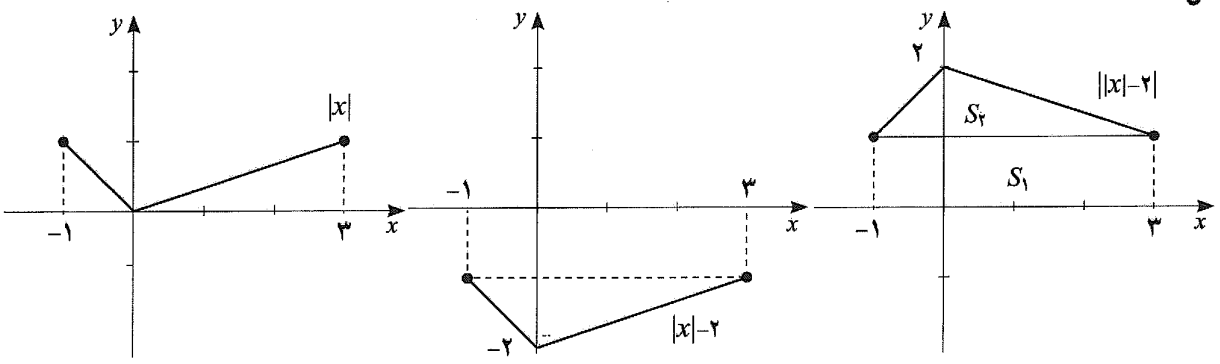
$$\sin x - \cos x = ۰ \Longrightarrow \sin x = \cos x \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۴}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x + \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$$
$$= (\cos x + \sin x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + (-\sin x - \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}$$

۶ـ۵۹ در محاسبه‌ی انتگرال معین توابع قدرمطلق خطی می‌توان تابع قدرمطلق خطی داده شده را در فاصله‌ی داده شده رسم کرد، سپس به کمک نمودار رسم شده انتگرال موردنظر را به‌دست آورد.

مثال حاصل $\int_{-1}^{3} \big||x| - 2\big| dx$ را به‌دست آورید.

حل



$$\int_{-1}^{3} \big||x| - 2\big| = S_1 + S_2 = (1 \times 4) + (\frac{4 \times 1}{2}) = 6$$

۶ـ۶۰ برای محاسبه انتگرال معین تابع جزء صحیح خطی در بازه‌ی $[a, b]$، ابتدا نقاط ناپیوستگی تابع را در این فاصله به‌دست آورده و آن را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم، بدین ترتیب بازه‌ی a تا b به چند بازه تقسیم می‌شود که در هر بازه‌ی باز، تابع پیوسته است و می‌توان انتگرال را به‌دست آورد.

مثال مقدار انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $\int_{-1}^{2} [x]\, dx$ ۲) $\int_{0}^{\pi} ([\sin x] + [\cos x])\, dx$

حل

۱) در بازه‌ی $[-1, 2]$ مقادیر مختلف $[x]$ را به‌دست می‌آوریم.

$$-1 \leqslant x < 0 \Longrightarrow [x] = -1 \;,\; 0 \leqslant x < 1 \Longrightarrow [x] = 0, 1 \leqslant x < 2 \Longrightarrow [x] = 1$$
$$\int_{-1}^{2} [x]\, dx = \int_{-1}^{0} [x]\, dx + \int_{0}^{1} [x]\, dx + \int_{1}^{2} [x]\, dx$$
$$= \int_{-1}^{0} -1\, dx + \int_{0}^{1} 0\, dx + \int_{1}^{2} 1\, dx = -x\Big|_{-1}^{0} + 0 + x\Big|_{1}^{2} = 2$$

۲) محاسبه $\int_{0}^{\pi} [\sin x]\, dx$، می‌دانیم $0 \leqslant x \leqslant \pi$ پس $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$، بنابراین

$$[\sin x] = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant \sin x < 1 \\ 1 & \sin x = 1 \end{cases} \Longrightarrow \int_{0}^{\pi} [\sin x]\, dx = \int_{0}^{\pi} (0)\, dx = 0$$

مثال حاصل $\int_{۰}^{۲}[x]|x-۱|dx$ را بیابید.

حل

$$\int_{۰}^{۲}[x]|x-۱|dx=\int_{۰}^{۱}[x]|x-۱|dx+\int_{۱}^{۲}[x]|x-۱|dx$$
$$=\int_{۰}^{۱}(۰)(-x+۱)dx+\int_{۱}^{۲}(۱)(x-۱)dx$$
$$=۰+(\frac{x^۲}{۲}-x)|_{۱}^{۲}=(۲-۲)-(\frac{۱}{۲}-۱)=\frac{۱}{۲}$$

تست حاصل $\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}[\frac{۱}{x}]\frac{dx}{x^۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$\frac{۱}{۲}<x<۱\Longrightarrow ۱<\frac{۱}{x}<۲\Longrightarrow[\frac{۱}{x}]=۱$$
$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}۱\times\frac{dx}{x^۳}=-\frac{۱}{۲x^۲}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}=-\frac{۱}{۲}(۱-۴)=\frac{۳}{۲}$$

تست اگر $f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$، آنگاه حاصل $I=\int_{-۲}^{۲}f(x)\,dx$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) -۴

حل گزینه‌ی ۴.

$$f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$$
$$I=\int_{-۲}^{۲}(-۱)\,dx=-x\Big|_{-۲}^{۲}=-۲-(۲)=-۴$$

تذکر: اگر n یک عدد صحیح و مثبت باشد، داریم:

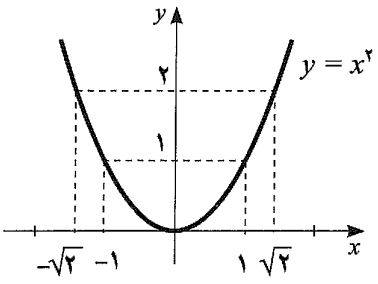
$$\boxed{\int_{۰}^{n}[x]\,dx=\frac{n(n-۱)}{۲}}$$

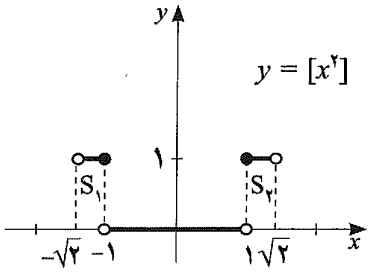
مثال

$$\int_{۰}^{۵}[x]\,dx=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

۶ـ۶۱ در محاسبه‌ی انتگرال معین توابع جزء صحیح خطی می‌توان از رسم تابع در فاصله‌ی داده شده استفاده کرد.

مثال حاصل $\int_{-\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲}}[x^۲]dx$ را بیابید.



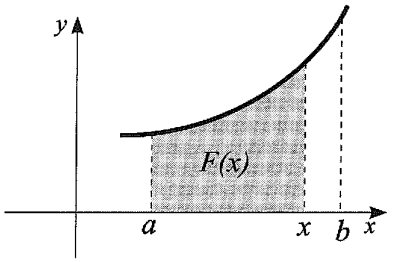


$$\int_{-\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲}}[x^۲]\,dx = S_۱ + S_۲ = [(-۱+\sqrt{۲})\times ۱] + [(\sqrt{۲}-۱)\times ۱] = ۲\sqrt{۲} - ۲$$

مشتق‌گیری از انتگرال

۶ـ۶۲ فرض کنید f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است دراین‌صورت تابع مساحت را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



که روی $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \text{یا} \quad F'(x) = f(x)$$

یعنی مشتق یک انتگرال معین نسبت به متغیری که در حد بالایش قرار دارد، برابر است با تابع زیر انتگرال به‌ازای آن متغیر.

۶ـ۶۳ تعبیر هندسی $F'(x) = f(x)$، این است که نمودار مشتق تابع مساحت، یعنی $F'(x)$، همان نمودار تابع $f(x)$ است.

مثال فرض کنیم F تابع مساحت با ضابطه‌ی $F(x) = \int_۱^x \frac{\sin ۲t}{۱+\cos t}\,dt$ باشد، در هر یک از تمرین‌های زیر y' را بیابید.

۱) $y = ۲F(x)$ ۲) $y = F(۲x^۲)$ ۳) $y = x^۳F(x)$

حل می‌دانیم

$$F(x) = \int_۱^x \frac{\sin ۲t}{۱+\cos t}dt \Longrightarrow F'(x) = \frac{\sin ۲x}{۱+\cos x}$$

۱)

$$y = ۲F(x) \Longrightarrow y' = ۲F'(x) \Longrightarrow y' = \frac{۲\sin ۲x}{۱+\cos x}$$

۲)

$$y = F(۲x^۲) \Longrightarrow y' = ۴xF'(۲x^۲) \Longrightarrow y' = \frac{۴x\sin(۴x^۲)}{۱+\cos(۲x^۲)}$$

۳)

$$y = x^{۳}F(x) \Longrightarrow y' = ۳x^{۲}F(x) + x^{۳}F'(x)$$
$$\Longrightarrow y' = ۳x^{۲}\int_{۱}^{x} \frac{\sin ۲t}{۱+\cos t}dt + \frac{x^{۳}\sin ۲x}{۱+\cos x}$$

مثال اگر $F(x) = \int_{۱}^{x} \frac{\cos t dt}{\sqrt{۱+t^{۱۰}}}$، آنگاه مقدار $F'(۰)$ را بیابید.

حل

$$F'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{۱+x^{۱۰}}} \Longrightarrow F'(۰) = \frac{\cos ۰}{\sqrt{۱+۰}} \Longrightarrow F'(۰) = ۱$$

تست اگر $F(x) = \int_{۱}^{x} \frac{dt}{۱+\sqrt[۳]{t}}$، مقدار مشتق $F(x^{۳})$ به‌ازای $x = ۲$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۴.

$$F(x) = \int_{۱}^{x} \frac{dt}{۱+\sqrt[۳]{t}} \Longrightarrow F'(x) = \frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{x}}$$
$$y = F(x^{۳}) \Longrightarrow y' = ۳x^{۲}F'(x^{۳}) \Longrightarrow y' = \frac{۳x^{۲}}{۱+\sqrt[۳]{x^{۳}}} \Longrightarrow y'(۲) = \frac{۱۲}{۱+۲} = ۴$$

تست حاصل $y = \lim_{x\to ۰} \frac{\int_{۰}^{x} e^{t^{۲}}\,dt}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $y = ۱$ ۲) $y = ۲$ ۳) $y = ۳$ ۴) $y = ۴$

حل گزینه‌ی ۱.

$$y = \lim_{x\to ۰} \frac{\int_{۰}^{x} e^{t^{۲}}dt}{\sin x} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۰} \frac{e^{x^{۲}}}{\cos x} = \frac{e^{۰}}{\cos(۰)} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

۶ـ۶۴ اگر f تابعی پیوسته و g تابعی مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$\boxed{F(x) = \int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt}$$

آنگاه:

$$\boxed{F'(x) = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)}$$

مثال اگر $F(x) = \int_{۰}^{\sin x}(۱-t^{۲})\,dt$، دراین‌صورت $F'(x)$ رابیابید.

حل قرار می‌دهیم $g(x) = \sin x$، بنابراین:

$$F(x) = \int_{۰}^{\sin x}(۱-t^{۲})\,dt = (۱-\sin^{۲}x)\cdot\cos x = \cos^{۲}x\cdot\cos x = \cos^{۳}x$$

تست اگر $f(x)=\int_{۲}^{x^{۲}} \frac{dt}{۱+t^{۳}}$، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۶۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

حل گزینه‌ی ۱. قرار می‌دهیم $g(x)=x^{۲}$، بنابراین:

$$f'(x)=\frac{۱}{۱+(x^{۲})^{۳}}\cdot ۲x \Longrightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۱+۶۴}\times ۴=\frac{۴}{۶۵}$$

۶ـ۶۵ اگر g و h توابعی مشتق‌پذیر باشند و داشته باشیم:

$$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$$

آنگاه:

$$F'(x)=f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)-f\big(h(x)\big)\cdot h'(x)$$

مثال حاصل $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{۲\sqrt{x}} \sin t^{۲}dt$ را بیابید.

حل

$$g(x)=۲\sqrt{x}\Longrightarrow g'(x)=۲\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{\sqrt{x}}\ ,\ \ h(x)=\sqrt{x}\Longrightarrow g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{۲\sqrt{x}} \sin t^{۲}\,dt=\sin(۲\sqrt{x})^{۲}\cdot\frac{۱}{\sqrt{x}}-\sin(\sqrt{x})^{۲}\cdot\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{\sin ۴x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin x}{۲\sqrt{x}}$$

تست تابع $f(x)=\int_{x}^{۲x} e^{-t^{۲}}dt$، به‌ازای کدام مقدار x بیشترین مقدار را دارد؟

۱) $\sqrt{\ln ۸}$ ۲) $\sqrt{\ln ۹}$ ۳) $\sqrt{\frac{۱}{۳}\ln ۲}$ ۴) $\sqrt{\frac{۱}{۲}\ln ۳}$

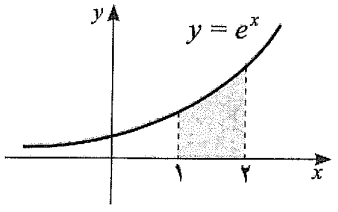
حل گزینه‌ی ۳. با فرض $g(x)=۲x$ و $h(x)=x$ داریم:

$$f'(x)=e^{-۴x^{۲}}\times ۲-e^{-x^{۲}}\times ۱,\ f'(x)=۰\Longrightarrow ۲e^{-۴x^{۲}}=e^{-x^{۲}}\Longrightarrow e^{۳x^{۲}}=۲$$

$$\Longrightarrow ۳x^{۲}=\ln ۲\Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۱}{۳}\ln ۲}$$

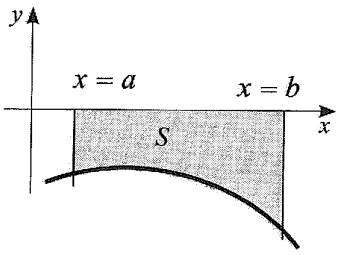
سطح محصور

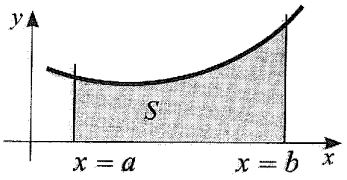
۶ـ۶۶ سطح محصور سطحی است که از هر طرف بسته باشد، مانند سطح محصور بین منحنی به‌معادله‌ی $y=e^{x}$ و محور xها و دو خط $x=۱$ و $x=۲$.



۶ـ۶۷ اندازه‌ی سطح محصور بین تابع به‌معادله‌ی $y = f(x)$ و محور xها و دو خط $x = a$ و $x = b$، $a < b$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید[۱].

$$S = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$





مثال سطح محصور بین منحنی $y = e^x$ و محور xها در فاصله‌ی $x = ۰$ تا $x = ۱$ را بیابید.

حل باید بررسی کنیم که این تابع در بازه‌ی $[۰, ۱]$ محور xها را قطع نکند، برای این کار باید معادله‌ی $y = ۰$ را حل کرد.

$$y = ۰ \Longrightarrow e^x = ۰ \Longrightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$S = \int_۰^۱ e^x\, dx = e^x \Big|_۰^۱ = e - ۱$$

مثال اندازه‌ی سطح محصور بین منحنی $y = ۱ + ۲ \sin x \cos x$ و دو خط $x = ۰$ و $x = \frac{\pi}{۴}$ چه‌قدر است؟

حل باید بررسی کنیم که این تابع در بازه‌ی $[۰, \frac{\pi}{۴}]$ محور xها را قطع نکند، برای این کار باید معادله‌ی $y = ۰$ را حل کرد.

$$y = ۰ \Longrightarrow ۱ + ۲ \sin x \cos x = ۰ \Longrightarrow ۱ + \sin ۲x = ۰ \Longrightarrow \sin ۲x = -۱$$

$$\Longrightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \qquad \begin{array}{c|cc} k & ۰ & ۱ \\ \hline x & -\frac{\pi}{۴} & \frac{۳\pi}{۴} \end{array}$$

هیچ‌کدام از جواب‌های معادله، در بازه‌ی $[۰, \frac{\pi}{۴}]$ واقع نیست، پس:

$$S = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} (۱ + \sin ۲x)dx = (x - \frac{۱}{۲} \cos ۲x)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۲}$$

تست سطح محدود به منحنی $y = \frac{۱}{x^۲ - x}$ محور xها و دو خط $x = ۲$ و $x = ۴$ کدام است؟

۱) $\ln(\frac{۲}{۳})$ ۲) $\ln(\frac{۳}{۴})$ ۳) $\ln(\frac{۳}{۲})$ ۴) $\ln(\frac{۴}{۳})$

حل گزینه‌ی ۳.

$$y = ۰ \Longrightarrow \frac{۱}{x^۲ - x} = ۰ \Longrightarrow \text{جواب ندارد}$$

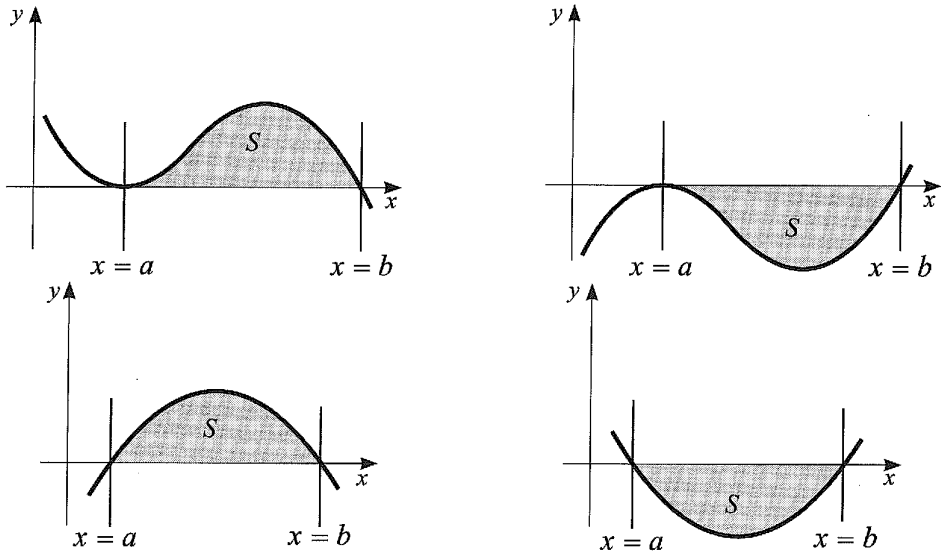
$$S = \int_۲^۴ \frac{۱}{x^۲ - x} dx = \int_۲^۴ (\frac{۱}{x - ۱} - \frac{۱}{x})dx = \ln(x - ۱) - \ln x \Big|_۲^۴ \Longrightarrow$$

$$S = \ln \frac{x - ۱}{x} \Big|_۲^۴ = \ln \frac{۳}{۴} - \ln \frac{۱}{۲} = \ln \frac{۳}{۲}$$

۱. می‌توانیم در حل، علامت قدرمطلق را نگذاریم، و هرگاه جواب مسأله‌ی سطح محصور عددی منفی شد، علامت $(-)$ را حذف کنیم.

۶ـ۶۸ اندازه‌ی سطح محصور بین نمودار تابع به‌معادله‌ی $y = f(x)$ و محور xها (به‌شرطی که منحنی تابع f محور xها را در دو نقطه قطع کند یا در یک نقطه قطع نماید و در نقطه‌ی دیگر بر محور xها مماس باشد.)

ابتدا معادله‌ی منحنی را با محور xها تقاطع می‌دهیم ($y = ۰$). از حل معادله‌ی حاصل a و b به‌دست می‌آید، سپس مانند فرمول حالت (۶-۷۳)، سطح را محاسبه می‌کنیم.



مثال اندازه‌ی سطح محصور بین نمودار تابع معادله‌ی $y = x^۲ - ۴x + ۳$ و محور xها را بیابید.

حل

$$f(x) = ۰ \Longrightarrow x^۲ - ۴x + ۳ = ۰ \Longrightarrow x = ۱\ ,\ x = ۳$$

$$S = \int_{۱}^{۳} (x^۲ - ۴x + ۳)dx = (\frac{x^۳}{۳} - ۲x^۲ + ۳x)\Big|_{۱}^{۳} = -\frac{۴}{۳}$$

جواب مسأله سطح محصور عددی منفی شد، علامت منفی را حذف می‌کنیم، پس $S = \frac{۴}{۳}$.

تست مساحت سطح محصور بین نمودار $y = x^۲ - ۱$ و محور xها کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

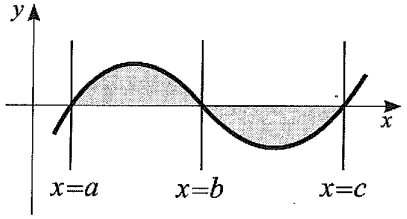
حل گزینه‌ی ۲.

$$y = ۰ \Longrightarrow x^۲ - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -۱\ ,\ x = ۱$$

$$S = \int_{-۱}^{۱} (x^۲ - ۱)dx = (\frac{x^۳}{۳} - x)\Big|_{-۱}^{۱} = -\frac{۴}{۳} \Longrightarrow S = \frac{۴}{۳}$$

۶ـ۶۹ اندازه‌ی سطح محصور بین نمودار تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ و محور xها به شرطی که منحنی تابع f محور xها را در سه نقطه به طول‌های a، b و c $(a < b < c)$ قطع کند از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم[۱].

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$$



۱. می‌توانیم در حل، علامت قدرمطلق را نگذاریم، و هرگاه جواب مسأله‌ی سطح محصور عددی منفی شد، علامت $(-)$ را حذف کنیم.

مثال اندازه‌ی سطح محصور بین منحنی به معادله‌ی $y = x^۳ - x$ و محور xها را بیابید.

حل

$$y = ۰ \Longrightarrow x^۳ - x = ۰ \Longrightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰\ ,\ x = ۱\ ,\ x = -۱$$

$$S = \int_{-۱}^{۰} (x^۳ - x)dx + \int_{۰}^{۱} (x^۳ - x)dx = (\frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۲}{۲})\Big|_{-۱}^{۰} + (\frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۲}{۲})\Big|_{۰}^{۱}$$

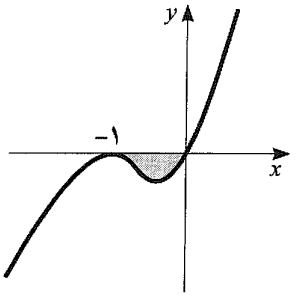
$$S = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۶ـ۷۰ در برخی موارد برای محاسبه‌ی سطح محصور باید نمودار تقریبی تابع را رسم کرد.

مثال سطح محصور بین منحنی $y = x^۳ + ۲x^۲ + x$ و محور xها را بیابید.

$$y = x^۳ + ۲x^۲ + x = x(x^۲ + ۲x + ۱) = x(x + ۱)^۲$$

بدیهی است که در نقاط $x = ۰$ و $x = -۱$، نمودار تابع محور xها را قطع می‌کند. اما به واسطه‌ی عبارت $(x + ۱)^۲$، در نقطه‌ی $x = -۱$، نمودار تابع بر محور xها مماس است. پس نمودار تقریبی تابع به شکل زیر است



$$S = \left|\int_{-۱}^{۰} (x^۳ + ۲x^۲ + x)dx\right|$$

$$S = \left|(\frac{x^۴}{۴} + \frac{۲}{۳}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲)\Big|_{-۱}^{۰}\right| = -\frac{۱}{۱۲}$$

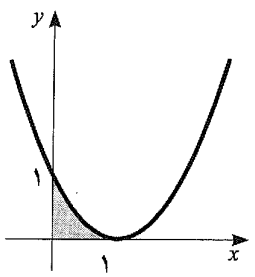
جواب مسأله‌ی سطح محصور عدد منفی شد، علامت منفی را حذف می‌کنیم، پس $S = \frac{۱}{۱۲}$.

تست سطح محصور بین منحنی $y = (x - ۱)^۲$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

حل گزینه‌ی ۴.

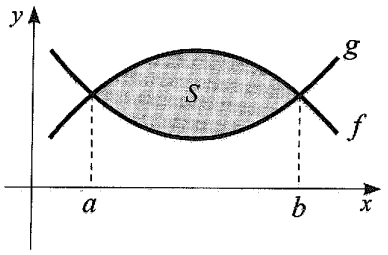
$$S = \int_{۰}^{۱} (x - ۱)^۲ dx = \frac{(x - ۱)^۳}{۳}\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۳}$$



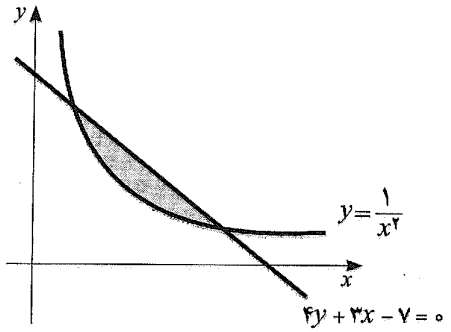
۶ـ۷۱ اگر سطح محصور بین نمودارهای دو تابع f و g را بخواهند، ابتدا نقاط تقاطع دو نمودار را به‌دست می‌آوریم. برای این کار معادله‌ی $f(x) = g(x)$ را حل می‌کنیم. فرض کنید $x = a$ و $x = b$ طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع‌اند. دراین‌صورت مساحت ناحیه‌ی محصور بین این دو منحنی از فرمول زیر به‌دست می‌آید[۱]

۱. می‌توانیم در حل، علامت قدرمطلق را نگذاریم، و هرگاه جواب مسأله‌ی سطح محصور عددی منفی شد، علامت $(-)$ را حذف کنیم.

$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$$



مثال مساحت سطح هاشورزده‌ی شکل مقابل چقدر است؟



حل ابتدا نقاط تلاقی خط و منحنی را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{7-3x}{4} \Longrightarrow 3x^3 - 7x^2 + 4 = 0 \Longrightarrow (x-1)(3x^2 - 4x - 4) = 0$$
$$\Longrightarrow x = 1\ ,\ x = 2\ ,\ x = -\frac{2}{3}$$

بنابراین $x = 1$ و $x = 2$ طول‌های نقاط تقاطع خط و منحنی مزبور در ناحیه‌ی اول می‌باشند. چون در بازه‌ی $[1, 2]$، نمودار خط، بالای نمودار منحنی مزبور است، پس:

$$S = \int_1^2 (\frac{7-3x}{4} - x^{\frac{1}{2}})dx = (\frac{7}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{x})\Big|_1^2 = \frac{1}{8}$$

مثال مساحت ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $y = x^3$ و $y = x^2$ را به‌دست آورید.

حل ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$x^3 = x^2 \Longrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0\ ,\ x = 1$$
$$S = \int_0^1 (x^3 - x^2)dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) - 0 = -\frac{1}{12}$$

جواب مسأله‌ی سطح محصور عددی منفی شد، علامت منفی را حذف می‌کنیم، پس $S = \frac{1}{12}$.

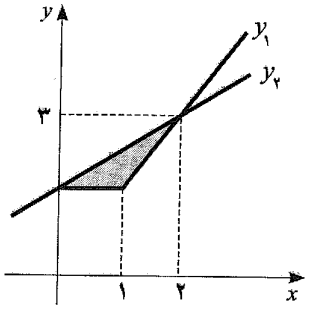
مثال مساحت ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $y = x + 1$ و $y = |x| + |x-1|$ را به‌دست آورید.

حل ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$|x|+|x-۱|=x+۱ \Longrightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$

$$S=\int_{۰}^{۱}[x+۱-(x-x+۱)]dx+\int_{۱}^{۲}[x+۱-(x+x-۱)]dx$$

$$S=\int_{۰}^{۱}(x)dx+\int_{۱}^{۲}(۲-x)dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}\Big|_{۰}^{۱}+(۲x-\frac{۱}{۲}x^{۲})\Big|_{۱}^{۲}=۱$$



تست سطح محصور بین منحنی تابع $y=x^{۳}$ و تابع معکوس آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۴}$

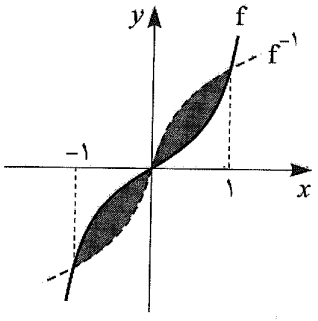
حل گزینه‌ی ۲. ابتدا تابع معکوس، تابع $y=x^{۳}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=x^{۳}\Longrightarrow x=\sqrt[۳]{y}\Longrightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

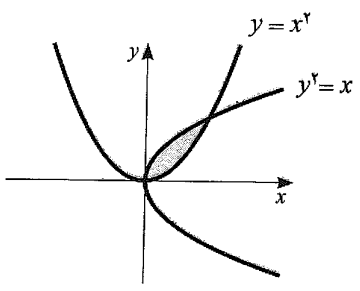
اکنون نقاط تلاقی دو منحنی $f(x)=x^{۳}$ و $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$ را پیدا می‌کنیم.

$$x^{۳}=\sqrt[۳]{x}\Longrightarrow x^{۹}-x=۰\Longrightarrow x(x^{۸}-۱)=۰\Longrightarrow x=۰\ ,\ x=۱\ ,\ x=-۱$$

$$S=۲\int_{۰}^{۱}(\sqrt[۳]{x}-x^{۳})dx=۲(\frac{۳}{۴}x\sqrt{x}-\frac{۱}{۴}x^{۴})\Big|_{۰}^{۱}\Longrightarrow S=۲(\frac{۱}{۲})=۱$$



تست مساحت ناحیه‌ی هاشورزده در شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

حل گزینه‌ی ۴.

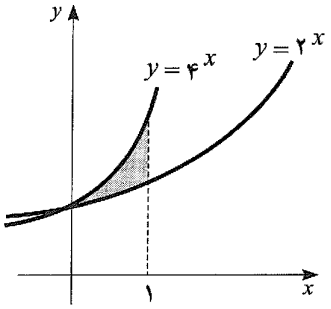
$$y^۲ = x \Longrightarrow (x^۲)^۲ = x \Longrightarrow x(x^۳ - ۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰\ ,\ x = ۱$$

$$S = \int_۰^۱ (\sqrt{x} - x^۲)dx = (\frac{۲}{۳}x\sqrt{x} - \frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_۰^۱ = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

تست مساحت ناحیه‌ی محصور به خط $x = ۱$ و منحنی‌های $y = ۲^x$ و $y = ۴^x$ کدام است؟

۱) $۲\ln ۲$ ۲) $\frac{۱}{۲\ln ۲}$ ۳) $\ln ۲$ ۴) $\frac{۱}{\ln ۲}$

حل گزینه‌ی ۲.



$$۲^x = ۴^x \Longrightarrow x = ۰$$

$$S = \int_۰^۱ (۴^x - ۲^x)dx = \left(\frac{۴^x}{\ln ۴} - \frac{۲^x}{\ln ۲}\right)\Bigg|_۰^۱ = \frac{۱}{۲\ln ۲}$$

محاسبه‌ی حجم جسم دوار

۶ـ۷۲ هرگاه سطح محصوری، حول محوری دوران کند، فضای اشغال شده را حجم سطح دوار یا حجم حادث گویند.

۶ـ۷۳ حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی به معادله‌ی $y = f(x)$ و دو خط $x = a$ و $x = b$، حول محور xها، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$v = \pi \int_a^b y^۲\, dx$$

مثال سطح محصور بین منحنی به معادله‌ی $f(x) = x^۲$ را حول محور xها و خط $x = ۰$ و $x = ۲$ دوران داده‌ایم، اندازه‌ی حجم حادث را بیابید.

حل

$$v = \pi \int_۰^۲ (x^۲)^۲\, dx = \pi \int_۰^۲ x^۴\, dx = \frac{\pi x^۵}{۵}\Big|_۰^۲ = \frac{۳۲\pi}{۵}$$

مثال سطح محصور بین منحنی به‌معادله‌ی $y = \sqrt{۲x - x^۲}$ و محور xها را حول محور xها دوران داده‌ایم، اندازه‌ی حجم حادث را بیابید.

حل

$$y = ۰ \Longrightarrow \sqrt{۲x - x^۲} = ۰ \Longrightarrow x(۲ - x) = ۰ \Longrightarrow x = ۰\ ,\ x = ۲$$

$$v = \pi \int_۰^۲ (\sqrt{۲x - x^۲})^۲ dx = \pi \int_۰^۲ (۲x - x^۲)dx = \pi(x^۲ - \frac{x^۳}{۳})\Big|_۰^۲ = \frac{۴\pi}{۳}\ .$$

تست حجم حاصل از دوران $y = \sqrt[۴]{۲۵ - ۱۰x^۲ + x^۴}$ در فاصله‌ی $[۱, ۲]$ حول محور xها کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۳) ۳π ۴) $\frac{۱۰\pi}{۳}$

حل گزینه‌ی ۲.

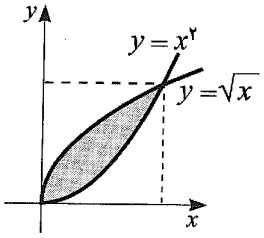
$$y=\sqrt[۴]{۲۵-۱۰x^۲+x^۴}=\sqrt[۴]{(۵-x^۲)^۲}=\sqrt{۵-x^۲}$$
$$v=\pi\int_۱^۲(\sqrt{۵-x^۲})^۲dx=\pi\int_۱^۲(۵-x^۲)\,dx=\pi(۵x-\frac{x^۳}{۳})\Big|_۱^۲=\frac{۸\pi}{۳}$$

۶ـ۷۴ حجم حادث از دوران سطح محصور به نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ و خط‌های $x=a$ و $x=b$، حول محور xها از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{v=\left|\pi\int_a^b\big(f^۲(x)-g^۲(x)\big)dx\right|}$$

مثال حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به نمودارهای $y=\sqrt{x}$ و $y=x^۲$ حول محور xها را بیابید.

حل ابتدا نقاط تقاطع دو نمودار را به‌دست می‌آوریم.



$$\begin{cases}y=x^۲\\ y=\sqrt{x}\end{cases}\Longrightarrow x^۲=\sqrt{x}\Longrightarrow x=۰\ ,\ x=۱$$
$$v=\pi\int_۰^۱\Big((\sqrt{x})^۲-(x^۲)^۲\Big)\,dx=\pi\int_۰^۱(x-x^۴)\,dx$$
$$v=\pi\left(\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۵}{۵}\right)\Big|_۰^۱=\frac{۳\pi}{۱۰}$$

۶ـ۷۵ اگر مسأله‌ی سطح یا مسأله‌ی حجم با محور yها باشد، از همان فرمول‌ها استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که جای x و y را در فرمول‌ها عوض می‌کنیم.

مثال اندازه‌ی جسم حاصل از دوران منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x}$، $y=۲$ و $y=۰$ حول محور yها را پیدا کنید.

حل از $y=\sqrt{x}$ نتیجه می‌شود که $y^۲=x$. بنابراین

$$v=\pi\int_a^b x^۲\,dy=\pi\int_۰^۲(y^۲)^۲dy=\frac{\pi y^۵}{۵}\Big|_۰^۲=\frac{۳۲\pi}{۵}$$

۶ـ۷۶ چند نکته:

۱) حجم کروی حادث از دوران دایره $x^۲+y^۲=R^۲$ حول محور xها برابر است با: $v=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$

۲) حجم کروی حادث از دوران بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ حول محور xها برابر است با: $v=\frac{۴}{۳}\pi ab^۲$

۳) حجم کروی حادث از دوران بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ حول محور yها برابر است با: $v=\frac{۴}{۳}\pi a^۲b$

۴) حجم کروی حادث از دوران بیضی $\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱$ حول محور xها برابر است با: $v=\frac{۴}{۳}\pi a^۲b$

۵) حجم کروی حادث از دوران بیضی $\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱$ حول محور yها برابر است با: $v=\frac{۴}{۳}\pi ab^۲$

انتگرال‌های ناسره

۶ـ۷۷ انتگرال‌هایی که یک یا هر دو حدّ انتگرال‌گیری آن‌ها بی‌نهایت و نیز انتگرال‌هایی که تابع زیر علامت انتگرال بی‌کران است، انتگرال‌های ناسره گویند.

۶ـ۷۸ انتگرال‌هایی که یک یا دو حد انتگرال‌گیری بی‌نهایت است: انتگرال‌های

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

ناسره می‌باشند، زیرا ∞ یک عدد نمی‌باشد و نمی‌تواند در $f(x)$ به‌جای x قرارگیرد. اما می‌توان آن‌ها را به‌عنوان حد تابع دیگر تعریف نمود.

۱) تعریف: اگر تابع $f(x)$ برای هر $x \geqslant a$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

۲) تعریف: اگر تابع $f(x)$ برای هر $x \leqslant b$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

در هر یک از حالت‌های فوق، اگر حد موجود و متناهی باشد، انتگرال ناسره همگرا نامیده می‌شود، ولی اگر حد موجود نباشد و یا بی‌نهایت باشد، آن را واگرا می‌نامیم.

۳) اگر تابع $f(x)$ برای همه xها پیوسته و c عددی حقیقی و دلخواه باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

اگر هر دو حد بالا موجود باشند، انتگرال ناسره را همگرا و در غیر این‌صورت آن را واگرا می‌نامیم.

مثال حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+5}$ ۲) $\int_{-\infty}^{0} (5-x)^{-2}\,dx$ ۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$

حل

۱)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+5} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5|\Big|_1^b = \ln|b+5| - \ln|1+5|$$

وقتی $b \to +\infty$، $\ln|b+5| \to +\infty$، در نتیجه انتگرال واگرا فاقد معناست.

۲)

$$\int_{-\infty}^{۵} (۵-x)^{-۲}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{۵}(۵-x)^{-۲}dx = (۵-x)^{-۱}\Big|_a^{۵} = \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۵-a}$$

وقتی $a \to -\infty$، $\frac{۱}{۵-a} \to ۰$ درنتیجه انتگرال هم‌گرا و برابر $\frac{۱}{۵}$ است.

۳)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^۲-۶x+۱۰} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-۳)^۲+۱}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^{c} \frac{dx}{(x-۳)^۲+۱} + \lim_{b\to+\infty}\int_c^{b} \frac{dx}{(x-۳)^۲+۱}$$

می‌توانیم c را هر نقطه‌ای در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ انتخاب کنیم، برای سادگی در محاسبات $c=۳$.

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{Arctan}(x-۳)\Big|_a^{۳} + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x-۳)\Big|_۳^{b}$$
$$= -\lim_{a\to-\infty} \operatorname{Arctan}(a-۳) + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{Arctan}(b-۳) = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} = \pi$$

تست حاصل $\int_۱^{+\infty} \frac{dx}{x(x+۱)}$ کدام است؟

۱) $-\ln ۳$ ۲) $-\ln ۲$ ۳) $\ln ۲$ ۴) $\ln ۳$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\int_۱^{+\infty} \frac{dx}{x(x+۱)} = \lim_{b\to+\infty}\int_۱^{b} \frac{dx}{x(x+۱)} = \lim_{b\to+\infty}\int_۱^{b} \frac{dx}{x} - \lim_{b\to+\infty}\int_۱^{b} \frac{dx}{x+۱}$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_۱^{b} - \lim_{b\to+\infty} \ln(x+۱)\Big|_۱^{b}$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \ln b - \ln ۱ - \lim_{b\to+\infty} \ln(b+۱) + \ln ۲$$
$$= \lim_{b\to+\infty} (\ln \frac{b}{b+۱}) + \ln ۲ = \ln ۱ + \ln ۲ = \ln ۲$$

تست حاصل $\int_۰^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۱.

$$I = \int_۰^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_۰^{\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{۲x}+۱}$$

$$u = e^x \Longrightarrow du = e^x\,dx\ ,\ x = ۰ \Longrightarrow u = ۱\ ,\ x = \infty \Longrightarrow u = \infty$$

$$I = \int_۱^{\infty} \frac{du}{u^۲+۱} = \tan^{-۱}(u)\Big|_۱^{\infty} = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

نحوه‌ی محاسبه انتگرال چندگانه

۶ـ۷۹ انتگرال‌گیری در انتگرال‌های چندگانه، از داخل به خارج است از این‌رو اولین علامت انتگرال مربوط به آخرین دیفرانسیل و به همین ترتیب دومین انتگرال مربوط به دیفرانسیل ما قبل آخر است، والی آخر.

مثال حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x\,dz\,dx\,dy$ ۲) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx$

حل

۱)

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x\,dz\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y^2}^1 xz\Big|_0^{1-x} dx\,dy$$
$$= \int_0^1 \int_{y^2}^1 (x-x^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{y^2}^1 dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{3}y^6\right)dy = \left(\frac{1}{6}y-\frac{1}{10}y^5+\frac{1}{21}y^7\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{35}$$

۲)

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x e^{x+y+z}\Big|_0^{x+y} dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^x e^{2x+2y}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x+2y}\Big|_0^x dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}e^{4x}dx = \frac{1}{8}e^{4x}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{8}$$

تست حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^z \int_0^y \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۱.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^z -\cos(x+y+z)\Big|_0^y dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^z \left(-\cos(2y+z)+\cos(y+z)\right) dy\,dz$$
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\sin(2y+z)+\sin(y+z)\right)\Big|_0^z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\sin 3z+\sin 2z+\frac{1}{2}\sin z-\sin z\right) dz$$
$$I=\left(\frac{1}{6}\cos 3z-\frac{1}{2}\cos 2z+\frac{1}{2}\cos z\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{6}$$

تست‌های فصل ۶

۱. اگر $\int ۲f'(ax-b)dx = f(ax+۳)+c$ باشد، مقدار $(a-b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) -۵

۲. اگر $\int f(x)dx = \sqrt{x}+c$، آنگاه $\int \frac{۱}{f(x)}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{x}}+c$ ۲) $\frac{x}{۲\sqrt{x}}+c$ ۳) $\frac{۱}{۲x\sqrt{x}}+c$ ۴) $\frac{۴}{۳}\sqrt{x}+c$

۳. حاصل $\int \frac{e^{۳x}+۱}{e^x+۱}dx$ به‌ازای $c=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}e^{۲x}-e^x+x$ ۲) $e^{۲x}-e^x+x$ ۳) $\frac{۱}{۲}e^{۲x}+e^x+x$ ۴) $e^{۲x}+e^x+x$

۴. حاصل $\int \frac{(۱+x)^۲}{۱+x^۲}dx$ کدام است؟

۱) $x+\ln(۱+x^۲)+c$ ۲) $\ln(x^۲+۱)+c$

۳) $x^۲+\ln(x^۲+۱)+c$ ۴) $x^۲-\ln(x^۲+۱)+c$

۵. حاصل $\int \frac{x^۲}{۱+x^۲}dx$ کدام است؟

۱) $x+\operatorname{Arctan}x+c$ ۲) $x-\operatorname{Arccot}x+c$ ۳) $\operatorname{Arccot}x+c$ ۴) $x-\operatorname{Arctan}x+c$

۶. حاصل $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ کدام است؟

۱) $\operatorname{Arccot}e^x+c$ ۲) $\operatorname{Arcsin}e^x+c$ ۳) $\operatorname{Arctan}e^x+c$ ۴) $\operatorname{Arccos}e^x+c$

۷. اگر حاصل انتگرال $\int x\sqrt[۳]{x}dx$ به‌ازاء $x=۱$ برابر ۲ باشد، عدد ثابت انتگرال‌گیری چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۷}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱۱}{۷}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۸. اگر ثابت انتگرال‌گیری $c=۱$ فرض شود، انتگرال $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$ کدام است؟

۱) $\ln(\ln x)+۱$ ۲) $\ln\ln(\ln x)+۱$ ۳) $x\ln(\ln x)+۱$ ۴) $\frac{x}{\ln x}+۱$

۹. اگر $I(x)=\int xe^{-x}dx$ و ثابت انتگرال‌گیری $c=۱$ باشد، $I(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{e-۲}{e}$ ۲) $\frac{۲-e}{e}$ ۳) $\frac{۲+e}{e}$ ۴) $\frac{e-۱}{e}$

۱۰. اگر حاصل انتگرال $\int \ln x dx$ به‌ازای $x=۱$ برابر ۱ باشد، عدد ثابت انتگرال‌گیری چه‌قدر است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۱. حاصل $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$ به ازای $c=0$ و $x=1$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

۱۲. حاصل $\int \sqrt{x}\ln x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + c$
۲) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x + \frac{4}{9}x\sqrt{x} + c$
۳) $x\sqrt{x}\ln x - x\sqrt{x} + c$
۴) $x\sqrt{x}\ln x + x\sqrt{x} + c$

۱۳. $I = \int \frac{dx}{9+x^2}$، I کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}\text{Arcsin}\left(\frac{x}{3}\right) + c$
۲) $\frac{1}{3}\text{Arctan}\left(\frac{x}{3}\right) + c$
۳) $\frac{1}{3}\text{Arccos}\left(\frac{x}{3}\right) + c$
۴) $\frac{1}{3}\text{Arccot}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

۱۴. تابع اولیه‌ی $f(x) = (\ln x)^2$ کدام است؟

۱) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$
۲) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x - 2x + c$
۳) $x(\ln x)^2 + 2x\ln x + 2x + c$
۴) $x(\ln x)^2 + 2x\ln x - 2x + c$

۱۵. حاصل $\int_{-3}^{3}([x]+[-x])dx$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -5 ۳) ۶ ۴) -6

۱۶. حاصل $\int_{-1}^{2}|2x|(1+x^2)dx$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۳۱ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{27}{2}$

۱۷. حاصل $\int_{0}^{3}\frac{dx}{36-x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}\ln 3$ ۲) $\frac{1}{6}\ln 3$ ۳) $\ln 6$ ۴) $\ln 2$

۱۸. $f(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$ و $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ و $F(1)=1$ است، $F(0)$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) -2

۱۹. هرگاه $\int_{1}^{2} f(x)dx = 3$، آنگاه مقدار $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۰. اگر $g(1)=1$ و برای هر $x>0$، $g'(x^2)=x^3$، $g(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{64}{5}$ ۲) ۱۳ ۳) $\frac{66}{5}$ ۴) $\frac{67}{5}$

۲۱. حاصل $\int \frac{dx}{x^2(1+x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{x} + \ln\frac{x+1}{x} + c$
۲) $\frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1} + c$
۳) $-\frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1} + c$
۴) $-\frac{1}{x} + \ln\frac{x+1}{x} + c$

۲۲. اگر ثابت انتگرال‌گیری $c = -1$ فرض شود، حاصل انتگرال $\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$ به‌ازای $x = 0$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۳. اگر $f(x) = \int \frac{dx}{x \ln x}$ و $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد، حاصل $F(e^3) - F(e)$ کدام است؟

۱) $3e$ ۲) $\ln 3$ ۳) e ۴) e^3

۲۴. حاصل $I = \int_{-\pi}^{\pi} x^{10} \sin x \, dx dx$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۰

۲۵. در تابع $f(x) = \begin{cases} 3x & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 2x - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$ ، مقدار $\int_0^2 f(x)dx$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۲۶. اگر $\int_3^a 3x^2 dx = 37$، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

۲۷. مقدار انتگرال معین $\int_0^2 x f''(x)dx$ کدام است؟

۱) $2f'(2) - f(2) + f(0)$
۲) $2f'(2) + f(2) - f(0)$
۳) $2f''(2) - f'(2) + f(2)$
۴) $f'(2) - f(2) + f(0)$

۲۸. حاصل انتگرال $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $4 - \ln 9$ ۲) $9 - \ln 4$ ۳) $4 + \ln 9$ ۴) $9 + \ln 4$

۲۹. حاصل $\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} (t^2 + 1)^3 dt$ کدام است؟

۱) $\cos x(\sin^2 x + 1)^3$
۲) $\sin x(\cos^2 x + 1)^3$
۳) $-\cos x(\sin^2 x + 1)^3$
۴) $-\sin x(\cos^2 x + 1)^3$

۳۰. حاصل $\lim_{x \to \infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) e^2 ۳) $\ln 2$ ۴) e

۳۱. اگر منحنی تابع $f(x)$ از نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ بگذرد و $f'(x)$ پیوسته باشد، مقدار $\int_0^1 f'(x)dx$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۳۲. اگر $F(x) = \int (x^3 + x)dx + c$، مقدار $F''(2)$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۳۳. حاصل $I = \int_1^{\infty} \frac{2dx}{x}$، I کدام است؟

۱) ۰ ۲) $2 \ln 2$ ۳) ۲ ۴) نامعین

۳۴. اکسترمم‌های تابع $f(x)=\int_{0}^{x} te^{-t^2}dt$ در کدام نقطه اتفاق می‌افتد؟

۱) $(0,0)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(0,e)$

۳۵. طول نقطه عطف نمودار تابع $y=\int_{0}^{x}(t^2-3t+2)dt$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۲

۳۶. حاصل انتگرال $\int_{1}^{e}\frac{(\ln x)^2 dx}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) ۰

۳۷. اگر $f''(x)=\sin(\frac{x}{2})$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}+2x+c$ ۲) $-4\sin\frac{x}{2}+c$

۳) $4\sin\frac{x}{2}+cx+d$ ۴) $-4\sin\frac{x}{2}+cx+d$

۳۸. اگر $\int_{x}^{4x-3} f(t)dt=x^3+9x+1$، آنگاه $f(1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۹. در انتگرال معین $A=\int_{0}^{1}\frac{(2x^3+2x+1)dx}{x^2+1}$ مقدار A برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) ۱ ۳) $1+\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴۰. اگر $\int\frac{(x^2-1)dx}{x^2}=\frac{f(x)}{x}+c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2+1 ۲) x^2-2 ۳) $2x+1$ ۴) $x+1$

۴۱. اگر $f(x)=\int_{1}^{x} t^t dt$، آنگاه $f''(x)$ کدام است؟

۱) $(\ln x+1)f'(x)$ ۲) $\ln x f'(x)$ ۳) $e^{x\ln x}f'(x)$ ۴) $x\ln x f'(x)$

۴۲. معادله‌ی منحنی‌ای که شیب آن برابر $\frac{dy}{dx}=e^x(x+1)$ باشد و از مبدأ مختصات بگذرد، کدام است؟

۱) $y=xe^x+1$ ۲) $y=xe^x-1$ ۳) $y=xe^x$ ۴) $y=e^x+1$

۴۳. معادله‌ی منحنی‌ای را که در آن $y'''=4$ باشد و در نقطه‌ی $(0,2)$ دارای شیب صفر و در $\left(-1,\frac{10}{3}\right)$ نقطه‌ی عطف باشد، کدام است؟

۱) $y=\frac{2}{3}x^3+2x^2+2$ ۲) $y=\frac{2}{3}x^3+2x^2$

۳) $y=2x^2+4x+1$ ۴) $y=\frac{2}{3}x^3+2x^2+4$

۴۴. معادله‌ی منحنی‌ای که در آن $y''=x^2-x+1$ و در مبدأ مینیمم باشد، کدام است؟

۱) $y=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+1$ ۲) $y=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2$

۳) $y=x^4-x^3+x^2$ ۴) $y=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2$

۴۵. معادله منحنی‌یی که در نقطه‌ای به‌طول ۱، بر خط $y = x - ۲$ مماس باشد و داشته باشیم $\frac{d^۲y}{dx^۲} = ۶x$، کدام است؟

۱) $y = x^۳ - ۲x - ۱$ ۲) $y = x^۳ - ۲x - ۲$ ۳) $y = x^۳ - ۲x$ ۴) $y = x^۳ - ۲x + ۴$

۴۶. مقدار $\int_{-۱}^{۱} |x + |x||dx$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۴۷. مساحت ناحیه‌ی محدود بین نمودارهای $y = x^۲$ و $y = ۲x$ و $y = x$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۶}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۴۸. مساحت سطح محصور بین منحنی به معادله $y = x^۲ - ۲|x|$ و محور xها کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۴۹. سطح محصور بین منحنی $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ و محور xها چه‌قدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

۵۰. مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $y = ۲^x$ و $y = ۲^{-x}$ و خط $x = ۲$ کدام است؟ $(\ln ۲ = ۰/۶۹۳)$

۱) ۳/۲۵ ۲) ۲/۷۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۵۱. فرض کنید $f(x) = x - x^۲$ و $g(x) = ax$ باشد، اگر ناحیه‌ی بالای نمودار g و پایین نمودار f دارای مساحتی برابر $\frac{۹}{۲}$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۵۲. مساحت ناحیه محصور توسط محور xها و $y = (x - ۳)(x - ۲)(x + ۱)$، $x = ۰$ و $x = ۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۷۱}$ ۲) $\frac{۷۱}{۶}$ ۳) ۷ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۵۳. مساحت محدود به منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۵۴. مساحت ناحیه‌ی مثلث شکلی که در ربع اول بین محور yها و منحنی‌های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ محصور شده، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲} + ۱$ ۲) $\sqrt{۲} - ۱$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۲}$

۵۵. سطح محصور بین منحنی $xy = ۱$ و محور xها و دو خط $x = a - ۱$ و $x = a + ۱$ چه‌قدر است؟ $(a > ۱)$

۱) $\ln \frac{a - ۱}{a + ۱}$ ۲) $\ln(a + ۱)$ ۳) $\ln \frac{a + ۱}{a - ۱}$ ۴) $\ln(a - ۱)$

۵۶. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ - x^۲ & x \geqslant ۲ \\ x - ۵ & x < ۲ \end{cases}$ و خط‌های $x = ۱$ و $x = ۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵۳}{۶}$

۵۷. حاصل $\int \frac{dx}{x^۲ + ۷x + ۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵} \ln \left|\frac{x + ۱}{x + ۶}\right| + c$ ۲) $\ln \left|\frac{x + ۱}{x - ۶}\right| + c$ ۳) $\frac{۱}{۵} \ln \left|\frac{x - ۱}{x + ۶}\right| + c$ ۴) $\frac{۱}{۵} \ln \left|\frac{x - ۱}{x + ۶}\right| + c$

۵۸. حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{۲۰ + ۸x - x^۲}}$ کدام است؟

۱) $\text{Arctan}\frac{x+۴}{۶} + c$

۲) $\text{Arcsin}\frac{x+۴}{۶} + c$

۳) $\text{Arctan}\frac{x-۴}{۶} + c$

۴) $\text{Arcsin}\frac{x-۴}{۶} + c$

۵۹. مقدار $\int_{-۱}^{۱} e^{-x^۲} d(x|x|)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) $۲(۱ + e^{-۱})$ ۴) $۲(۱ - e^{-۱})$

۶۰. مقدار انتگرال $I = \int_{۰}^{۲} \frac{(t^۲ + ۲t + ۲)dt}{t^۲ + ۲t + ۱}$، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۶

۱. گزینه‌ی ۳.

$$u = ax - b \Longrightarrow du = a\,dx$$

$$\int ۲f'(ax-b)dx = \frac{۲}{a}\int f'(u)du = \frac{۲}{a}f(u) + c = \frac{۲}{a}f(ax-b) + c$$

$$\Longrightarrow \frac{۲}{a}f(ax-b) + c = f(ax+۳) + c \Longrightarrow a = ۲, b = -۳ \Longrightarrow a - b = ۵$$

۲. گزینه‌ی ۴.

$$\int f(x)dx = \sqrt{x} + c \Longrightarrow (\sqrt{x} + c)' = f(x) \Longrightarrow f(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{۱}{f(x)}dx = \int ۲\sqrt{x}dx = ۲(\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}) + c = \frac{۴}{۳}x\sqrt{x} + c$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$\int \frac{e^{۳x} + ۱}{e^x + ۱}dx = \int \frac{(e^x + ۱)(e^{۲x} - e^x + ۱)}{e^x + ۱}dx = \int (e^{۲x} - e^x + ۱)dx = \frac{۱}{۲}e^{۲x} - e^x + x$$

۴. گزینه‌ی ۱.

$$\int \frac{۱ + x^۲ + ۲x}{۱ + x^۲}dx = \int \frac{۱ + x^۲}{۱ + x^۲}dx + \int \frac{۲x}{۱ + x^۲}dx = x + \ln(۱ + x^۲) + c$$

۵. گزینه‌ی ۴.

$$\int \frac{x^۲}{۱ + x^۲}dx = \int \left(۱ - \frac{۱}{۱ + x^۲}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{۱ + x^۲} = x - \text{Arctan}\,x + c$$

۶. گزینه‌ی ۳.

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{۱}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{۲x} + ۱}, e^x = \tan t \Longrightarrow e^x dx = (۱ + \tan^۲ t)dt,$$

$$t = \text{Arctan}\,e^x\ ,\ I = \int \frac{۱ + \tan^۲ t}{۱ + \tan^۲ t}dt = \int dt = t + c = \text{Arctan}\,e^x + c$$

۷. گزینه‌ی ۲.

$$\int x\sqrt[۳]{x}dx = \int x.x^{۱/۳}dx = \int x^{۴/۳}dx = \frac{۳}{۷}x^{۷/۳} + c$$
$$\frac{۳}{۷} + c = ۲ \Longrightarrow c = ۲ - \frac{۳}{۷} \Longrightarrow c = \frac{۱۱}{۷}$$

۸. گزینه‌ی ۲.

$$\ln(\ln x) = u \Longrightarrow \frac{\frac{۱}{x}}{\ln x}dx = du \Longrightarrow \frac{dx}{x\ln x} = du$$
$$I = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln\ln(\ln x) + c \xrightarrow{c=۱} I = \ln\ln(\ln x) + ۱$$

۹. گزینه‌ی ۱.

$$x = u \Longrightarrow dx = du, e^{-x}dx = dv \Longrightarrow -e^{-x} = v$$
$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$
$$I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + c \xrightarrow{c=۱} I(۱) = -۲e^{-۱} + ۱ = \frac{e-۲}{e}$$

۱۰. گزینه‌ی ۴.

$$\ln x = u \Longrightarrow \frac{۱}{x}dx = du, dx = dv \Longrightarrow x = v$$
$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x.\frac{۱}{x}dx = x\ln x - x + c$$
$$\ln(۱) - ۱ + c = ۱ \Longrightarrow c = ۲$$

۱۱. گزینه‌ی ۱.

$$u = \ln x \Longrightarrow dx = \frac{۱}{x}dx$$
$$I = \int \sin u\, du = -\cos u + c = -\cos(\ln x) + c \underset{c=۰}{\xrightarrow{x=۱}} = -\cos(۰) = -۱$$

۱۲. گزینه‌ی ۱.

$$\ln x = u \Longrightarrow \frac{dx}{x} = du, \sqrt{x}dx = dv \Longrightarrow \frac{۲}{۳}x\sqrt{x} = v$$
$$\int \sqrt{x}\ln x dx = \frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\ln x - \frac{۲}{۳}\int \sqrt{x}dx = \frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\ln x - \frac{۴}{۹}x\sqrt{x} + c$$

۱۳. گزینه‌ی ۲.

$$I = \int \frac{dx}{۹ + x^۲} = \int \frac{dx}{۹\left(۱ + \frac{x^۲}{۹}\right)} = \frac{۱}{۹}\int \frac{dx}{۱ + \left(\frac{x}{۳}\right)^۲}, u = \frac{x}{۳} \Longrightarrow du = \frac{۱}{۳}dx$$
$$I = \frac{۱}{۳}\int \frac{du}{۱ + u^۲} = \frac{۱}{۳}\operatorname{Arctan} u = \frac{۱}{۳}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{۳}\right) + c$$

۱۴. گزینه‌ی ۱.

$$(\ln x)^۲ = u \Longrightarrow \frac{۲}{x}\ln x dx = du, dx = dv \Longrightarrow x = v$$
$$\int (\ln x)^۲ dx = x(\ln x)^۲ - ۲\int \ln x dx, \ln x = u \Longrightarrow \frac{dx}{x} = du, dx = dv \Longrightarrow x = v$$
$$\int (\ln x)^۲ dx = x(\ln x)^۲ - ۲\left(x\ln x - \int dx\right) = x(\ln x)^۲ - ۲x\ln x + ۲x + c$$

۱۵. گزینه‌ی ۴.

$$\int_a^b ([x] + [-x])dx = \int_a^b (-۱)dx \qquad a, b \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-۳}^{۳} ([x] + [-x]dx = \int_{-۳}^{۳} (-۱)dx = -(۳ + ۳) = -۶$$

۱۶. گزینه‌ی ۴.

$$\int_{-۱}^{۲} |۲x|(x^۲ + ۱)dx = \int_{-۱}^{۰} (-۲x)(۱ + x^۲)dx + \int_{۰}^{۲} (۲x)(۱ + x^۲)dx =$$
$$\int_{-۱}^{۰} (-۲x - ۲x^۳)dx + \int_{۰}^{۲} (۲x + ۲x^۳)dx = (-x^۲ - \frac{۱}{۲}x^۴)\Big|_{۰}^{۱} + (x^۲ + \frac{۱}{۲}x^۴)\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۲۷}{۲}$$

۱۷. گزینه‌ی ۱.

$$\int_{۰}^{۳} \frac{dx}{۶^۲ - x^۲} = \frac{۱}{۱۲}\ln\left|\frac{۶ + x}{۶ - x}\right|\Big|_{۰}^{۳} = \frac{۱}{۱۲}\ln\left|\frac{۹}{۳}\right| - \frac{۱}{۱۲}\ln|۱| = \frac{۱}{۱۲}\ln ۳$$

۱۸. گزینه‌ی ۴.

$$f(x) = ۸(x + ۱)^{-۳} \Longrightarrow F(x) = -۴(x + ۱)^{-۲} + c = \frac{-۴}{(x + ۱)^۲} + c$$
$$F(۱) = -\frac{۴}{۴} + c = ۱ \Longrightarrow c = ۲ \Longrightarrow F(x) = \frac{-۴}{(x + ۱)^۲} + ۲ \Longrightarrow F(۰) = -۲$$

۱۹. گزینه‌ی ۲.

$$u = \frac{۱}{x} \Longrightarrow du = \frac{-۱}{x^۲}dx$$
$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{۱}{x^۲} f(\frac{۱}{x})dx = \int_{۲}^{۱} -f(u)du = \int_{۱}^{۲} f(u)du = ۳$$

۲۰. گزینه‌ی ۴.

$$y = g(x^۲) \Longrightarrow y' = ۲xg'(x^۲) = ۲x \cdot x^۳ = ۲x^۴$$
$$\text{انتگرال} \Longrightarrow y = g(x^۲) = \frac{۲}{۵}x^۵ + c\ ,\ g(۱) = ۱ \Longrightarrow c = \frac{۳}{۵}$$
$$\Longrightarrow g(x^۲) = \frac{۲}{۵}x^۵ + \frac{۳}{۵} \xrightarrow{x=۲} g(۴) = \frac{۶۷}{۵}$$

۲۱. گزینه‌ی ۴.

$$\int \frac{dx}{x^۲(۱+x)} = \int \frac{(۱+x)-x}{x^۲(۱+x)}dx = \int \frac{dx}{x^۲} - \int \frac{dx}{x(۱+x)} = \int x^{-۲}dx - \int \frac{(۱+x)-x}{x(۱+x)}dx$$
$$= -\frac{۱}{x} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{۱+x} = -\frac{۱}{x} - \ln x + \ln(۱+x) + c = -\frac{۱}{x} + \ln \frac{x+۱}{x} + c$$

۲۲. گزینه‌ی ۱.

$$x+۱ = t \Longrightarrow dx = dt \Longrightarrow I = \int \frac{(t-۱)e^{t-۱}}{t^۲}dt$$
$$I = \int \frac{e^{t-۱}}{t}dt - \int \frac{e^{t-۱}}{t^۲}dt \ , \ e^{t-۱} = u \Longrightarrow e^{t-۱}dt = du, \frac{dt}{t^۲} = dv \Longrightarrow v = -\frac{۱}{t}$$
$$I = \int \frac{e^{t-۱}}{t}dt - \left(-\frac{۱}{t}e^{t-۱} + \int \frac{۱}{t}e^{t-۱}dt\right) = \int \frac{e^{t-۱}}{t}dt + \frac{۱}{t}e^{t-۱} - \int \frac{e^{t-۱}}{t}dt$$
$$I = \frac{۱}{t}e^{t-۱} + c = \frac{e^x}{x+۱} + c \xrightarrow{c=-۱, x=۰} I = ۱ - ۱ = ۰$$

۲۳. گزینه‌ی ۲.

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{۱}{x}}{\ln x}dx = \ln(\ln x) \Longrightarrow F(x) = \ln(\ln x)$$
$$F(e^۳) - F(e) = \ln(\ln e^۳) - \ln(\ln e) = \ln ۳ - \ln ۱ = \ln ۳$$

۲۴. گزینه‌ی ۴. به‌ترتیب $\sin^۳ x$ و $x^{۱۰}$ توابعی فرد و زوج هستند و می‌دانیم حاصل‌ضرب آن‌ها یک تابع فرد است:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{۱۰}\sin^۳ x dx = ۰$$

۲۵. گزینه‌ی ۳.

$$\int_۰^۲ f(x)dx = \int_۰^۱ ۳x dx + \int_۱^۲ (۲x-۱)dx = \frac{۳}{۲}x^۲\Big|_۰^۱ + (x^۲ - x)\Big|_۱^۲ = \frac{۷}{۲}$$

۲۶. گزینه‌ی ۱.

$$\int_۳^a ۳x^۲dx = x^۳\Big|_۳^a = ۳۷ \Longrightarrow a^۳ - ۲۷ = ۳۷ \Longrightarrow a^۳ = ۶۴ \Longrightarrow a = ۴$$

۲۷. گزینه‌ی ۱.

$$u = x \Longrightarrow du = dx, dv = f''(x)dx \Longrightarrow v = f'(x)$$
$$I = xf'(x)\Big|_۰^۲ - \int_۰^۲ f'(x)dx = xf'(x)\Big|_۰^۲ - f(x)\Big|_۰^۲ = ۲f'(۲) - f(۲) + f(۰)$$

۲۸. گزینه‌ی ۱.

$$x = t^۲ \Longrightarrow dx = ۲t\,dt$$

$$\int_۰^۴ \frac{dx}{۱+\sqrt{x}} = \int_۰^۲ \frac{۲t\,dt}{۱+t} = \int_۰^۲ (۲ - \frac{۲}{۱+t})dt = (۲t - ۲\ln(۱+t))\Big|_۰^۲ = ۴ - \ln ۹$$

۲۹. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{d}{dx}\int_۱^{\sin x} (t^۲+۱)^۳ dt = (\sin^۲ x + ۱)^۳ . \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x(\sin^۲ x + ۱)^۳$$

۳۰. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{۲x} \frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty}(\ln t)\Big|_x^{۲x} = \lim_{x\to\infty}[\ln(۲x) - \ln(x)] = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{۲x}{x}\right) = \ln ۲$$

۳۱. گزینه‌ی ۳.

$$\int_۰^۱ f'(x)dx = f(x)\Big|_۰^۱ = f(۱) - f(۰) = ۱ - ۰ = ۱$$

۳۲. گزینه‌ی ۱.

$$F'(x) = x^۳ + x \Longrightarrow F''(x) = ۳x^۲ + ۱ \Longrightarrow F''(۲) = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

۳۳. گزینه‌ی ۴.

$$\int_۱^{\infty} \frac{۲}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_۱^b \frac{۲}{x}dx = ۲\ln|x|\Big|_۱^b = ۲\ln|b| - ۲\ln|۱| = ۲\ln|b|$$

اگر $b \to \infty$، $۲\ln|b| \longrightarrow \infty$. در نتیجه انتگرال ناسره واگراست و دارای مقدار معینی نمی‌باشد.

۳۴. گزینه‌ی ۱.

$$f'(x) = xe^{-x^۲} \Longrightarrow xe^{-x^۲} = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \Longrightarrow y = f(۰) = ۰ \Longrightarrow (۰,۰)$$

۳۵. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{dy}{dx} = x^۲ - ۳x + ۲ \Longrightarrow \frac{d^۲y}{dx^۲} = ۲x - ۳ = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

۳۶. گزینه‌ی ۱.

$$u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x}, x = ۱ \Longrightarrow u = ۰, x = e \Longrightarrow u = ۱$$

$$I = \int_۱^e \frac{(\ln x)^۲}{x}dx = \int_۰^۱ u^۲ . du = \frac{۱}{۳}u^۳\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۳}$$

۳۷. گزینه‌ی ۴.

$$f''(x) = \sin\frac{x}{۲} \Longrightarrow f'(x) = -۲\cos\frac{x}{۲} + c \Longrightarrow f(x) = -۴\sin\frac{x}{۲} + cx + d$$

۳۸. گزینه‌ی ۴. از طرفین تساوی داده شده، نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$۴f(۴x-۳)-f(x)=۳x^۲+۹$$

به‌ازای $x=۱$ داریم:

$$۴f(۱)-f(۱)=۱۲\Longrightarrow f(۱)=۴$$

۳۹. گزینه‌ی ۳.

$$A=\int_۰^۱\left(۲x+\frac{۱}{x^۲+۱}\right)dx=(x^۲+\operatorname{Arctan}x)\Big|_۰^۱=۱+\frac{\pi}{۴}$$

۴۰. گزینه‌ی ۱.

$$\int\left(۱-\frac{۱}{x^۲}\right)dx=x+\frac{۱}{x}+c=\frac{x^۲+۱}{x}+c\Longrightarrow f(x)=x^۲+۱$$

۴۱. گزینه‌ی ۱.

$$f(x)=\int_۱^x t^t dt\Longrightarrow f'(x)=x^x=e^{x\ln x}\Longrightarrow f''(x)=(\ln x+۱)e^{x\ln x}$$
$$f''(x)=(\ln x+۱)x^x=(\ln x+۱)f'(x)$$

۴۲. گزینه‌ی ۳.

$$\int dy=\int e^x(x+۱)dx,\ u=x+۱\Longrightarrow du=dx,e^x dx=dv\Longrightarrow e^x=v$$
$$y=(x+۱)e^x-\int e^x dx\Longrightarrow y=(x+۱)e^x-e^x+c\Longrightarrow y=xe^x+c$$
$$\text{مبدأ مختصات}(۰,۰)\Longrightarrow ۰=۰+c\Longrightarrow c=۰\Longrightarrow y=xe^x$$

۴۳. گزینه‌ی ۱.

$$y'''=۴\Longrightarrow y''=۴x+c\xrightarrow{\text{نقطه عطف}}۰=-۴+c\Longrightarrow c=۴$$
$$y''=۴x+۴\Longrightarrow y'=۲x^۲+۴x+c\xrightarrow{(۰,۲)\text{ با شیب صفر}}۰=۰+۰+c\Longrightarrow c=۰$$
$$y'=۲x^۲+۴x\Longrightarrow y=\frac{۲}{۳}x^۳+۲x^۲+c\xrightarrow{(۰,۲)\text{ نقطه}}۲=۰+۰+c\Longrightarrow c=۲$$

۴۴. گزینه‌ی ۲.

$$y'=\int(x^۲-x+۱)dx\Longrightarrow y'=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۱}{۲}x^۲+x+c\xrightarrow{\min(۰,۰)}c=۰$$
$$y=\int\left(\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۱}{۲}x^۲+x\right)dx\Longrightarrow y=\frac{۱}{۱۲}x^۴-\frac{۱}{۶}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲+c\xrightarrow{(۰,۰)\text{ مبدأ}}c=۰$$

۴۵. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = ۶x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = ۳x^۲ + c, y = x - ۲ \Longrightarrow m = y' = ۱$$

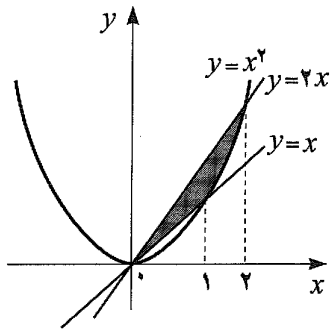
نقطه‌ای به‌طول ۱ : $۱ = ۳ + c \Longrightarrow c = -۲ \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = ۳x^۲ - ۲ \Longrightarrow y = x^۳ - ۲x + c,$

نقطه‌ای به طول ۱ : $y = ۱ - ۲ = -۱ \Longrightarrow (۱, -۱) \Longrightarrow -۱ = ۱ - ۲ + c \Longrightarrow c = ۰ \Longrightarrow y = x^۳ - ۲x$

۴۶. گزینه‌ی ۲.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & x \geqslant ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases} \Longrightarrow \int_{-۱}^{۱} |x + |x||dx = \int_{۰}^{۱} ۲x dx = x^۲\Big|_{۰}^{۱} = ۱$$

۴۷. گزینه‌ی ۱.



$$S = \int_{۰}^{۱} (۲x - x)dx + \int_{۱}^{۲} (۲x - x^۲)dx$$

$$S = \frac{۱}{۲}x^۲\Big|_{۰}^{۱} + (x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۷}{۶}$$

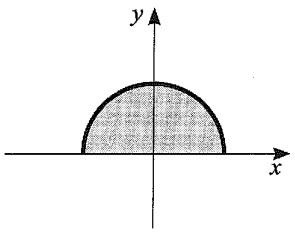
۴۸. گزینه‌ی ۲.

$$x^۲ - ۲|x| = ۰ \Longrightarrow |x|.(|x| - ۲) = ۰ \Longrightarrow x = ۰, x = \pm ۲$$

به دلیل تقارن منحنی نسبت به محور عرض‌ها می‌توان نوشت:

$$S = \left| ۲ \int_{۰}^{۲} (x^۲ - ۲x)dx \right| = \left| ۲ \left(\frac{x^۳}{۳} - x^۲ \right)\Big|_{۰}^{۲} \right| = \frac{۸}{۳}$$

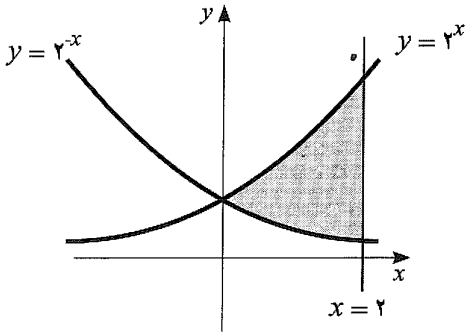
۴۹. گزینه‌ی ۱.



$$y = \sqrt{۱ - x^۲} \Longrightarrow y^۲ = ۱ - x^۲ \Longrightarrow x^۲ + y^۲ = ۱$$

$$S = \frac{\pi R^۲}{۲} = \frac{\pi(۱)^۲}{۲} = \frac{\pi}{۲}$$

۵۰. گزینه‌ی ۱.



$$۲^x = ۲^{-x} \Longrightarrow x = ۰ \Longrightarrow y = ۱ \Longrightarrow (۰, ۱)$$

$$S = \int_{۰}^{۲} (۲^x - ۲^{-x})dx = \frac{۲^x}{\ln ۲} + \frac{۲^{-x}}{\ln ۲}\Big|_{۰}^{۲} = \frac{۹}{۴\ln ۲} \simeq ۳/۲۵$$

۵۱. گزینه‌ی ۴.

$$x - x^۲ = ax \Longrightarrow x(۱ - x - a) = ۰ \Longrightarrow x = ۰, x = ۱ - a$$

$$S = \int_۰^{۱-a} (x - x^۲ - ax)dx = (۱ - a)\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^{۱-a} = \frac{(۱-a)^۳}{۲} - \frac{(۱-a)^۳}{۳} = \frac{(۱-a)^۳}{۶}$$

$$\Longrightarrow \frac{(۱-a)^۳}{۶} = \frac{۹}{۲} \Longrightarrow (۱-a)^۳ = ۲۷ \Longrightarrow (۱-a)^۳ = ۳^۳ \Longrightarrow a = -۲$$

۵۲. گزینه‌ی ۲.

$$y = (x-۳)(x-۲)(x+۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۳, x = ۲, x = -۱$$

$$S = \int_۰^۲ (x^۳ - ۴x^۲ + x + ۶)dx - \int_۲^۳ (x^۳ - ۴x^۲ + x + ۶)dx + \int_۳^۴ (x^۳ - ۴x^۲ + x + ۶)dx$$

$$S = \left(\frac{۱}{۴}x^۴ - \frac{۴}{۳}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + ۶x\right)\Big|_۰^۲ - \left(\frac{۱}{۴}x^۴ - ۲x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + ۶x\right)\Big|_۲^۳ + \left(\frac{۱}{۴}x^۴ - ۲x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + ۶x\right)\Big|_۳^۴ = \frac{۷۱}{۶}$$

۵۳. گزینه‌ی ۱.

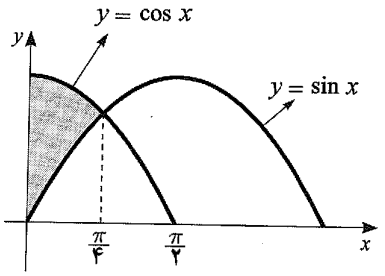
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱ \Longrightarrow \sqrt{y} = ۱ - \sqrt{x} \Longrightarrow y = ۱ - ۲\sqrt{x} + x, x \geqslant ۰$$

$$S = \int_۰^۱ (۱ - ۲\sqrt{x} + x)dx = \left(x - \frac{۴}{۳}x^{۳/۲} + \frac{۱}{۲}x^۲\right)\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۶}$$

۵۴. گزینه‌ی ۲. نقاط تقاطع دو منحنی را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin x = \cos x \Longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = ۱ \Longrightarrow \tan x = ۱ \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۴}$$

$$S = \int_۰^{\pi/۴} (\cos x - \sin x)dx = (\sin x + \cos x)\Big|_۰^{\pi/۴} = \sqrt{۲} - ۱$$



۵۵. گزینه‌ی ۳.

$$xy = ۱ \Longrightarrow y = \frac{۱}{x}, \int_{a-۱}^{a+۱} \frac{۱}{x}dx = \ln x\Big|_{a-۱}^{a+۱} = \ln(a+۱) - \ln(a-۱) = \ln\frac{a+۱}{a-۱}$$

۵۶. گزینه‌ی ۴.

$$S = \left|\int_۱^۲ (x - ۵)dx\right| + \left|\int_۲^۳ (۱ - x^۲)dx\right|$$

$$= \left|(\frac{۱}{۲}x^۲ - ۵x)\Big|_۱^۲\right| + \left|(x - \frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_۲^۳\right| = \frac{۵۳}{۶}$$

۵۷. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{۱}{x^۲+۷x+۶}=\frac{۱}{(x+۱)(x+۶)}=\frac{A}{x+۱}+\frac{B}{x+۶}=\frac{(A+B)x+۶A+B}{(x+۱)(x+۶)}$$

$$A+B=۰, ۶A+B=۱\Longrightarrow A=\frac{۱}{۵}, B=-\frac{۱}{۵}$$

$$I=\int\frac{\frac{۱}{۵}}{x+۱}dx+\int\frac{-\frac{۱}{۵}}{x+۶}dx=\frac{۱}{۵}\ln|x+۱|-\frac{۱}{۵}\ln|x+۶|+c=\frac{۱}{۵}\ln\left|\frac{x+۱}{x+۶}\right|+c$$

۵۸. گزینه‌ی ۴.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{۳۶-(x^۲-۸x+۱۶)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{۳۶-(x-۴)^۲}}=\text{Arcsin}\left(\frac{x-۴}{۶}\right)+c$$

۵۹. گزینه‌ی ۴.

$$\int_{-۱}^{۱}e^{-x^۲}d(x|x|)=\int_{-۱}^{۰}e^{-x^۲}d(-x^۲)+\int_{۰}^{۱}e^{-x^۲}d(x^۲)=\int_{-۱}^{۰}(-۲x)e^{-x^۲}dx+\int_{۰}^{۱}(۲x)e^{-x^۲}dx$$
$$=e^{-x^۲}\Big|_{-۱}^{۰}+(-e^{-x^۲})\Big|_{۰}^{۱}=۲(۱-e^{-۱})$$

۶۰. گزینه‌ی ۴.

$$I=\int_{۰}^{۲}\frac{t^۲+۲t+۱+۱}{t^۲+۲t+۱}dt=\int_{۰}^{۲}dt+\int_{۰}^{۲}\frac{۱}{(t+۱)^۲}dt$$
$$I=t\Big|_{۰}^{۲}-\frac{۱}{t+۱}\Big|_{۰}^{۲}=۲-\frac{۱}{۳}+۱=\frac{۸}{۳}$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

مدیریت

۱. حاصل انتگرال $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x+1}$، کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\ln 2$ ۴) $\ln 2 - 1$

۲. حاصل انتگرال $I = \int \frac{xdx}{1+x}$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) $\frac{x^2}{(x+1)^2} + c$ ۲) $\frac{1}{(x+1)^2} + c$ ۳) $x - \ln|x+1| + c$ ۴) $\frac{-1}{(x+1)^2} + c$

۳. مساحت محصور بین منحنی $y = x^3$ و محور xها در فاصله $x = 0$ تا $x = 1$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۴. حاصل انتگرال $I = \int_{0}^{\pi/2} 2x \sin x dx$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۵. سطح محصور بین سهمی $y = x^2$ و خط $y = 1$ و محور yها کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۶. حاصل انتگرال $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ در صورتی که $c = 0$ فرض شود، به‌ازای $x = 0$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۷. انتگرال $I = \int_{0}^{1} \frac{xdx}{x+1}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $\ln 2 - 1$ ۲) $2 - \ln 2$ ۳) $1 - \ln 2$ ۴) $\ln 2 - 2$

۸. انتگرال $I = \int_{0}^{1} xe^x dx$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱ ۲) e ۳) e^{-1} ۴) $e + 1$

۹. مساحت محصور بین منحنی $y = x^2$ و محور xها در فاصله $x = 0$ تا $x = 1$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۰. اگر $y'' = e^{2x} - x$ باشد، فرض صفر بودن مقادیر ثابت، مقدار y در نقطه $x = 0$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{12}$

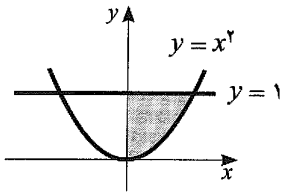
۱۱. مقدار انتگرال $\int \frac{(x+1)dx}{x-1}$ اگر $x = 2$ و ثابت انتگرال صفر باشد، کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\ln 2$ ۴) $\ln 3$

۱۲. مقدار انتگرال $I = \int_{-1}^{0}(1-x)e^{-x}dx$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) e ۴) $2e$

۱۳. با توجه به شکل مساحت قسمت سایه‌زده کدام است؟ [۱۳۷۳]



۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{2}{3}$

۱۴. مقدار انتگرال $\int_{0}^{1} xe^{x}dx$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $e+1$ ۲) $e-1$ ۳) e ۴) ۱

۱۵. مقدار $I = \int \frac{xdx}{x+1}$ به‌ازای $x = 1$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $\ln 2 - 1 + c$ ۲) $1 - \ln 2 + c$ ۳) $\frac{1}{2} + c$ ۴) $-\frac{1}{2} + c$

۱۶. حاصل انتگرال $\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\ln \frac{3}{2}$ ۳) $2\ln \frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۷. مقدار انتگرال $\int_{0}^{\pi} x\cos x dx$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) π

۱۸. مقدار انتگرال $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ به‌ازای $x = 8$ و $c = 2$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۹. سطح محصور بین منحنی $y = x^2 + 2$ و خطوط $y = 11$ و $x = 0$ واقع در ناحیه اول کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۴۸ ۲) ۳۳ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

۲۰. مقدار انتگرال $I = \int_{0}^{1} xe^{x^2}dx$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $\frac{1}{2}(e-1)$ ۲) $e - \frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}e$ ۴) e

۲۱. اگر $I(x) = \int \frac{2dx}{x^2 - x}$ باشد، با فرض عدد ثابت انتگرال‌گیری $c = 0$ مقدار $I(2)$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $2\ln 2$ ۲) $-\ln 4$ ۳) ۱ ۴) ۲

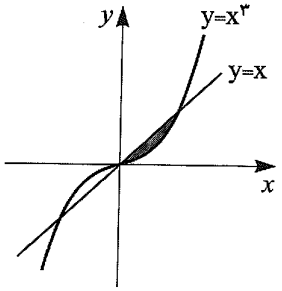
۲۲. مقدار انتگرال $I = \int_{1}^{2} \ln x dx$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $2\ln 2 - 1$ ۲) $\ln 2 - 1$ ۳) $\ln 2$ ۴) $2\ln 2$

۲۳. مقدار انتگرال $I = \int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt{4 - x^2}dx$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$

۲۴. سطح سایه‌زده شده، برابر کدام است؟ [۱۳۷۷]



۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

۲۵. اگر $I(x) = \int xe^{x^۲}dx$ باشد، مقدار $I(۲) - I(۰)$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $\frac{۱}{۴}(e^۲ - ۱)$ ۲) $\frac{۱}{۴}(e^۲ + ۱)$ ۳) $\frac{۱}{۲}(e^۲ - ۱)$ ۴) $\frac{۱}{۲}(e^۲ + ۱)$

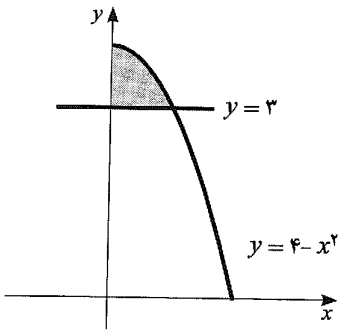
۲۶. مقدار انتگرال $I = \int_۲^۳ \frac{dt}{t^۲ - ۱}$، کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}\ln\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\ln ۲$

۲۷. اگر $I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+۱}}$ باشد، مقدار $I(۰) - I(۳)$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۲ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) -۲

۲۸. سطح سایه‌زده شده در شکل مقابل برابر کدام است؟ [۱۳۷۸]



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) ۲

۲۹. اگر $I = \int_۰^۱ \frac{x}{x^۲+۱}dx$، مقدار I برابر است با: [۱۳۷۹]

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\text{Arctan}\,۱$ ۴) $\frac{۱}{۲}\ln ۲$

۳۰. اگر $I(x) = \int \ln x dx$، مقدار $I(۲) - I(۱)$ برابر است با: [۱۳۷۹]

۱) $\frac{۱}{۲}\ln ۲ + ۲$ ۲) $\ln ۲ + ۱$ ۳) $۲\ln ۲ - ۱$ ۴) $\frac{۱}{۲}\ln ۲ - ۲$

۳۱. سطح محصور بین منحنی $y = x^۲$ و خط $y = x$ برابر است با: [۱۳۷۹]

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۲. مقدار انتگرال $I = \int_۰^۱ \frac{۳x+۴}{x^۲+۳x+۲}dx$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $\ln\frac{۹}{۲}$ ۲) $۲\ln\frac{۶}{۷}$ ۳) $\ln\frac{۵}{۲}$ ۴) $۲\ln\frac{۳}{۲}$

۳۳. سطح محصور بین منحنی $y = \frac{\sqrt{x-۱}}{x}$ و محور xها در فاصلهٔ $x = ۱$ تا $x = ۲$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $\frac{\pi}{۴} + ۱$ ۲) $۲ - \frac{\pi}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۴. مقدار انتگرال $I = \int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$ برابر است با: ۱۳۸۰

۱) $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{-4+2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{-1+\sqrt{2}}{3}$

۳۵. جواب انتگرال $\int \frac{\ln x}{x\ln x - x}dx$ به‌ازای $c = 0$ و $x = 2$، کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) $\ln 2$ ۲) $\ln 2 + 2$ ۳) $\ln 2 - 2$ ۴) $\ln(2\ln 2 - 2)$

۳۶. مقدار $\int_{e}^{10} \log x dx$ کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) $10 - e\log e$ ۲) $10(1 - \log e)$ ۳) $10\log e$ ۴) $10\log e - 1$

۳۷. مقدار انتگرال معین $I = \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}dx$، برابر است با: ۱۳۸۱

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $9\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۳۸. سطح محصور بین منحنی $y = x^3$ و خط به معادله‌ی $y = x$، کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳۹. مقدار انتگرال $I = \int \frac{dx}{2^x + 2^{-x}}$ برابر است با: ۱۳۸۲

۱) $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{Arctan}(2^x) + c$ ۲) $x + \frac{1}{\ln 2}\operatorname{Arctan}(2^x) + c$

۳) $x - \frac{1}{\ln 2}\operatorname{Arctan}(2^x) + c$ ۴) $x + \frac{1}{\ln 2}\operatorname{Arctan}(2^x) + c$

۴۰. مقدار انتگرال $I = \int_{3}^{4} \frac{x-3}{x-2}dx$ برابر است با: ۱۳۸۲

۱) ۱ ۲) $1 - \ln 2$ ۳) $1 - \ln 3$ ۴) $2 + \ln 2$

۴۱. اگر مساحت سطح زیر منحنی $y = \ln(x+1)$ از نقطه $x = 0$ تا $x = c$ برابر $c + 2$ شود، مقدار c کدام است؟ ۱۳۸۲

۱) $e - 1$ ۲) $e - 2$ ۳) $e^2 - 1$ ۴) $e^2 - 2$

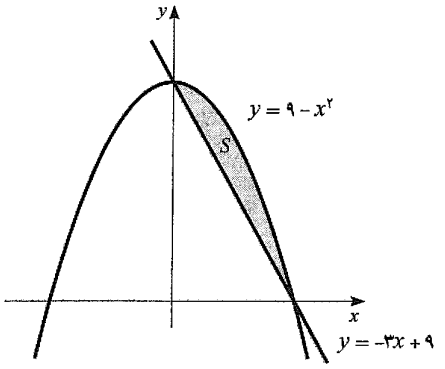
۴۲. اگر داشته باشیم $I(x) = \int \frac{1}{x^3}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx$، به‌ازای $c = 0$ (ثابت انتگرال‌گیری) $I(1)$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $+\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ۲) $+\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

۴۳. مقدار انتگرال $I = \int_{1}^{2} x\ln x\,dx$ برابر است با: ۱۳۸۳

۱) $\ln 2 - 2$ ۲) $\ln 2 - 1$ ۳) $2\ln 2 - \frac{3}{4}$ ۴) $2\ln 2 - \frac{1}{4}$

۴۴. مساحت S، در شکل داده شده کدام است؟ ۱۳۸۳



۱) ۴
۲) $\frac{14}{3}$
۳) ۴٫۵
۴) $\frac{16}{3}$

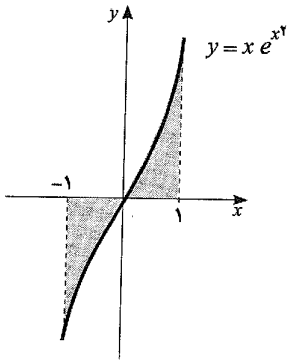
۴۵. انتگرال $\int \frac{x+۴}{x(x+۲)}dx$ برابر کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $\ln \frac{x}{(x+۲)^۲}+c$ ۲) $\ln \frac{x+۲}{x^۲}+c$ ۳) $\ln \frac{(x+۲)^۲}{x}+c$ ۴) $\ln \frac{x^۲}{x+۲}+c$

۴۶. حاصل انتگرال $\int_e^{e^۲} \frac{dx}{x \ln x}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $\ln ۲$ ۲) $\ln \frac{۱}{۲}$ ۳) $۱+\ln ۲$ ۴) $۱-\ln ۲$

۴۷. مساحت سایه زده در شکل مقابل کدام است؟ ۱۳۸۴



۱) $e-۱$
۲) $e-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}e-۱$
۴) $\frac{۱}{۲}(e-۱)$

۴۸. اگر $F(x)=\int_۲^x \sqrt{t^۲+۴}dt$ باشد مقدار $F(۲)$ چقدر است؟ ۱۳۸۴

۱) ۰ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۳.

$$I=\int_۰^۱ \frac{۱}{۱+x}dx=\ln(۱+x)\Big|_۰^۱=\ln ۲-۲\ln ۱=\ln ۲$$

۲. گزینه‌ی ۳.

$$I=\int \frac{x}{۱+x}dx=\int \frac{x+۱-۱}{۱+x}dx=\int \frac{x+۱}{۱+x}dx-\int \frac{۱}{۱+x}dx=x-\ln|۱+x|+c$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$S=\int_۰^۱ x^۳dx=\frac{۱}{۴}x^۴\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۴}-۰=\frac{۱}{۴}$$

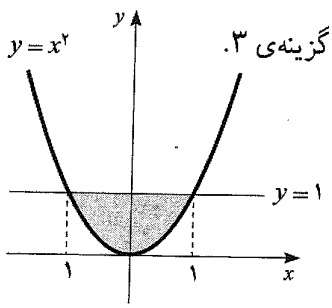
۴. گزینه‌ی ۲.

$$u=۲x \Longrightarrow du=۲dx, dv=\sin x dx \Longrightarrow v=-\cos x$$

$$\int ۲x\sin x dx=-۲x\cos x-\int -۲\cos x dx=-۲x\cos x+۲\sin x+c$$

$$I=\int_۰^{\pi/۲} ۲x\sin x dx=-۲x\cos x+۲\sin x\Big|_۰^{\pi/۲}=۲-۰=۲$$

۵. گزینه‌ی ۳.



$$\begin{cases} y=۱ \\ y=x^۲ \end{cases} \Longrightarrow x^۲=۱ \Longrightarrow x=\pm ۱$$

$$S=\int_{-۱}^{۱}(۱-x^۲)dx=(x-\frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_{-۱}^{۱}=\frac{۴}{۳}$$

۶. گزینه‌ی ۲.

$$u = x + ۱ \Longrightarrow x = u - ۱ \Longrightarrow dx = du$$
$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x+۱}} dx = \int \frac{u-۱}{\sqrt{u}} du = \int (u^{\frac{۱}{۲}} - u^{-\frac{۱}{۲}}) du = \frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}} - ۲u^{\frac{۱}{۲}} + c$$
$$I = \frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}} - ۲(x+۱)^{\frac{۱}{۲}} + c \Longrightarrow I(۰) = \frac{۲}{۳} - ۲ + ۰ = -\frac{۴}{۳}$$

۷. گزینه‌ی ۳.

$$I = \int_۰^۱ \frac{x}{x+۱} dx = \int_۰^۱ \frac{x+۱-۱}{x+۱} dx = \int_۰^۱ dx - \int_۰^۱ \frac{dx}{x+۱} = x|_۰^۱ - \ln(x+۱)|_۰^۱$$
$$I = ۱ - \ln ۲ - ۰ = ۱ - \ln ۲$$

۸. گزینه‌ی ۱.

$$u = x \Longrightarrow du = dx, dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$$
$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$
$$I = \int_۰^۱ x e^x dx = x e^x - e^x|_۰^۱ = (e - e) - (۰ - ۱) = ۱$$

۹. گزینه‌ی ۴.

$$S = \int_۰^۱ x^۲ dx = \frac{۱}{۳} x^۳|_۰^۱ = \frac{۱}{۳}$$

۱۰. گزینه‌ی ۲.

$$y' = \int (e^{۲x} - x) dx = \frac{۱}{۲} e^{۲x} - \frac{۱}{۲} x^۲ + c_۱ \xrightarrow{c_۱ = ۰} y' = \frac{۱}{۲} e^{۲x} - \frac{۱}{۲} x^۲ \Longrightarrow$$
$$y = \frac{۱}{۲} \int (e^{۲x} - x^۲) dx = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۲} e^{۲x} - \frac{۱}{۳} x^۳ \right) + c_۲ \xrightarrow{c_۲ = ۰} y = \frac{۱}{۴} e^{۲x} - \frac{۱}{۶} x^۳ \xrightarrow{x = ۰} y = \frac{۱}{۴}$$

۱۱. گزینه‌ی ۱.

$$I = \int \frac{x+۱}{x-۱} dx = \int \frac{x-۱+۲}{x-۱} dx = \int \frac{x-۱}{x-۱} dx - \int \frac{۲}{x-۱} dx = x + ۲\ln|x-۱| + c$$
$$\xrightarrow{x=۲, c=۰} I = ۲ + ۲\ln|۲-۱| + ۰ \Longrightarrow I = ۲$$

۱۲. گزینه‌ی ۳.

$$u = ۱ - x \Longrightarrow du = -dx, dv = e^{-x} dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$$
$$\int (۱-x) e^{-x} dx = (x-۱) e^{-x} - \int e^{-x} dx = (x-۱) e^{-x} + e^{-x} + c$$
$$I = \int_{-۱}^{۰} (۱-x) e^{-x} dx = (x-۱) e^{-x} + e^{-x}|_{-۱}^{۰} = e$$

۱۳. گزینه‌ی ۴. با توجه به شکل سطح محصور بین دو منحنی در فاصله $[۰, ۱]$ موردنظر است.

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow x^۲ = ۱ \Longrightarrow x = \pm ۱$$
$$S = \int_۰^۱ (۱ - x^۲) dx = x - \frac{۱}{۳} x^۳ \Big|_۰^۱ = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

۱۴. گزینه‌ی ۴. به تست شماره ۸ مراجعه شود.

۱۵. گزینه‌ی ۲.

$$I=\int \frac{x}{x+۱}dx=\int \frac{x+۱-۱}{x+۱}dx=\int \frac{x+۱}{x+۱}dx-\int \frac{۱}{x+۱}dx=x-\ln|x+۱|+c$$
$$\xrightarrow{x=۱} I=۱-\ln ۲+c$$

۱۶. گزینه‌ی ۳.

$$u=\sqrt{x}+۱ \Longrightarrow du=\frac{dx}{۲\sqrt{x}}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}=\int \frac{۲du}{u}=۲\ln u \Longrightarrow \int_{۱}^{۴} \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}=۲\ln(\sqrt{x}+۱)\Big|_{۱}^{۴}=۲\ln\frac{۳}{۲}$$

۱۷. گزینه‌ی ۱.

$$u=x \Longrightarrow du=dx, .dv=\cos x dx \Longrightarrow v=\sin x$$
$$I=\int_{۰}^{\pi} x\cos x dx=x\sin x|_{۰}^{\pi}-\int_{۰}^{\pi}\sin x dx=۰+\cos x|_{۰}^{\pi}=-۱-۱=-۲$$

۱۸. گزینه‌ی ۲.

$$u=x \Longrightarrow du=dx, dv=\frac{dx}{\sqrt{x+۱}} \Longrightarrow v=۲\sqrt{x+۱}$$
$$I=\int \frac{xdx}{\sqrt{x+۱}}=۲x\sqrt{x+۱}-۲\int \sqrt{x+۱}dx=۲x\sqrt{x+۱}-\frac{۴}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}+c$$
$$\xrightarrow{x=۸,c=۲} I=۴۸-۳۶+۲=۱۴$$

۱۹. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases} y=x^{۲}+۲ \\ y=۱۱ \end{cases} \Longrightarrow x^{۲}+۲=۱۱ \Longrightarrow x=\pm ۳$$
$$S=\int_{۰}^{۳}(۱۱-x^{۲}-۲)dx=(۹x-\frac{۱}{۳}x^{۳})\Big|_{۰}^{۳}=۱۸$$

۲۰. گزینه‌ی ۱.

$$I=\int_{۰}^{۱} xe^{x^{۲}}dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱}۲xe^{x^{۲}}dx=\frac{۱}{۲}e^{x^{۲}}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲}(e-۱)$$

۲۱. گزینه‌ی ۲.

$$I(x)=\int \frac{۲}{x^{۲}-x}dx=۲\int \frac{x+۱-x}{x(x-۱)}dx=۲\int \frac{x}{x(x-۱)}dx-۲\int \frac{x-۱}{x(x-۱)}dx$$
$$I(x)=۲\int \frac{dx}{x-۱}-۲\int \frac{dx}{x}=۲\ln|x-۱|-۲\ln|x|+c$$
$$\xrightarrow{c=۰} I(۲)=-۲\ln ۲=-\ln ۴$$

۲۲. گزینه‌ی ۱.

$$u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = dx \Longrightarrow v = x$$
$$I = \int_{۱}^{۲} \ln x dx = x \ln x \Big|_{۱}^{۲} - \int_{۱}^{۲} x.\frac{dx}{x} = (x \ln x - x)\Big|_{۱}^{۲} = ۲\ln ۲ - ۱$$

۲۳. گزینه‌ی ۴.

$$u = ۴ - x^{۲} \Longrightarrow du = -۲x\,dx \Longrightarrow -\frac{du}{۲} = x\,dx$$
$$\int x\sqrt{۴ - x^{۲}}dx = -\frac{۱}{۲}\int \sqrt{u}du = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}} + c = -\frac{۱}{۳}(۴ - x^{۲})^{\frac{۳}{۲}} + c$$
$$I = \int_{۰}^{\sqrt{۳}} x\sqrt{۴ - x^{۲}}dx = -\frac{۱}{۳}(۴ - x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{\sqrt{۳}} = \frac{۷}{۳}$$

۲۴. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} y = x^{۳} \\ y = x \end{cases} \Longrightarrow x^{۳} = x \Longrightarrow x(x^{۲} - ۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰, -۱, ۱$$
$$S = \int_{۰}^{۱} (x - x^{۳})dx = (\frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۴})\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۴}$$

۲۵. گزینه‌ی ۳.

$$u = x^{۲} \Longrightarrow du = ۲x\,dx \Longrightarrow \frac{du}{۲} = x\,dx$$
$$\int xe^{x^{۲}}dx = \frac{۱}{۲}\int e^{u}du = \frac{۱}{۲}e^{u} + c = \frac{۱}{۲}e^{x^{۲}} + c$$
$$I(۲) - I(۰) = \frac{۱}{۲}e^{۲} + c - \frac{۱}{۲}e^{۰} - c = \frac{۱}{۲}e^{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}(e^{۲} - ۱)$$

۲۶. گزینه‌ی ۳.

$$I = \int_{۲}^{۳} \frac{dt}{-(۱ - t^{۲})} = -\int_{۲}^{۳} \frac{dt}{۱ - t^{۲}}$$
$$I = -\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{۱ + t}{۱ - t}\right|\Big|_{۲}^{۳} = -\frac{۱}{۲}(\ln ۲ - \ln ۳) = \frac{۱}{۲}(\ln ۳ - \ln ۲) = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۳}{۲}$$

۲۷. گزینه‌ی ۲.

$$I(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x+۱}}dx = \int \frac{x + ۱ - ۱}{(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}}dx = \int \frac{x+۱}{(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}}dx - \int \frac{۱}{(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}}dx$$
$$I(x) = \int (x+۱)^{\frac{۱}{۲}}dx - \int (x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}dx = \frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}} - ۲(x+۱)^{\frac{۱}{۲}} + c$$
$$I(x) = \frac{۲}{۳}\sqrt{(x+۱)^{۳}} - ۲\sqrt{(x+۱)} + c \Longrightarrow I(۳) - I(۰) = \frac{۱۶}{۳} - ۲ = \frac{۸}{۳}$$

۲۸. گزینه‌ی ۲.

$$y = ۴ - x^۲, y = ۳ \Longrightarrow ۳ = ۴ - x^۲ \Longrightarrow x^۲ = ۱ \Longrightarrow x = \pm ۱$$

$$S = \int_۰^۱ (۴ - x^۲ - ۳)dx = \int_۰^۱ (۱ - x^۲)dx = \left(x - \frac{۱}{۳}x^۳\right)\Big|_۰^۱ = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

۲۹. گزینه‌ی ۴.

$$I = \int_۰^۱ \frac{x}{x^۲ + ۱}dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x}{x^۲ + ۱}dx = \frac{۱}{۲}\ln(x^۲ + ۱)\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۲}\ln ۲$$

۳۰. گزینه‌ی ۳.

$$u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x}\ ,\ dv = dx \Longrightarrow v = x$$

$$I(x) = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

$$I(۲) - I(۱) = (۲\ln ۲ - ۲) - (\ln ۱ - ۱) = ۲\ln ۲ - ۱$$

۳۱. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ y = x \end{cases} \Longrightarrow x^۲ = x \Longrightarrow x^۲ - x = ۰ \Longrightarrow x = ۰, ۱$$

$$S = \int_۰^۱ (x - x^۲)dx = \left(\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳}\right)\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۶}$$

۳۲. گزینه‌ی ۱.

$$\int \frac{۳x + ۴}{x^۲ + ۳x + ۲}dx = \int \frac{۲x + ۳ + x + ۱}{x^۲ + ۳x + ۲}dx = \int \frac{۲x + ۳}{x^۲ + ۳x + ۲} + \int \frac{x + ۱}{(x + ۲)(x + ۱)}dx$$

$$= \ln(x^۲ + ۳x + ۲) + \ln(x + ۲) = \ln(x^۲ + ۳x + ۲)(x + ۲)$$

$$\int_۰^۱ \frac{۳x + ۴}{x^۲ + ۳x + ۲}dx = \ln(x^۲ + ۳x + ۲)(x + ۲)\Big|_۰^۱ = \ln ۱۸ - \ln ۴ = \ln \frac{۹}{۲}$$

۳۳. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{x - ۱}}{x} \\ y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \frac{\sqrt{x - ۱}}{x} = ۰ \Longrightarrow x = ۱$$

$$\sqrt{x - ۱} = u \Longrightarrow x - ۱ = u^۲ \Longrightarrow x = u^۲ + ۱\ ,\ dx = ۲u\,du$$

$$\int \frac{\sqrt{x - ۱}}{x}dx = \int \frac{۲u^۲ du}{۱ + u^۲} = ۲\int \frac{۱ + u^۲ - ۱}{۱ + u^۲}du = ۲\int (۱ - \frac{۱}{۱ + u^۲})du$$

$$= ۲(u - \operatorname{Arctan} u) = ۲(\sqrt{x - ۱} - \operatorname{Arctan}\sqrt{x - ۱})$$

$$S = \int_۱^۲ \frac{\sqrt{x - ۱}}{x}dx = ۲(\sqrt{x - ۱} - \operatorname{Arctan}\sqrt{x - ۱})\Big|_۱^۲ = ۲ - ۲ \times \frac{\pi}{۴} = ۲ - \frac{\pi}{۲}$$

۳۴. گزینه‌ی ۱.

$$u = x + ۱ \Longrightarrow x = u - ۱\ ,\ du = dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+۱}}dx = \int \frac{u-۱}{\sqrt{u}}du = \int (u^{\frac{۱}{۲}} - u^{-\frac{۱}{۲}})du = \frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}} - ۲u^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}} - ۲(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\int_{۰}^{۱} \frac{x}{\sqrt{۱+x}}dx = \frac{۲}{۳}(۲)^{\frac{۳}{۲}} - ۲(۲)^{\frac{۱}{۲}} - \frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴ - ۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۳۵. گزینه‌ی ۴.

$$\int \frac{\ln x}{x\ln x - x}dx = \int \frac{\ln x}{x(\ln x - ۱)}dx$$

$$\ln x = u \Longrightarrow \frac{dx}{x} = du$$

$$\int \frac{udu}{u-۱} = \int \frac{u-۱+۱}{u-۱}du = \int du + \int \frac{du}{u-۱} = u + \ln(u-۱) + c$$

$$\int \frac{\ln x}{x\ln x - x}dx = \ln x + \ln[(\ln x) - ۱] + c \xrightarrow[c=۰]{x=۲}$$

$$= \ln ۲ + \ln[(\ln ۲) - ۱] = \ln[۲(\ln ۲ - ۱)] = \ln(۲\ln ۲ - ۲)$$

۳۶. گزینه‌ی ۲.

$$u = \log x \Longrightarrow du = \frac{\log e}{x}dx\ ,\ dv = dx \Longrightarrow v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu = x\log x - \int \log e dx = x\log x - x\log e + c$$

$$\int_{e}^{۱۰} \log x dx = (x\log x - x\log e)\Big|_{e}^{۱۰} = (۱۰\log ۱۰ - ۱۰\log e) - (e\log e - e\log e)$$

$$= ۱۰(۱ - \log e)$$

۳۷. گزینه‌ی ۳. با فرض $y = \sqrt{۹ - x^۲}$ داریم:

$$y^۲ = ۹ - x^۲ \Longrightarrow x^۲ + y^۲ = ۹$$

بنابراین انتگرال، مساحت یک نیم‌دایره به شعاع ۳ می‌باشد، و:

$$I = \frac{\pi r^۲}{۲} = \frac{۹\pi}{۲}$$

۳۸. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} y = x^۳ \\ y = x \end{cases} \Longrightarrow x^۳ = x \Longrightarrow x^۳ - x = ۰ \Longrightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰\ ,\ x = \pm ۱$$

$$S = \int_{-۱}^{۰}(x^۳ - x)dx + \int_{۰}^{۱}(x - x^۳)dx = (\frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۲}{۲})\Big|_{-۱}^{۰} + (\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۴}{۴})\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۲}$$

۳۹. گزینه‌ی ۱.

$$I=\int \frac{dx}{۲^x+۲^{-x}}=\int \frac{dx}{۲^x+\frac{۱}{۲^x}}=\int \frac{۲^x dx}{۲^{۲x}+۱}$$

$$u=۲^x \Longrightarrow du=۲^x \ln ۲ dx \Longrightarrow ۲^x dx=\frac{du}{\ln ۲}$$

$$I=\frac{۱}{\ln ۲}\int \frac{du}{u^۲+۱}=\frac{۱}{\ln ۲}(\operatorname{Arctan} u)+c=\frac{۱}{\ln ۲}\operatorname{Arctan}(۲^x)+c$$

۴۰. گزینه‌ی ۲.

$$I=\int_۳^۴ \frac{x-۳}{x-۲}dx=\int_۳^۴ \frac{x-۲-۱}{x-۲}dx=\int_۳^۴ dx-\int_۳^۴ \frac{dx}{x-۲}$$

$$I=x-\ln(x-۲)\Big|_۳^۴=(۴-\ln ۲)-(۳-\ln ۱)=۱-\ln ۲$$

۴۱. گزینه‌ی ۳.

$$\int_۰^c \ln(x+۱)dx=c+۲\ ,\begin{cases}u=\ln(x+۱)\\ dv=dx\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x+۱}\\ v=x\end{cases}$$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du=x\ln(x+۱)-\int \frac{x}{x+۱}dx$$

$$=x\ln(x+۱)-\int \frac{x+۱-۱}{x+۱}dx=x\ln(x+۱)-\int dx+\int \frac{dx}{x+۱}$$

$$=x\ln(x+۱)-x+\ln(x+۱)$$

$$\int_۰^c \ln(x+۱)dx=c+۲\Longrightarrow x\ln(x+۱)-x+\ln(x+۱)\Big|_۰^c=c+۲$$

$$\Longrightarrow c\ln(c+۱)-c+\ln(c+۱)=c+۲$$

$$\Longrightarrow (c+۱)\ln(c+۱)=۲(c+۱)\Longrightarrow \ln(c+۱)=۲$$

$$\Longrightarrow c+۱=e^۲\Longrightarrow c=e^۲-۱$$

۴۲. گزینه‌ی ۳.

$$u=\frac{۱}{x^۲}\Longrightarrow du=\frac{-۲dx}{x^۳}\Longrightarrow -\frac{۱}{۲}du=\frac{dx}{x^۳}$$

$$I(u)=-\frac{۱}{۲}\int \sqrt{۱+u}du=-\frac{۱}{۲}\int (۱+u)^{\frac{۱}{۲}}du=-\frac{(۱+u)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}+c$$

$$I(x)=-\frac{\sqrt{(۱+\frac{۱}{x^۲})^۳}}{۳}+c\Longrightarrow I(۱)=-\frac{\sqrt{۸}}{۳}=-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۴۳. گزینه‌ی ۳.

$$u=\ln x\Longrightarrow du=\frac{dx}{x}\ ,\ dv=x\Longrightarrow v=\frac{۱}{۲}x^۲$$

$$I=\frac{۱}{۲}x^۲\ln x-\frac{۱}{۲}\int x dx=\frac{۱}{۲}x^۲\ln x-\frac{۱}{۴}x^۲+c$$

$$I=\int_{۱}^{۲} x\ln x dx=(۲\ln ۲-۱)-(۰-\frac{۱}{۴})=۲\ln ۲-\frac{۳}{۴}$$

۴۴. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases} y=۹-x^{۲} \\ y=-۳x+۹ \end{cases} \Longrightarrow ۹-x^{۲}=-۳x+۹ \Longrightarrow x^{۲}-۳x=۰ \Longrightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۳ \end{cases}$$

$$S=\int_{۰}^{۳}(۹-x^{۲}+۳x-۹)dx=\int_{۰}^{۳}(-x^{۲}+۳x)dx=(-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{۳x^{۲}}{۲})\Big|_{۰}^{۳}=۴/۵$$

۴۵. گزینه‌ی ۴.

$$\int \frac{x+۴}{x(x+۲)}dx=\int(\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x+۲})dx=۲\ln x-\ln(x+۲)+c$$
$$=\ln x^{۲}-\ln(x+۲)+c=\ln\frac{x^{۲}}{x+۲}+c$$

۴۶. گزینه‌ی ۱.

$$u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{۱}{x}dx$$
$$\int \frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{du}{u}=\ln u=\ln(\ln x)$$
$$\int_{e}^{e^{۲}} \frac{dx}{x\ln x}=\ln(\ln e^{۲})-\ln(\ln e)=\ln ۲-\ln ۱=\ln ۲-۰=\ln ۲$$

۴۷. گزینه‌ی ۱.

$$S=|\int_{-۱}^{۰} xe^{x^{۲}}dx|+\int_{۰}^{۱} xe^{x^{۲}}dx=|\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۰} ۲xe^{x^{۲}}dx|+\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} ۲xe^{x^{۲}}dx$$
$$S=|\frac{۱}{۲}e^{x^{۲}}]_{-۱}^{۰}|+\frac{۱}{۲}e^{x^{۲}}\Big|_{۰}^{۱}=|\frac{۱}{۲}(e^{۰}-e)|+\frac{۱}{۲}(e-e^{۰})$$
$$S=|\underbrace{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}e}_{(-)}|+\frac{۱}{۲}e-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}e+\frac{۱}{۲}e-\frac{۱}{۲}=e-۱$$

۴۸. گزینه‌ی ۱.

$$F(۲)=\int_{۲}^{۲}\sqrt{t^{۲}+t}dt=۰$$

حسابداری

۱. اگر حاصل انتگرال $\int x\sqrt{x}dx$ به‌ازای $x = ۱$ برابر ۱ باشد، عدد ثابت انتگرال‌گیری چه‌قدر است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۲. مقدار $\int_{۰}^{۲\sqrt{۲}} \frac{xdx}{\sqrt{x^۲+۱}}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۳. حاصل $\int \frac{(\sqrt{x}+۱)dx}{x}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $x\sqrt{x} - \ln x + c$ ۲) $x\sqrt{x} + \ln x + c$ ۳) $۲\sqrt{x} + \ln x + c$ ۴) $\sqrt{x} + ۲\ln x + c$

۴. حاصل $\int ۲x\ln x dx$ کدام است؟ (با فرض $c = ۰$) [۱۳۷۱]

۱) $x^۲\ln x + \frac{۱}{۲}x^۲$ ۲) $x^۲\ln x - \frac{۱}{۲}x^۲$ ۳) $x^۲\ln x - x^۲$ ۴) $x^۲\ln x + x^۲$

۵. مقدار $\int_{۰}^{۱} \frac{(x+۲)dx}{x+۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۱ ۲) $\ln ۲$ ۳) $۱ + \ln ۲$ ۴) $۱ - \ln ۲$

۶. سطح محدود به منحنی تابع $y = \frac{۱}{x^۲}$ و محور xها و دو خط $x = \frac{۱}{۲}$ و $x = ۱$ چه‌قدر است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۲٫۵ ۲) ۱٫۵ ۳) ۲ ۴) ۱

۷. حاصل انتگرال $\int_{۰}^{۱} ۴xe^x dx$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۸. انتگرال $\int_{۱}^{۲} \frac{(x+۱)dx}{x}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $۲\ln ۲ + ۲$ ۲) $۲\ln ۲ - ۲$ ۳) $۱ + \ln ۲$ ۴) $\ln ۲ - ۱$

۹. معادله منحنی که شیب آن $y' = ۳x - ۵$ بوده و از نقطه $(۲, ۱)$ می‌گذرد درنظر می‌گیریم، به‌ازای $x = ۰$ مقدار y کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $\frac{۱۱}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۰. اگر $I(x) = \int x\sqrt{۲x^۲+۱}dx$، $I(۰)$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $-۲ + c$ ۲) $\frac{۱}{۶} + c$ ۳) $\frac{۱}{۳} + c$ ۴) $۱ + c$

۱۱. در انتگرال $I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+۱}}$ مقدار $I(۰)$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $-۲ + c$ ۲) $-۴ + c$ ۳) $-\frac{۴}{۳} + c$ ۴) $-\frac{۳}{۴} + c$

۱۲. سطح محصور بین منحنی $y = e^x$ و محور xها در فاصله $x = 0$ تا $x = 1$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $e + 1$ ۲) $e - 1$ ۳) e ۴) ۱

۱۳. مساحت محصور بین منحنی‌های $y = x^3$ و $y = x$ واقع در ربع اول کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۱۴. مقدار $I = \int e^x 4^x dx$ در نقطه $x = 0$ با فرض (ثابت انتگرال) $c = 0$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $(\ln 4e)^{-1}$ ۲) $\ln 4e$ ۳) $(4e)^{-1}$ ۴) $4e$

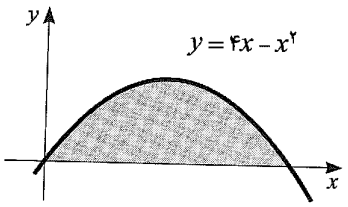
۱۵. مقدار $I = \int x(1-x)^5 dx$ در $x = 2$ کدام است؟ (با فرض $c = 0$) [۱۳۷۳]

۱) $-\frac{1}{25}$ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{13}{42}$ ۴) $-\frac{13}{42}$

۱۶. مقدار $\int \left(\frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) dx$ به‌ازای $x = 2$ در صورت $c = 0$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$ ۲) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ۴) $-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$

۱۷. سطح سایه‌زده شکل زیر کدام است؟ [۱۳۷۳]



۱) $\frac{25}{4}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{32}{3}$ ۴) ۱۶

۱۸. مقدار انتگرال $\int_1^2 \ln x dx$، کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $2\ln 2 - 1$ ۲) $2\ln 2 - 2$ ۳) $\ln 2 - 1$ ۴) $\ln 2 - 2$

۱۹. حاصل $\int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4} dx$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{14}{9}$ ۴) $\frac{16}{3}$

۲۰. مقدار انتگرال $\int x^{11} \ln x dx$ در $x = 1$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $1 + c$ ۲) $\frac{1}{12} + c$ ۳) $-\frac{1}{12} + c$ ۴) $-\frac{1}{144} + c$

۲۱. اگر $F(x) = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}$، به‌ازای $c = 0$ مقدار $F(0)$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۲. انتگرال $I = \int x \ln x dx$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $-\frac{1}{2} + c$ ۲) $\frac{1}{2} + c$ ۳) $\frac{1}{4} + c$ ۴) $-\frac{1}{4} + c$

۲۳. مساحت محصور بین نمودارهای دو تابع $y = x$ و $y = x^2$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۴. شیب تابعی $\frac{dy}{dx} = ۲x + \frac{۱}{x+۱}$ است. اگر این تابع از مبدأ بگذرد مقدار تابع به‌ازای $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۱ + \ln ۲$ ۴) $۲ + \ln ۲$

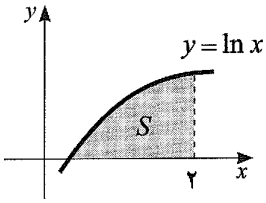
۲۵. اگر داشته باشیم $I(x) = \int \frac{dx}{۴ - x^۲}$ و ثابت انتگرال‌گیری $c = ۰$ باشد، $I(۱)$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴} \ln ۲$ ۴) $\frac{۱}{۴} \ln ۳$

۲۶. اگر داشته باشیم $I(x) = \int x \cos x dx$، و ثابت انتگرال‌گیری $c = ۰$ باشد، $I(۰)$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\sin ۱$ ۴) $۱ - \sin ۱$

۲۷. در شکل مقابل مساحت S کدام است؟ [۱۳۷۶]

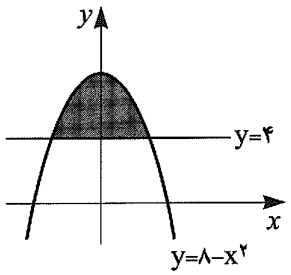


۱) $۲ \ln ۲ - ۱$
۲) $\ln ۲ - ۱$
۳) $\ln ۲$
۴) ۲

۲۸. مقدار انتگرال $I = \int_۰^{\sqrt{۳}} \frac{x}{\sqrt{۴ - x^۲}} dx$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۹. سطح سایه‌زده شده برابر کدام است؟ [۱۳۷۷]



۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) $\frac{۳۲}{۳}$
۳) ۴
۴) $\frac{۱۶}{۳}$

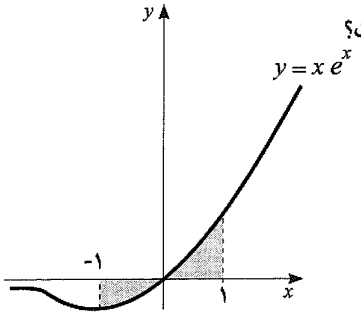
۳۰. اگر $I(t) = \int ۳t^۲ \ln t dt$ باشد، مقدار $I(e) - I(۱)$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $\frac{۱}{۳}(e^۳ + ۱)$ ۲) $\frac{۱}{۳}(۲e^۳ - ۱)$ ۳) $\frac{۱}{۳}(۲e^۳ + ۱)$ ۴) $\frac{۱}{۳}(e^۳ - ۱)$

۳۱. مقدار انتگرال $I = \int_۰^۱ \frac{tdt}{t+۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $\frac{۱}{۲} \ln ۲ - ۱$ ۲) $۱ - \ln ۲$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۲. سطح سایه‌زده در شکل مقابل کدام است؟ [۱۳۷۸]



۱) e
۲) $۲ - \frac{۲}{e}$
۳) $e - ۱$
۴) $e + ۱$

۳۳. اگر $I(x) = \int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}}$ باشد، $I(1) - I(0)$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

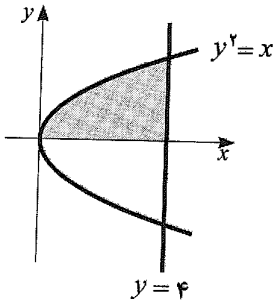
۳۴. مقدار انتگرال $I = \int_1^2 \frac{2 \ln x}{x} dx$، برابر کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $2 \ln 2$ ۲) $(\ln 2)^2$ ۳) $\ln 4$ ۴) $\frac{1}{2} \ln 2$

۳۵. اگر $I(x) = \int e^{\sqrt{x}} dx$، آنگاه $I(1) - I(0)$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) ۱ ۲) $2(e-1)$ ۳) $e-1$ ۴) ۲

۳۶. در شکل مقابل سطح سایه‌زده کدام است؟ [۱۳۷۹]



۱) $\frac{16}{3}$
۲) ۴
۳) $\frac{8}{3}$
۴) ۶

۳۷. ضریب زاویه مماس بر منحنی تابع $y = f(x)$ در هر نقطه $M(x, y)$ واقع بر آن برابر جذر طول آن نقطه است. اگر نمودار آن تابع از مبدأ مختصات بگذرد، از کدام نقطه دیگر می‌گذرد؟ [۱۳۷۹]

۱) $(6, 9)$ ۲) $(4, 8)$ ۳) $(9, 18)$ ۴) $(2, 4)$

۳۸. انتگرال $\int \frac{dx}{x^3+x}$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $\text{Arc}\tan x - \ln x + c$
۲) $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+1} + c$
۳) $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2} + c$
۴) $\text{Arc}\tan x + \ln x + c$

۳۹. مقدار انتگرال $I = \int_0^1 \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $\ln \frac{9}{2}$ ۲) $2 \ln \frac{7}{6}$ ۳) $\ln \frac{5}{2}$ ۴) $2 \ln \frac{3}{2}$

۴۰. سطح محصور بین منحنی $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ و محور xها در فاصله‌ی $x = 1$ تا $x = 4$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $\frac{\pi}{4} + 1$ ۲) $2 - \frac{\pi}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۱. مقدار انتگرال $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{-4+2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{-1+\sqrt{2}}{3}$

۴۲. حاصل انتگرال $\int_0^1 (3x+2)(2x dx)$ کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۳. حاصل انتگرال $\int_0^2 \frac{dx}{1+e^x}$، برابر است با: [۱۳۸۱]

۱) $\ln(2e^2+2)$
۲) $2 - \ln(2e^2+2)$
۳) $2 + \ln 2 - \ln(e^2+1)$
۴) $2 - \ln(e^2+1)$

۴۴. مقدار $\int_{-۱}^{۰} x^۲\sqrt{x+۱}dx$ برابر است با: ۱۳۸۱

۱) $\frac{۸}{۱۰۵}$ ۲) $-\frac{۸}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۴) $-\frac{۱۶}{۱۰۵}$

۴۵. سطح محصور بین دو منحنی $y=x^۲-۲x$ و $y=۴-x^۲$ چقدر است؟ ۱۳۸۱

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۲۰}{۳}$

۴۶. اگر $F''(x)=۱۲x^۲-۱۲x$ و $F'(۰)=۲$ و $F(۱)=۲$ باشد، آنگاه تابع $F(x)$ برابر است با: ۱۳۸۲

۱) $F(x)=x^۴-۲x^۳+۲x+۱$ ۲) $F(x)=x^۴-x^۳+۲x^۲$

۳) $F(x)=x^۴-۳x^۲+۲x+۲$ ۴) $F(x)=x^۴+۲x^۳-۴x+۳$

۴۷. اگر $f(x)=\int_{۲}^{x}\frac{۱}{\sqrt{۱+t^۳}}$ و $g(x)=xe^x$، آنگاه $(gof)'(x)$ در نقطه $x=۲$ کدام است؟ ۱۳۸۲

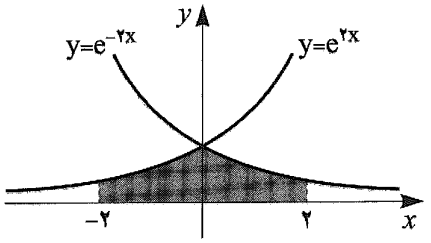
۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۴۸. مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۲} tf''(t)dt$ کدام است؟ با فرض آنکه ۱۳۸۲

$$f'(۲)=f(۲)=f'(۰)=۳$$

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۴۹. مساحت S در شکل داده شده، کدام است؟ ۱۳۸۲



۱) $e^۴-۱$ ۲) $۱-e^{-۴}$ ۳) $e^۴-e^{-۴}$ ۴) $e^{-۴}-e^۴$

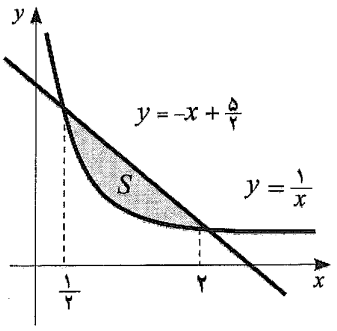
۵۰. اگر $I(x)=\int x^۲\sqrt{x^۳+۱}dx$ مقدار $I(۲)-I(-۱)$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) ۶

۵۱. مقدار انتگرال $I=\int_{۰}^{۱} xe^{-x}dx$، کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) e ۲) $e-۱$ ۳) $\frac{۲}{e}$ ۴) $۱-\frac{۲}{e}$

۵۲. مساحت S از شکل داده شده برابر است با: ۱۳۸۳



۱) $\frac{۳}{۴}-\ln ۲$

۲) $\frac{۷}{۸}-\ln ۲$

۳) $\frac{۹}{۸}-۲\ln ۲$

۴) $\frac{۱۵}{۸}-۲\ln ۲$

۵۳. جواب انتگرال $\int \frac{dx}{x(x^۲+۱)}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $\ln(x+\sqrt{x^۲+۱})+C$

۲) $\ln(-x+\sqrt{x^۲+۱})+C$

۳) $\ln\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}+C$

۴) $\ln\frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x}+C$

۵۴. حاصل انتگرال $\int_{-۱}^{۱}\frac{xdx}{e^x}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

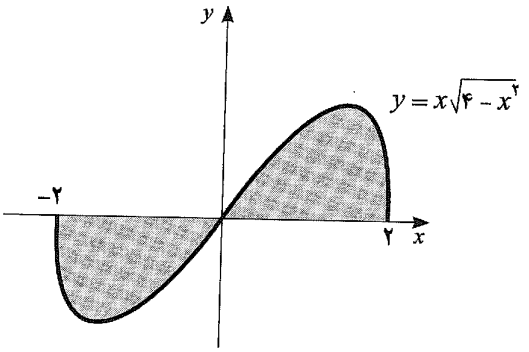
۱) $\frac{۲}{e}$

۲) $\frac{-۲}{e}$

۳) $e-\frac{۱}{e}$

۴) $\frac{۱}{e}-e$

۵۵. مساحت سایه‌زده در شکل مقابل کدام است؟ ۱۳۸۴



۱) $\frac{۷}{۳}$

۲) $\frac{۸}{۳}$

۳) $\frac{۱۴}{۳}$

۴) $\frac{۱۶}{۳}$

۵۶. اگر $F(x)=\int_{۰}^{x}\frac{dt}{۱+t^۳}$، مقدار مشتق $F(x)$ به‌ازای $x=۱$ چقدر است؟ ۱۳۸۴

۱) ۰

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۳.

$$\int x\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{۳}{۲}}dx=\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+c\Longrightarrow\frac{۲}{۵}(۱)^{\frac{۵}{۲}}+c=۱\Longrightarrow c=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

۲. گزینه‌ی ۴.

$$\int_{۰}^{۲\sqrt{۲}}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\sqrt{۲}}۲x(x^۲+۱)^{-\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۱}{۲}\times۲(x^۲+۱)^{\frac{۱}{۲}}\Big|_{۰}^{۲\sqrt{۲}}=۲$$

۳. گزینه‌ی ۳.

$$\int\frac{\sqrt{x}+۱}{x}dx=\int\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{x}\right)dx=\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx+\int\frac{dx}{x}=۲x^{\frac{۱}{۲}}+\ln x+c$$

۴. گزینه‌ی ۲.

$$u=\ln x\Longrightarrow du=\frac{dx}{x},dv=۲xdx\Longrightarrow v=x^۲$$

$$\int ۲x\ln xdx=x^۲\ln x-\int x^۲\frac{dx}{x}=x^۲\ln x-\frac{۱}{۲}x^۲$$

۵. گزینه‌ی ۳.

$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{x+۲}{x+۱}dx=\int_{۰}^{۱}\frac{x+۱}{x+۱}dx+\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{x+۱}dx=x\Big|_{۰}^{۱}+\ln|x+۱|\Big|_{۰}^{۱}=۱+\ln ۲$$

۶. گزینه‌ی ۴.

$$S=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}\frac{۱}{x^{۲}}dx=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}x^{-۲}dx=-x^{-۱}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}=-۱+۲=۱$$

۷. گزینه‌ی ۳.

$$u=x\Longrightarrow du=dx, e^{x}dx=dv\Longrightarrow v=e^{x}$$

$$\int_{۰}^{۱}۴xe^{x}dx=۴xe^{x}\Big|_{۰}^{۱}-۴\int_{۰}^{۱}e^{x}dx=(۴xe^{x}-۴e^{x})\Big|_{۰}^{۱}=۴$$

۸. گزینه‌ی ۳.

$$\int_{۱}^{۲}\frac{x+۱}{x}dx=\int_{۱}^{۲}\frac{x}{x}dx+\int_{۱}^{۲}\frac{۱}{x}dx=x\Big|_{۱}^{۲}+\ln x\Big|_{۱}^{۲}=۱+\ln ۲$$

۹. گزینه‌ی ۱.

$$y=\int(۳x-۵)dx=\frac{۳}{۲}x^{۲}-۵x+c\xrightarrow{(۱,۲)}۲=\frac{۳}{۲}-۵+c\Longrightarrow c=\frac{۱۱}{۲}$$

$$x=۰\Longrightarrow y=۰-۰+\frac{۱۱}{۲}\Longrightarrow y=\frac{۱۱}{۲}$$

۱۰. گزینه‌ی ۲.

$$I(x)=\int x(۲x^{۲}+۱)^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۱}{۴}\int ۴x(۲x^{۲}+۱)^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۲}{۴\times ۳}(۲x^{۲}+۱)^{\frac{۳}{۲}}+c$$

$$I(۰)=\frac{۱}{۶}(۰+۱)^{\frac{۳}{۲}}+c=\frac{۱}{۶}+c$$

۱۱. گزینه‌ی ۳. با توجه به پاسخ تست ۶، رشتهٔ مدیریت، خواهیم داشت:

$$I(x)=\frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}-۲(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}+c\Longrightarrow I(۰)=-\frac{۴}{۳}+c$$

۱۲. گزینه‌ی ۲.

$$S=\int_{۰}^{۱}e^{x}dx=e^{x}\Big|_{۰}^{۱}=e^{۱}-e^{۰}=e-۱$$

۱۳. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases}y=x^{۳}\\ y=x\end{cases}\Longrightarrow x^{۳}-x=۰\Longrightarrow x(x^{۲}-۱)=۰\Longrightarrow x=۰, x=\pm ۱$$

$$S=\int_{۰}^{۱}(x-x^{۳})dx=(\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{۴}x^{۴})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۴}$$

۱۴. گزینه‌ی ۱.

$$I(x)=\int e^x \mathfrak{f}^x dx=\int (\mathfrak{f}e)^x dx=\frac{(\mathfrak{f}e)^x}{\ln \mathfrak{f}e} \Longrightarrow I(\circ)=\frac{(\mathfrak{f}e)^\circ}{\ln \mathfrak{f}e}=(\ln \mathfrak{f}e)^{-1}$$

۱۵. گزینه‌ی ۴.

$$1-x=u \Longrightarrow du=-dx, x=1-u$$
$$I=\int (1-u)u^\Delta(-du)=-\int (u^\Delta-u^\mathfrak{s})du=-\left(\frac{1}{\mathfrak{s}}u^\mathfrak{s}-\frac{1}{\mathfrak{v}}u^\mathfrak{v}\right)+c$$
$$I=-\frac{1}{\mathfrak{s}}(1-x)^\mathfrak{s}+\frac{1}{\mathfrak{v}}(1-x)^\mathfrak{v}+c \xrightarrow{x=\mathfrak{r},c=\circ} I=-\frac{1}{\mathfrak{s}}-\frac{1}{\mathfrak{v}}=-\frac{13}{\mathfrak{f}\mathfrak{r}}$$

۱۶. گزینه‌ی ۲.

$$u=1+\frac{1}{x} \Longrightarrow du=-\frac{1}{x^\mathfrak{r}}dx$$
$$I=-\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^\mathfrak{r}}\right)dx=-\int \sqrt{u}.du=-\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}u^{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}}+c=-\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}}+c$$
$$\xrightarrow{x=\mathfrak{r},c=\circ} I=-\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}\left(1+\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)^{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}}=-\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}\right)^{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}}=-\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}\right)^{\frac{1}{\mathfrak{r}}}=-\sqrt{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}}$$

۱۷. گزینه‌ی ۳.

$$y=\mathfrak{f}x-x^\mathfrak{r}=\circ \Longrightarrow x(\mathfrak{f}-x)=\circ \Longrightarrow x=\circ, x=\mathfrak{f}$$
$$S=\int_\circ^\mathfrak{f}(\mathfrak{f}x-x^\mathfrak{r})dx=(\mathfrak{r}x^\mathfrak{r}-\frac{1}{\mathfrak{r}}x^\mathfrak{r})\Big|_\circ^\mathfrak{f}=\mathfrak{r}\mathfrak{r}-\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{f}}{\mathfrak{r}}=\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}$$

۱۸. گزینه‌ی ۱.

$$u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{dx}{x}, dx=dv \Longrightarrow v=x$$
$$\int_1^\mathfrak{r}\ln x dx=x\ln x\Big|_1^\mathfrak{r}-\int_1^\mathfrak{r}x.\frac{dx}{x}=\mathfrak{r}\ln\mathfrak{r}-\ln 1-x\Big|_1^\mathfrak{r}=\mathfrak{r}\ln\mathfrak{r}-1$$

۱۹. گزینه‌ی ۳.

$$u=\mathfrak{r}x+\mathfrak{f} \Longrightarrow du=\mathfrak{r}dx$$
$$\int_{-1}^\circ \sqrt{\mathfrak{r}x+\mathfrak{f}}dx=\frac{1}{\mathfrak{r}}\int_{-1}^\circ \sqrt{u}du=\frac{1}{\mathfrak{r}}\times\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}u^{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}}=\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}}(\mathfrak{r}x+\mathfrak{f})^{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}}\Big|_{-1}^\circ=\frac{16}{\mathfrak{q}}-\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}}=\frac{14}{\mathfrak{q}}$$

۲۰. گزینه‌ی ۴.

$$u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{dx}{x}, dv=x^{11}dx \Longrightarrow v=\frac{1}{12}x^{12}$$
$$I=\int x^{11}\ln x dx=\frac{1}{12}x^{12}\ln x-\int\frac{1}{12}x^{12}.\frac{dx}{x}=\frac{1}{12}x^{12}\ln x-\frac{1}{144}x^{12}+c$$
$$\xrightarrow{x=1} I=\circ-\frac{1}{144}+c=-\frac{1}{144}+c$$

۲۱. گزینه‌ی ۲.

$$F(x)=\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}dx=\int (x+1)(x+1)^{-\frac{2}{3}}dx=\int (x+1)^{\frac{1}{3}}dx \Longrightarrow$$
$$F(x)=\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} \Longrightarrow F(0)=\frac{3}{4}(0+1)^{\frac{4}{3}} \Longrightarrow F(0)=\frac{3}{4}$$

۲۲. گزینه‌ی ۴.

$$u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{dx}{x}, dv=xdx \Longrightarrow v=\frac{1}{2}x^2$$
$$I(x)=\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$$
$$I(1)=0-\frac{1}{4}+c=-\frac{1}{4}+c$$

۲۳. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Longrightarrow x=x^2 \Longrightarrow x(1-x)=0 \Longrightarrow x=0, x=1$$
$$S=\int_0^1 (x-x^2)dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

۲۴. گزینه‌ی ۳. اگر از شیب تابع که همان $\frac{dy}{dx}$ است انتگرال بگیریم، خود تابع به‌دست می‌آید.

$$dy=\left(2x+\frac{1}{x+1}\right)dx \Longrightarrow y=\int \left(2x+\frac{1}{x+1}\right)dx \Longrightarrow y=x^2+\ln|x+1|+c$$
$$\xrightarrow{(0,0)} 0=0+\ln 1+c \Longrightarrow c=0 \Longrightarrow y=x^2+\ln|x+1| \xrightarrow{x=1} y=1+\ln 2$$

۲۵. گزینه‌ی ۴.

$$I(x)=\int \frac{dx}{4-x^2}=\frac{1}{4}\ln x\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c \xrightarrow{c=0} I(1)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+1}{2-1}\right|=\frac{1}{4}\ln 3$$

۲۶. گزینه‌ی ۱.

$$u=x \Longrightarrow du=dx, dv=cosxdx \Longrightarrow v=\sin x$$
$$I(x)=\int x\cos x dx=x\sin x-\int \sin x dx=x\sin x+\cos x \Longrightarrow I(0)=0+1=1$$

۲۷. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} y=0 \\ y=\ln x \end{cases} \Longrightarrow \ln x=0 \Longrightarrow x=1$$
$$S=\int_1^2 \ln x dx=x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 \frac{x}{x}dx=x\ln x\Big|_1^2-x\Big|_1^2=2\ln 2-1$$

۲۸. گزینه‌ی ۱.

$$u = ۴ - x^۲ \Longrightarrow du = -۲x\,dx \Longrightarrow -\frac{du}{۲} = x\,dx$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۴-x^۲}} = -\frac{۱}{۲}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{۱}{۲}\int u^{-\frac{۱}{۲}}du = -\frac{۱}{۲}\times ۲ \times \sqrt{u} + c$$

$$I = \int_{۰}^{\sqrt{۳}} (\frac{x}{\sqrt{۴-x^۲}})dx = (-\sqrt{۴-x^۲})\Big|_{۰}^{\sqrt{۳}} = -(۱-۲) = ۱$$

۲۹. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} y = ۸ - x^۲ \\ y = ۴ \end{cases} \Longrightarrow ۸ - x^۲ = ۴ \Longrightarrow x^۲ = ۴ \Longrightarrow x = \pm ۲$$

$$S = \int_{-۲}^{۲} (۸ - x^۲ - ۴)dx = \int_{-۲}^{۲} (۴ - x^۲)dx = (۴x - \frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_{-۲}^{۲} = \frac{۳۲}{۳}$$

۳۰. گزینه‌ی ۳.

$$u = \ln t \Longrightarrow du = \frac{۱}{t}dt\ ,\ dv = ۳t^۲dt \Longrightarrow v = t^۳$$

$$I(t) = t^۳\ln t - \int t^۲dt = t^۳\ln t - \frac{۱}{۳}t^۳$$

$$I(e) - I(۱) = (e^۳\ln e - \frac{۱}{۳}e^۳) - (۰ - \frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۳}(۲e^۳ + ۱)$$

۳۱. گزینه‌ی ۲.

$$I = \int_{۰}^{۱} \frac{t}{t+۱}dt = \int_{۰}^{۱} \frac{t+۱-۱}{t+۱}dt = \int_{۰}^{۱} dt - \int_{۰}^{۱} \frac{dt}{t+۱}$$

$$= t\Big|_{۰}^{۱} - \ln|t+۱|\Big|_{۰}^{۱} = ۱ - (\ln ۲ - \ln ۱) = ۱ - \ln ۲$$

۳۲. گزینه‌ی ۲.

$$I = \int xe^x dx\ \ ,\ \ u = x \Longrightarrow du = dx, dv = e^x \Longrightarrow v = e^x$$

$$I = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-۱)$$

$$S = \int_{-۱}^{۰} xe^x dx + \int_{۰}^{۱} xe^x dx = \left|e^x(x-۱)|_{-۱}^{۰}\right| + e^x(x-۱)|_{۰}^{۱}$$

$$S = \left|-۱ + ۲e^{-۱}\right| + (۰ + e^۰) = \left|-۱ + \frac{۲}{e}\right| + ۱ = ۱ - \frac{۲}{e} + ۱ = ۲ - \frac{۲}{e}$$

۳۳. گزینه‌ی ۳.

$$I(x) = \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x}{\sqrt{۲x+۱}}dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x+۱-۱}{(۲x+۱)^{\frac{۱}{۲}}}dx$$

$$I(x) = \frac{۱}{۲}\int (۲x+۱)^{\frac{۱}{۲}}dx - \frac{۱}{۲}\int (۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}dx$$

$$I(x) = \frac{۱}{۶}(۲x+۱)^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۲}(۲x+۱)^{\frac{۱}{۲}} + c = \frac{۱}{۶}\sqrt{(۲x+۱)^۳} - \frac{۱}{۲}\sqrt{۲x+۱} + c$$

$$I(۱) - I(۰) = \frac{۳}{۶}\sqrt{۳} - \frac{۱}{۲}\sqrt{۳} + c - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲} - c = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۳۴. گزینه‌ی ۲.

$$u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{dx}{x}\ ,\ x=۱ \Longrightarrow u=۰\ ,\ x=۲ \Longrightarrow u=\ln ۲$$

$$I=۲\int_{۱}^{۲}\frac{\ln x}{x}dx=۲\int_{۰}^{\ln ۲}udu=۲\left(\frac{u^{۲}}{۲}\right)\Big|_{۰}^{\ln ۲}=(\ln ۲)^{۲}$$

۳۵. گزینه‌ی ۴.

$$\sqrt{x}=t\Longrightarrow\frac{dx}{۲\sqrt{x}}=dt\Longrightarrow dx=۲\sqrt{x}dt\Longrightarrow I(x)=\int(۲te^{t})dt$$

$$u=t\Longrightarrow du=dt\ ,\ dv=e^{t}dt\Longrightarrow v=e^{t}$$

$$I(x)=۲(te^{t}-\int e^{t}dt)=۲te^{t}-۲e^{t}+c=۲e^{t}(t-۱)+c$$

$$I(x)=۲e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-۱)+c\Longrightarrow I(۱)-I(۰)=۲e(۱-۱)-۲e^{۰}(۰-۱)=۲$$

۳۶. گزینه‌ی ۱.

$$y^{۲}=x\Longrightarrow y=\sqrt{x}$$

$$S=\int_{۰}^{۴}\sqrt{x}dx=\int_{۰}^{۴}x^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۴}=\frac{۲}{۳}(۴)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱۶}{۳}$$

۳۷. گزینه‌ی ۳.

$$y'=m=\sqrt{x}\ ,\ \frac{dy}{dx}=\sqrt{x}=x^{\frac{۱}{۲}}\Longrightarrow y=\int x^{\frac{۱}{۲}}dx\Longrightarrow$$

$$y=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+c\Longrightarrow y=\frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}}+c\xrightarrow{(۰,۰)}c=۰$$

$y=\frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}}\longrightarrow$ نمودار تابع از نقطه‌ی $(۹,۱۸)$ می‌گذرد

۳۸. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{۱}{x^{۳}+x}=\frac{۱}{x(x^{۲}+۱)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^{۲}+۱}\Longrightarrow$$

$$\frac{Ax^{۲}+A+Bx^{۲}+Cx}{x(x^{۲}+۱)}=\frac{۱}{x(x^{۲}+۱)}\Longrightarrow\begin{cases}A=۱\\A+B=۰\Longrightarrow B=-۱\\C=۰\end{cases}$$

$$\int\frac{۱}{x}dx-\int\frac{x}{x^{۲}+۱}dx=\ln x-\frac{۱}{۲}\int\frac{۲x}{x^{۲}+۱}dx=\ln x-\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۱)+c$$

$$=\frac{۱}{۲}\ln x^{۲}-\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۱)=\frac{۱}{۲}\ln\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}+c$$

۳۹. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{۳x+۴}{x^{۲}+۳x+۲}=\frac{۳x+۴}{(x+۱)(x+۲)}=\frac{A}{x+۱}+\frac{B}{x+۲}=\frac{Ax+۲A+Bx+B}{(x+۱)(x+۲)}\Longrightarrow$$

$$\frac{۳x+۴}{(x+۱)(x+۲)}=\frac{(A+B)x+۲A+B}{(x+۱)(x+۲)}\Longrightarrow\begin{cases}A+B=۳\\۲A+B=۴\end{cases}\Longrightarrow A=۱\ ,\ B=۲$$

$$I=\int_{۰}^{۱}\left(\frac{۱}{x+۱}+\frac{۲}{x+۲}\right)dx=(\ln(x+۱)+۲\ln(x+۲))|_{۰}^{۱}$$
$$=(\ln ۲+۲\ln ۳)-(\ln ۱+۲\ln ۲)=\ln ۹-\ln ۲=\ln\frac{۹}{۲}$$

۴۰. گزینه‌ی ۲.

$$S=\int_{۱}^{۲}\frac{\sqrt{x-۱}}{x}dx=\int_{۱}^{۲}\frac{x-۱}{x\sqrt{x-۱}}dx=\int_{۱}^{۲}\frac{dx}{\sqrt{x-۱}}-\int\frac{dx}{x\sqrt{x-۱}}$$
$$S=۲(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}\Big|_{۱}^{۲}-۲\arctan\sqrt{x-۱}\Big|_{۱}^{۲}=۲-۲(\frac{\pi}{۴}-۰)=۲-\frac{\pi}{۲}$$

انتگرال دوم به شکل زیر محاسبه شده است.

$$t=\sqrt{x-۱}\Longrightarrow\begin{cases}dt=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\Longrightarrow ۲dt=\dfrac{۱}{\sqrt{x-۱}}dx\\ t^{۲}=x-۱\Longrightarrow x=t^{۲}+۱\end{cases}$$
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x-۱}}=۲\int\frac{dt}{t^{۲}+۱}=۲\arctan t=۲\arctan\sqrt{x-۱}$$

۴۱. گزینه‌ی ۱.

$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{x}{\sqrt{x+۱}}dx=\int_{۰}^{۱}\frac{x+۱-۱}{(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}}dx=\int_{۰}^{۱}(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}dx-\int_{۰}^{۱}(x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}dx$$
$$I=\left(\frac{۲}{۳}\sqrt{(x+۱)^{۳}}-۲\sqrt{x+۱}\right)\Big|_{۰}^{۱}=\left(\frac{۲}{۳}\sqrt{۸}-۲\sqrt{۲}\right)-\left(\frac{۲}{۳}-۲\right)=\frac{۴-۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۴۲. گزینه‌ی ۴.

$$\int_{۰}^{۱}(۳x+۲)(۲xdx)=\int_{۰}^{۱}(۶x^{۲}+۴x)dx=(۲x^{۳}+۲x^{۲})\Big|_{۰}^{۱}=۴$$

۴۳. گزینه‌ی ۳.

$$\int_{۰}^{۲}\frac{dx}{e^{x}+۱}=\int_{۰}^{۲}\frac{e^{x}+۱-e^{x}}{e^{x}+۱}dx=\int_{۰}^{۲}dx-\int_{۰}^{۲}\frac{e^{x}dx}{e^{x}+۱}$$
$$=x\Big|_{۰}^{۲}-\ln(e^{x}+۱)\Big|_{۰}^{۲}=۲-\ln(e^{۲}+۱)+\ln ۲$$

۴۴. گزینه‌ی ۳.

$$\sqrt{x+۱}=u\Longrightarrow x=u^{۲}-۱\Longrightarrow dx=۲udu\,,\begin{cases}x=-۱\Longrightarrow u=۰\\ x=۰\Longrightarrow u=۱\end{cases}$$
$$\int_{-۱}^{۰}x^{۲}\sqrt{x+۱}dx=\int_{۰}^{۱}(u^{۲}-۱)^{۲}۲u^{۲}du=\int_{۰}^{۱}(۲u^{۶}-۴u^{۴}+۲u^{۲})du$$
$$=(\frac{۲}{۷}u^{۷}-\frac{۴}{۵}u^{۵}+\frac{۲}{۳}u^{۳})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۲}{۷}-\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۳}=\frac{۱۶}{۱۰۵}$$

۴۵. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases}y=x^{۲}-۲x & \Longrightarrow x^{۲}-۲x=۴-x^{۲}\Longrightarrow ۲x^{۲}-۲x-۴=۰\\ y=۴-x^{۲} & \Longrightarrow x^{۲}-x-۲=۰\Longrightarrow(x-۲)(x+۱)=۰\Longrightarrow x=۲\,,\ x=-۱\end{cases}$$

$$S = |\int_{-۱}^{۲}(x^۲ - ۲x - ۴ + x^۲)dx| = |\int_{-۱}^{۲}(۲x^۲ - ۲x - ۴)dx|$$
$$S = |(\frac{۲}{۳}x^۳ - x^۲ - ۴x)\Big|_{-۱}^{۲}| = ۹$$

۴۶. گزینه‌ی ۱.

$$F'(x) = \int F''(x)dx = \int(۱۲x^۲ - ۱۲x)dx = ۴x^۳ - ۶x^۲ + c$$
$$F'(۰) = ۲ \Longrightarrow ۰ - ۰ + c = ۲ \Longrightarrow c = ۲$$
$$F(x) = \int F'(x)dx = \int(۴x^۳ - ۶x^۲ + ۲)dx = x^۴ - ۲x^۳ + ۲x + c$$
$$F(۱) = ۲ \Longrightarrow ۱ - ۲ + ۲ + c = ۲ \Longrightarrow c = ۱,\ F(x) = x^۴ - ۲x^۳ + ۲x + ۱$$

۴۷. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{۲}^{x}\frac{۱}{\sqrt{۱+t^۳}}dt \Longrightarrow f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۳}}$$
$$g(x) = xe^x \Longrightarrow g'(x) = e^x + xe^x$$
$$(g\,o\,f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) \Longrightarrow (g\,o\,f)'(۲) = g'(f(۲))\cdot f'(۲)$$
$$f'(۲) = \frac{۱}{\sqrt{۱+۸}} = \frac{۱}{۳},\ f(۲) = ۰$$
$$(g\,o\,f)'(۲) = g'(۰)\cdot\frac{۱}{۳} = (e^۰ + ۰)\cdot\frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

۴۸. گزینه‌ی ۳.

$$u = t \Longrightarrow du = dt,\ f''(t) = dv \Longrightarrow f'(t) = v$$
$$\int tf''(t)dt = tf'(t) - \int f'(t)dt = tf'(t) - f(t)$$
$$\int_{۰}^{۲} tf''(t)dt = (tf'(t) - f(t))\Big|_{۰}^{۲} = ۲f'(۲) - f(t) + f(۰) = ۶ - ۳ + ۳ = ۶$$

۴۹. گزینه‌ی ۲.

$$S = \int_{-۲}^{۰} e^{۲x}dx + \int_{۰}^{۲} e^{-۲x}dx = \frac{۱}{۲}e^{۲x}\Big|_{-۲}^{۰} - \frac{۱}{۲}e^{-۲x}\Big|_{۰}^{۲}$$
$$= (\frac{۱}{۲}e^۰ - \frac{۱}{۲}e^{-۴}) + (-\frac{۱}{۲}e^{-۴} + \frac{۱}{۲}e^۰) = ۱ - e^{-۴}$$

۵۰. گزینه‌ی ۴.

$$u = x^۳ + ۱ \Longrightarrow du = ۳x^۲dx \Longrightarrow \frac{du}{۳} = x^۲dx$$
$$I(x) = \int x^۲\sqrt{x^۳+۱}dx \Longrightarrow I(u) = \frac{۱}{۳}\int\sqrt{u}du = \frac{۱}{۳}\times\frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۹}\sqrt{u^۳}$$
$$I(x) = \frac{۲}{۹}\sqrt{(x^۳+۱)^۳} \Longrightarrow I(۲) - I(-۱) = \frac{۲}{۹}\sqrt{۹^۳} - \frac{۲}{۹}\sqrt{۰} = ۶$$

۵۱. گزینه‌ی ۴.

$$u = x \Longrightarrow du = dx \ , \ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$$

$$I = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

$$I = \int_{\circ}^{۱} xe^{-x}dx = (-e^{-۱} - e^{-۱}) - (\circ - e^{\circ}) = -۲e^{-۱} + ۱ = ۱ - \frac{۲}{e}$$

۵۲. گزینه‌ی ۴.

$$S = \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} (-x + \frac{۵}{۲} - \frac{۱}{x})dx = (-\frac{x^{۲}}{۲} + \frac{۵}{۲}x - \ln x)\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۲}$$

$$S = (-۲ + ۵ - \ln ۲) - (-\frac{۱}{۸} + \frac{۵}{۴} - \ln \frac{۱}{۲}) = \frac{۱۵}{۸} - ۲\ln ۲$$

۵۳. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{۱}{x^{۳} + x} = \frac{۱}{x(x^{۲} + ۱)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^{۲} + ۱} = \frac{Ax^{۲} + A + Bx^{۲} + Cx}{x(x^{۲} + ۱)}$$

$$\Longrightarrow A = ۱ \ , \ C = \circ \ , \ A + B = \circ \Longrightarrow B = -۱$$

$$\int \frac{dx}{x(x^{۲} + ۱)} = \int \frac{۱}{x}dx - \int \frac{x}{x^{۲} + ۱}dx = \ln x - \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x}{x^{۲} + ۱}dx$$

$$= \ln x - \frac{۱}{۲}\ln(x^{۲} + ۱) + c = \ln x - \ln \sqrt{x^{۲} + ۱} + c$$

$$= \ln \frac{x}{\sqrt{x^{۲} + ۱}} + c$$

۵۴. گزینه‌ی ۲.

$$\int \frac{x\,dx}{e^{x}} = \int xe^{-x}dx$$

$$u = x \Longrightarrow du = dx \ , \ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

$$\int_{-۱}^{۱} xe^{-x}dx = (-e^{-۱} - e^{-۱}) - (e - e) = -۲e^{-۱} = \frac{-۲}{e}$$

۵۵. گزینه‌ی ۴.

$$S = |\int_{-۲}^{\circ} y\,dx| + \int_{\circ}^{۲} y\,dx$$

$$\int x\sqrt{۴ - x^{۲}}dx = \frac{-۱}{۲}\int (-۲x)(۴ - x^{۲})^{\frac{۱}{۲}}du = \frac{-۱}{۲} \times \frac{(۴ - x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{-۱}{۳}\sqrt{(۴ - x^{۲})^{۳}}$$

$$S = |(-\frac{۱}{۳}\sqrt{(۴ - x^{۲})^{۳}})]_{-۲}^{\circ}| + (-\frac{۱}{۳}\sqrt{(۴ - x^{۲})^{۳}})\Big|_{\circ}^{۲} = \frac{۸}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

۵۶. گزینه‌ی ۳.

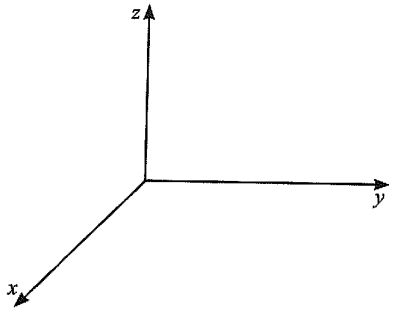
$$F(x) = \int_{\circ}^{x} \frac{dt}{۱ + t^{۳}} \Longrightarrow F'(x) = \frac{۱}{۱ + x^{۳}} \Longrightarrow F'(۱) = \frac{۱}{۲}$$

فصل ۷

بردار، خط و صفحه

مختصات در فضا

۷ـ۱ هر نقطه در فضا با سه‌عدد مشخص می‌شود. برای این‌کار دستگاه مختصات فضایی را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

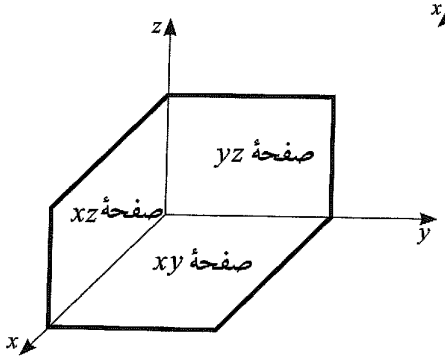


۷ـ۲ هر دو محور، یک صفحه تشکیل می‌دهند:

۱) صفحه شامل محور x و y را صفحه‌ی xy

۲) صفحه شامل محور x و z را صفحه‌ی xz

۳) صفحه شامل محور y و z را صفحه‌ی yz می‌نامیم.



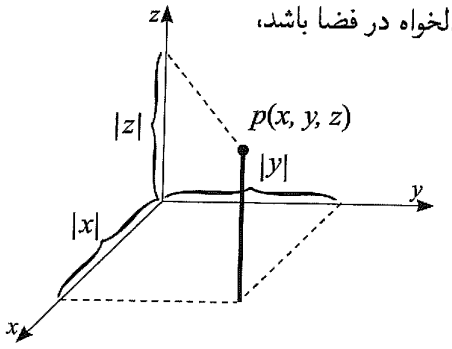
این سه‌صفحه را صفحات مختصات می‌گوییم.

۷ـ۳ مشخص‌کردن مختصات یک نقطه در فضا: اگر $P(x, y, z)$ یک نقطه‌ی دلخواه در فضا باشد،

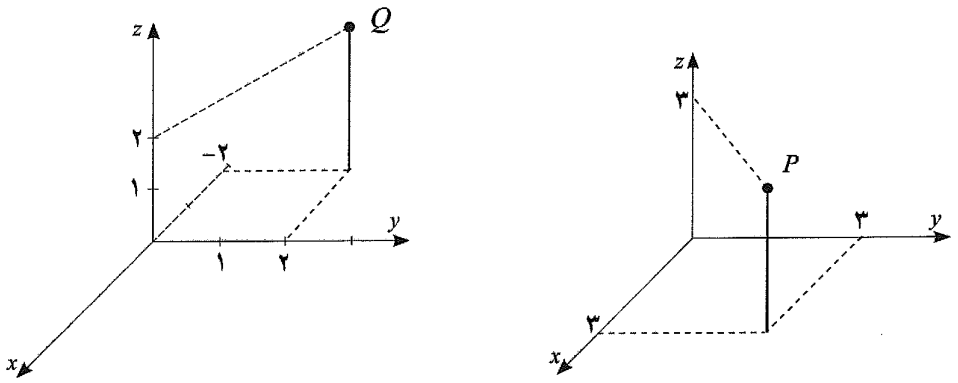
۱) عدد x، فاصله جهت‌دار نقطه‌ی P از صفحه‌ی yz.

۲) عدد y، فاصله جهت‌دار نقطه‌ی P از صفحه‌ی xz.

۳) عدد z، فاصله جهت‌دار نقطه P از صفحه‌ی xy.



مثال نقاط $P(۳, ۳, ۳)$ و $Q(-۲, ۲, ۲)$ را در صفحه‌ی مختصات رسم کنید.



۴ـ۷ مجموعه‌ی همه‌ی سه‌تایی‌های مرتب (x, y, z) را با $\mathbb{R}^3$ نمایش می‌دهیم و آن را فضای سه‌بعدی گوییم.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

۵ـ۷ نمایش محورهای مختصات با مجموعه‌ی نقاط:

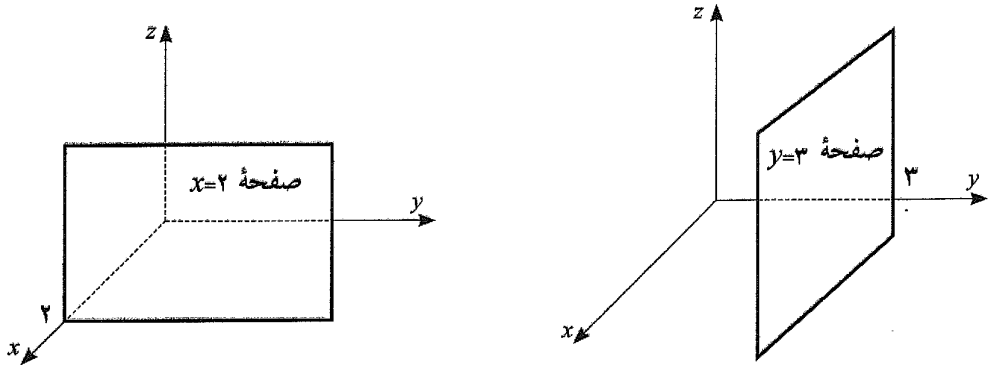
$$\text{محور‌های } x = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{محور‌های } y = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{محور‌های } z = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

۶ـ۷ نمایش صفحات مختصات با مجموعه‌ی نقاط:

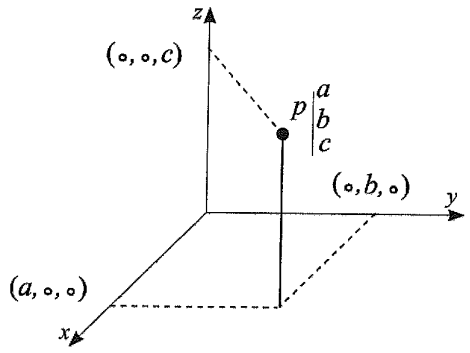
$$\text{صفحه‌ی } xy = \{(x, y, z) | z = 0\}$$
$$\text{صفحه‌ی } xz = \{(x, y, z) | y = 0\}$$
$$\text{صفحه‌ی } yz = \{(x, y, z) | x = 0\}$$

مثال مطلوب است رسم نمودار $x = 2$ و $y = 3$.

حل در واقع باید مجموعه‌ی نقاط $\{(x, y, z) | x = 2\}$ را رسم کرد. مختص x هر نقطه واقع بر این مجموعه برابر ۲ است. یعنی فاصله‌ی هر نقطه‌ی این مجموعه تا صفحه‌ی yz برابر ۲ است. پس نمودار، صفحه‌ای موازی با صفحه‌ی yz است. برای $y = 3$ باید مجموعه‌ی $\{(x, y, z) | y = 3\}$ را رسم کرد. مختص y هرنقطه واقع بر این مجموعه برابر ۳ است. یعنی فاصله‌ی هر نقطه‌ی این مجموعه تا صفحه‌ی xz برابر ۳ است. پس نمودار صفحه‌ای موازی با صفحه‌ی xz است.



۷ـ۷ مختصات پای عمودهایی که از یک نقطه بر محورهای مختصات رسم می‌شود.



فاصله در فضای سه‌بعدی

۸ـ۷ فرض کنید $P(x_1, y_1, z_1)$ و $Q(x_2, y_2, z_2)$ دو نقطه در فضا باشند، فاصله‌ی نقطه‌ی P از Q (طول پاره‌خط PQ) برابر است با:

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

۹ـ۷ فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_1, y_1, z_1)$ از مبدأ برابر است با:

$$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

مثال نقاط $A(5, 1, 5)$، $B(4, 3, 2)$ و $C(-3, -2, 1)$ رأس‌های چه نوع مثلثی هستند؟

حل

$$AB = \sqrt{(5-4)^2 + (1-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$
$$AC = \sqrt{(5+3)^2 + (1+2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{64+9+16} = \sqrt{89}$$
$$BC = \sqrt{(4+3)^2 + (3+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{49+25+1} = \sqrt{75}$$

چون $AC^2 = AB^2 + BC^2$، پس نوع مثلث قائم‌الزاویه است.

مثال روی محور xها نقطه‌هایی را بیابید که فاصله آن‌ها از نقطه‌ی $A(-3, 4, 8)$ برابر با ۱۲ باشد.

حل نقطه‌ی $B(x, 0, 0)$ روی محور xها قرار دارد.

$$|AB| = 12 \Longrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + 4^2 + 8^2} = 12 \Longrightarrow (x+3)^2 = 64$$
$$\Longrightarrow x = 5\ ,\ x = -11 \Longrightarrow (5, 0, 0)\ ,\ (-11, 0, 0)$$

۱۰ـ۷ ویژگی‌های طول یک پاره‌خط:

۱) $|PQ| = 0$ اگر و فقط اگر $P = Q$. اگر $P \neq Q$، $|PQ| > 0$.

۲) $|PQ| = |QP|$

۳) به‌ازای هر سه‌نقطه‌ی دلخواه P، Q و R داریم $|PQ| \leqslant |PR| + |QR|$ و تساوی وقتی برقرار است که R روی پاره‌خط PQ و بین P و Q باشد.

بردارها در فضا

۷ـ۱۱ تعریف بردار: پاره‌خط جهت‌داری است که ابتدایش بر مبدأ مختصات واقع است.

۷ـ۱۲ با این تعریف، متناظر با هر بردار $\vec{v}$ در فضا یک نقطه‌ی (a, b, c) منظور می‌کنیم که این، مختصات نقطه‌ی انتهایی این بردار و برعکس به‌هر نقطه (a, b, c) درفضا، یک بردار $\vec{v}$ نسبت می‌دهیم. پس: هر سه‌تایی مرتب (a, b, c)، هم یک‌نقطه، هم یک بردار در فضا را نشان می‌دهد.

۷ـ۱۳ طول یک بردار: اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$، آنگاه:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

مثال طول بردار $\vec{a} = (-1, 3, -3)$ را بیابید.

حل

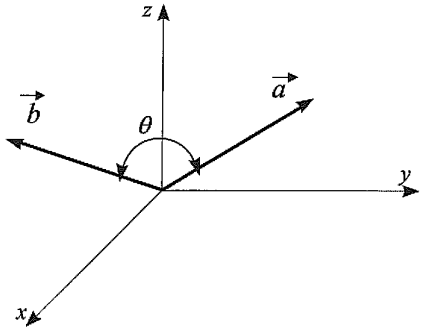
$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 9 + 9} = \sqrt{19}$$

۷ـ۱۴ بردار صفر: بردار متناظر با نقطه‌ی $O = (0, 0, 0)$ را بردار صفر نامند. بردار صفر را با O نشان می‌دهند.

۷ـ۱۵ دو بردار مساوی: دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ با هم مساوی‌اند اگر و فقط اگر مؤلفه‌های‌شان نظیربه‌نظیر با هم مساوی باشند. یعنی:

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

۷ـ۱۶ زاویه‌ی بین دوبردار: زاویه‌ی بین دو بردار غیرصفر a و b را زاویه‌ای چون θ درنظر می‌گیریم به‌طوری‌که $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$



۱۷ـ۷ | اگر $A=(x_1,y_1,z_1)$، $B=(x_2,y_2,z_2)$ باشد، آنگاه:

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

مثال اگر $A=(-1,2,0)$، $B=(2,3,-2)$، بردار $\overrightarrow{AB}$ را بیابید.

حل

$$\overrightarrow{AB}=(2+1,3-2,-2-0)\Longrightarrow\overrightarrow{AB}=(3,1,-2)$$

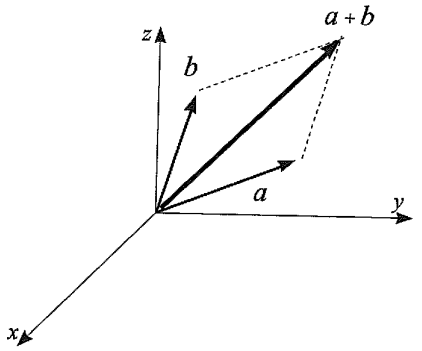
جمع بردارها

۱۸ـ۷ | اگر $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ باشند، دراین‌صورت

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

توجه کنید که بنابر این تعریف، $a+b$ نیز بردار است.

۱۹ـ۷ | اگر a و b دو بردار در فضا باشند، دراین صورت در صفحه شامل دو بردار a و b، متوازی‌الاضلاعی می‌سازیم که مبدأ یک رأس آن و این دو بردار دو ضلع مجاور آن باشند، قطری از این متوازی‌الاضلاع که از مبدأ رسم می‌شود، نمایش‌گر $a+b$ است.



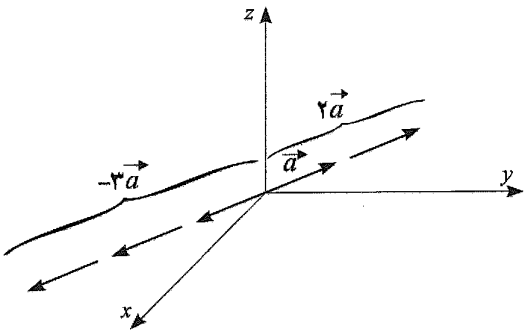
ضرب عدد در یک بردار

۲۰ـ۷ | حاصل‌ضرب عدد حقیقی r در بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$ra=(ra_1,ra_2,ra_3)$$

توجه کنید که $r\vec{a}$ نیز بردار است.

۲۱ـ۷ | درحالتی‌که $r=0$ یا $a=O$، دراین‌صورت $ra=0$ و نمایش آن مبدأ است. درغیراین‌صورت ra برداری است که اندازه‌اش $|r|$ برابر اندازه‌ی بردار a است و اگر $r>0$، هم‌جهت a است و اگر $r<0$ در خلاف جهت a است.



۷ـ۲۲ اگر a یک بردار و r یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$|ra| = |r|\,|a|$$

$|ra|$ طول بردار ra، $|r|$ قدرمطلق عدد حقیقی r و $|a|$ طول بردار a است.

مثال اگر $|a| = ۵$ باشد، مطلوب‌است $|-\frac{۳}{۵}a|$ و $|۱۰a|$.

حل

$$|-\frac{۳}{۵}a| = |-\frac{۳}{۵}|\,|a| = \frac{۳}{۵} \times ۵ = ۳$$
$$|۱۰a| = |۱۰|\,|a| = ۱۰ \times ۵ = ۵۰$$

بردارهای موازی (هم‌راستا)

۷ـ۲۳ دو بردار ناصفر a و b را موازی گویند، هرگاه هر یک مضرب دیگری باشد، یعنی $a = rb$، که در آن $r \in \mathbb{R}$.

مثال دو بردار $\vec{a} = (-۲, ۴, ۰)$ و $\vec{b} = (-۱, ۲, ۰)$ هم‌راستا هستند، زیرا $a = ۲b$.

۷ـ۲۴ دو بردار $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ هم‌راستا هستند، اگر و تنها اگر

$$\frac{a_۱}{b_۱} = \frac{a_۲}{b_۲} = \frac{a_۳}{b_۳}$$

مثال دو بردار $\vec{a} = (۱, m, ۳)$ و $\vec{b} = (۲, ۴, n)$ موازی‌اند، m و n را بیابید.

حل

$$\frac{a_۱}{b_۱} = \frac{a_۲}{b_۲} = \frac{a_۳}{b_۳} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{m}{۴} = \frac{۳}{n} \Longrightarrow m = ۲, n = ۶$$

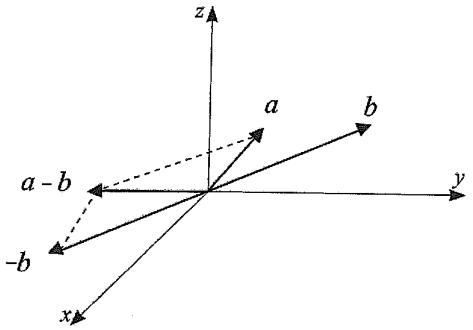
قرینه‌ی یک بردار و تفاضل دو بردار

۷ـ۲۵ بردار $a(-۱)$ را که هم طول اما در خلاف جهت بردار a است، قرینه‌ی بردار a می‌نامیم، و با $-a$ نمایش می‌دهیم.

۲۶ـ۷ فرض کنید a و b دو بردارند، $a-b$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a-b=a+(-b)$$

در واقع $a-b$ برداری است که وقتی با b جمع شود، بردار a به‌دست آید.



خواص جمع و ضرب بردارها

۲۷ـ۷ به‌ازای همه‌ی بردارهای a، b و c در فضا یا در صفحه، و اعداد حقیقی r و s خواص زیر برقرارند:

۱) $(a+b)+c=a+(b+c)$	۲) $a+b=b+a$
۳) $a+o=a$	۴) $a+(-a)=o$
۵) $r(sa)=(rs)a$	۶) $(r+s)a=ra+sa$
۷) $r(a+b)=ra+rb$	

بردارهای یکّه

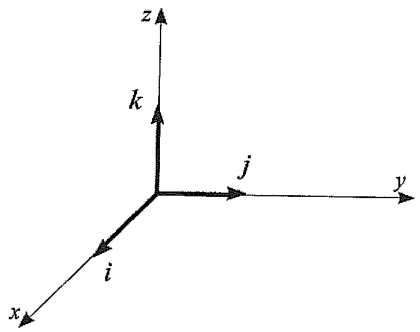
۲۸ـ۷ هر بردار به طول ۱ را، یک بردار واحد یا یکّه می‌گویند.

مثال بردارهای $a=(۱,۰,۰)$ و $b=(\frac{۱}{\sqrt{۲۶}},\frac{۳}{\sqrt{۲۶}},\frac{۴}{\sqrt{۲۶}})$ بردارهای یکّه‌اند، زیرا:

$$|a|=\sqrt{۱+۰+۰}=۱$$

$$|b|=\sqrt{\frac{۱}{۲۶}+\frac{۹}{۲۶}+\frac{۱۶}{۲۶}}=\sqrt{\frac{۲۶}{۲۶}}=۱$$

۲۹ـ۷ بردارهای $i=(۱,۰,۰)$، $j=(۰,۱,۰)$ و $k=(۰,۰,۱)$ را بردارهای یکّه محورهای مختصات در فضا می‌گویند.



۷ـ۳۰ هر بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ در فضا به‌صورت $a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ نوشته می‌شود.

مثال بردار $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ در فضا به‌صورت $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ نوشته می‌شود.

مثال طول بردار $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ را بیابید.

حل

$$|a| = |2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

۷ـ۳۱ یکه‌کردن بردار: بردار ناصفر $\vec{v}$ داده‌شده است. برای ساختن بردار یکّه‌ای هم‌جهت با $\vec{v}$، باید عکس طول بردار $\vec{v}$ را در $\vec{v}$ ضرب کرد. یعنی $\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ برداری یکّه‌ای هم‌جهت با بردار v است.

مثال برداری یکه هم‌جهت با بردار $\vec{v} = (6, 8, 0)$ بنویسید.

حل

$$|\vec{v}| = \sqrt{36 + 64 + 0} = \sqrt{100} = 10$$
$$\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{10}(6, 8, 0) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$$

۷ـ۳۲ یافتن بردار هم‌ارز با یک پیکان: فرض کنید پیکانی با $A = (x_0, y_0, z_0)$ شروع می‌شود و به $B = (x_1, y_1, z_1)$ ختم می‌شود، دراین‌صورت بردار هم‌ارز با پیکان $\overrightarrow{AB}$ به‌صورت زیر است:

$$\vec{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

است. به‌عبارت‌دیگر، باید مختصات انتها را منهای مختصات ابتدا کنیم.

مثال اگر $A(0, -1, 2)$ و $B(-3, 0, 1)$، آنگاه $\overrightarrow{AB}$ را بنویسید.

حل

$$\overrightarrow{AB} = (-3 - 0, 0 + 1, 1 - 2) = (-3, 1, -1)$$

ضرب داخلی دو بردار (ضرب اسکالر)

۷ـ۳۳ فرض کنید $a = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ و $b = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$، ضرب داخلی a و b به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

درواقع حاصل‌ضرب داخلی دو بردار یک عدد است.

مثال اگر $a = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $b = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ دراین‌صورت

$$a \cdot b = (1 \times 2) + (-2 \times 1) + (3 \times 1) = 3$$

۳۴ـ۷ اگر a و b دوبردار ناصفر در $\mathbb{R}^2$ و θ زاویه‌ی بین آن‌ها باشد، آنگاه

$$a \cdot b = |a|\,|b| \cos\theta \qquad 0^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ$$

تبصره: اگر $a = 0$ یا $b = 0$ آنگاه θ تعریف نمی‌شود و دراین‌حالت قرارداد می‌کنیم $a \cdot b = 0$.

۳۵ـ۷ نتیجه اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر a و b باشد، آنگاه

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

مثال زاویه‌ی بین دو بردار $a = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ و $b = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ را به‌دست آورید.

حل

$$|a| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad , \quad |b| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$a \cdot b = (1 \times 2) + (1)(-1) + (2 \times 1) = 3$$
$$|a| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad , \quad |b| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = 60^\circ$$

تست نقاط $A(0,-1,-2)$ و $B(3,1,4)$ و $C(5,7,1)$ سه رأس یک مثلث‌اند، اندازه‌ی زاویه‌ی رأس A کدام است؟

۱) 45° ۲) 30° ۳) 60° ۴) 90°

حل گزینه‌ی ۱.

$$a = \overrightarrow{AC} = (5,8,3) \quad , \quad b = \overrightarrow{AB} = (3,2,6)$$
$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|} = \frac{15+16+18}{\sqrt{98} \cdot \sqrt{49}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \theta = 45^\circ$$

۳۶ـ۷ خواص ضرب داخلی: a، b و c سه‌بردار در $\mathbb{R}^3$ و r یک‌عدد حقیقی

۱) $a \cdot a \geqslant 0$	۲) $a \cdot a = 0 \Longrightarrow a = 0$
۳) $a \cdot b = b \cdot a$	۴) $a \cdot a = \|a\|^2$
۵) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	۶) $(ra) \cdot b = a \cdot (rb) = r(a \cdot b)$
۷) $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$	۸) $ij = ji = 0$, $ik = ki = 0$, $jk = kj = 0$

۳۷ـ۷ دو بردار a و b بر هم عمودند اگر و فقط اگر $a \cdot b = 0$.

مثال دو بردار $\overrightarrow{OA}(1,m,2)$ و $\overrightarrow{OB}(m-1,2,2)$ برهم‌عمودند، m را بیابید.

حل

$$(\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB}) = ۰ \Longrightarrow (۱, m, ۲) \cdot (m-۱, ۲, ۲) = ۰ \Longrightarrow m - ۱ + ۲m + ۴ = ۰ \Longrightarrow m = -۱$$

تست بردارهای a و b برهم عمودند و زاویه‌ی هر یک از آن‌ها با بردار c برابر ۶۰° است. اگر $|a| = ۳$، $|b| = ۵$ و $|c| = ۸$ مقدار $(۳a - ۲b) \cdot (b + ۳c)$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۳۸ ۳) -۶۲ ۴) ۲۴

حل گزینه‌ی ۳.

$$\begin{aligned}(۳a - ۲b) \cdot (b + ۳c) &= ۳a \cdot b + ۹a \cdot c - ۲b \cdot b - ۶b \cdot c \\ &= ۰ + ۹|a||c| \cos ۶۰^\circ - ۲|b|^۲ - ۶|b||c| \cos ۶۰^\circ \\ &= ۰ + (۹ \times ۱۲) - ۲(۲۵) - (۶ \times ۲۰) = -۶۲\end{aligned}$$

۳۸ـ۷ همواره داریم:

$$\boxed{\begin{aligned}|a+b|^۲ &= |a|^۲ + ۲a \cdot b + |b|^۲ \\ |a-b|^۲ &= |a|^۲ - ۲a \cdot b + |b|^۲\end{aligned}}$$

مثال بردارهای a و b مفروضند، به‌طوری که $|a| = ۱۳$، $|b| = ۱۹$ و $|a+b| = ۲۴$، مقدار $|a-b|$ چه‌قدر است؟

حل

$$|a+b|^۲ = |a|^۲ + ۲a \cdot b + |b|^۲ \Longrightarrow ۲۴^۲ = ۱۳^۲ + ۲a \cdot b + ۱۹^۲ \Longrightarrow ۲a \cdot b = ۱۴۶$$
$$|a-b|^۲ = |a|^۲ - ۲a \cdot b + |b|^۲ \Longrightarrow |a-b|^۲ = ۱۳^۲ - ۱۴۶ + ۱۹^۲ \Longrightarrow |a-b| = ۲۲$$

ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری)

۳۹ـ۷ فرض کنید $a = a_۱\overrightarrow{i} + a_۲\overrightarrow{j} + a_۳\overrightarrow{k}$، $b = b_۱\overrightarrow{i} + b_۲\overrightarrow{j} + b_۳\overrightarrow{k}$ بردارهایی در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشند، ضرب خارجی دو بردار به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}}$$

در واقع حاصل‌ضرب خارجی دو بردار یک بردار است.

۴۰ـ۷ $a \times b$ برداری است عمود بر دو بردار a و b، در نتیجه $a \times b$ بر صفحه‌ی شامل a و b عمود است.

مثال برداری پیدا کنید که بر دو بردار $a = \overrightarrow{i} - ۲\overrightarrow{j} + ۳\overrightarrow{k}$ و $b = ۲\overrightarrow{i} + ۴\overrightarrow{j} - ۳\overrightarrow{k}$ عمود باشد.

حل

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & -۳ \end{vmatrix} = (۶i + ۴k + ۶j) - (-۴k - ۳j + ۱۲i) = -۶i + ۹j + ۸k$$

$c = -۶\vec{i} + ۹\vec{j} + ۸\vec{k}$ بر دو بردار a و b عمود است.

۴۱ـ۷ اگر a و b دو بردار ناصفر در صفحه یا فضا و θ زاویه‌ی بین آن‌ها باشد، آنگاه

$$|a \times b| = |a||b| \sin\theta \quad ۰° \leqslant \theta \leqslant ۱۸۰°$$

مثال اگر $|a| = ۱۰$، $|b| = ۲$ و $a \cdot b = ۱۲$، در این صورت $|a \times b|$ چقدر است؟

حل

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{۱۲}{۲ \times ۱۰} = \frac{۳}{۵} \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{۱ - \cos^۲\theta} = \sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = \frac{۴}{۵}$$

$$|a \times b| = |a||b| \sin\theta = ۱۰ \times ۲ \times \frac{۴}{۵} = ۱۶$$

تست اگر $a = \vec{j} + ۲\vec{k}, b = ۲\vec{i} + \vec{k}$ باشد، طول بردار $a \times b$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۵}$ ۲) $\sqrt{۲۱}$ ۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۲۲}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = (i + ۰ + ۴j) - (۲k + ۰ + ۰) = i + ۴j - ۲k$$

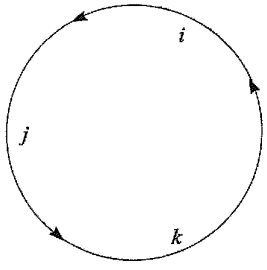
$$|a \times b| = \sqrt{۱ + ۱۶ + ۴} = \sqrt{۲۱}$$

۴۲ـ۷ حاصل‌ضرب خارجی بردارهای پایه: بردارهای i، j و k را روی دایره‌ای به شکل زیر در نظر گرفته و جهتی برای آن در نظر می‌گیریم اگر جهت کوتاه‌ترین کمان از بردار اول به بردار دوم بر جهت اختیار شده منطبق باشد، حاصل‌ضرب مساوی بردار سوم است.

$$i \times j = k \ , \ j \times k = i \ , \ k \times i = j$$

و اگر جهت کوتاه‌ترین کمان از بردار اول به بردار دوم خلاف جهت اختیار شده باشد، مساوی قرینه‌ی بردار سوم است.

$$j \times i = -k, \ k \times j = -i \ , i \times k = -j$$



و

$$i \times i = ۰, \ j \times j = ۰, \ k \times k = ۰$$

۴۳ـ۷ ویژگی‌های ضرب خارجی:

۱) $a \times b = -(b \times a)$	۲) $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$
۳) $(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$	۴) $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$
۵) $a \times a = ۰$	۶) $a \times o = o \times a = o$
۷) $a \cdot (a \times b) = ۰ \Longrightarrow a \times b \perp a$	۸) $b \cdot (a \times b) = ۰ \Longrightarrow a \times b \perp b$

مثال اگر بردارهای a و b بر هم عمود باشند و $|a| = ۳$ و $|b| = ۴$، در این‌صورت $|(۳a - b) \times (a - ۲b)|$ را بیابید.

حل

$$(۳a - b) \times (a - ۲b) = ۳(a \times a) - ۶(a \times b) - (b \times a) + ۲(b \times b)$$
$$= ۳(۰) - ۶(a \times b) + (a \times b) + ۲(۰) = -۵(۵ \times b)$$
$$|(۳a - b) \times (a - ۲b)| = ۵|a||b| \sin\theta = ۵ \times ۳ \times ۴ \times \sin ۹۰^\circ = ۶۰$$

ضرب مختلط

۴۴ـ۷ اگر $a = a_۱\vec{i} + a_۲\vec{j} + a_۳\vec{k}$ و $b = b_۱\vec{i} + b_۲\vec{j} + b_۳\vec{k}$ و $c = c_۱\vec{i} + c_۲\vec{j} + c_۳\vec{k}$ دراین‌صورت $a \cdot (b \times c)$ را حاصل‌ضرب مختلط a، b و c می‌گویند. و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

۴۵ـ۷ اگر a، b و c سه‌بردار در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشند، آنگاه:

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$$

مثال اگر $a = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ و $b = ۲\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{k}$ و $c = \vec{i} + ۲\vec{j} + ۳\vec{k}$ دراین‌صورت ضرب مختلط a، b و c را بیابید.

حل

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = (-۳ + ۴ + ۳) - (-۱ + ۶ + ۶) = -۷$$

۴۶ـ۷ بردارهای $a = a_۱\vec{i} + a_۲\vec{j} + a_۳\vec{k}$ و $b = b_۱\vec{i} + b_۲\vec{j} + b_۳\vec{k}$ و $c = c_۱\vec{i} + c_۲\vec{j} + c_۳\vec{k}$ هم‌صفحه‌اند، اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

مثال اگر بردارهای $\vec{a} = (۱, ۴, ۰)$ و $\vec{b} = (-۱, ۲, ۳)$ و $\vec{c} = (۰, ۲, m)$ هم صفحه باشند، m را بیابید.

حل

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & m \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۲m + ۰ + ۰) - (۰ - ۴m + ۶) = ۰ \Longrightarrow m = ۱$$

خط در فضا

۴۷_۷ هر خط راست را در فضای $\mathbb{R}^۳$ می‌توانیم با یک نقطه‌ی ثابت از آن و یک بردار که موازی آن باشد، مشخص کنیم.

۴۸_۷ معادله‌های پارامتری یک خط در فضا: خط L، موازی با بردار $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ که از نقطه‌ی $P(x_۰, y_۰, z_۰)$ می‌گذرد، دارای معادلاتی به‌صورت زیر است[۱]:

$$x = x_۰ + at, \quad y = y_۰ + bt, \quad z = z_۰ + ct$$

۴۹_۷ معادلات متقارن یک خط در فضا: اگر در روابط فوق پارامتر t را بین معادلات حذف کنیم به روابط زیر که معادلات متقارن خط نامیده می‌شوند، خواهیم رسید.

$$\frac{x - x_۰}{a} = \frac{y - y_۰}{b} = \frac{z - z_۰}{c} \quad (a, b, c \neq ۰)$$

معادلات پارامتری و متقارن یک خط منحصر به‌فرد نیست.

۵۰_۷ برای نوشتن معادلات متقارن یک خط فرض کرده بودیم که a, b و c هر سه مخالف صفر باشند، حال اگر یک یا دوتای آن‌ها مساوی صفر باشد، معادلاث متقارن یک خط به‌صورت زیر درمی‌آید:

۱) اگر $a = ۰$ باشد، آنگاه: $\frac{y - y_۰}{b} = \frac{z - z_۰}{c}$, $x = x_۰$ که معادله‌ی خطی در صفحه‌ی $x = x_۰$ است.

۲) اگر $b = ۰$ باشد، آنگاه: $\frac{x - x_۰}{a} = \frac{z - z_۰}{c}$, $y = y_۰$ که معادله‌ی خطی در صفحه‌ی $y = y_۰$ است.

۳) اگر $c = ۰$ باشد، آنگاه: $\frac{x - x_۰}{a} = \frac{y - y_۰}{b}$, $z = z_۰$ که معادله‌ی خطی در صفحه‌ی $z = z_۰$ است.

۴) اگر $a = b = ۰$ باشد، آنگاه: $x = x_۰, y = y_۰$ که معادله‌ی خطی موازی محور zها است.

۵) اگر $a = c = ۰$ باشد، آنگاه: $x = x_۰, z = z_۰$ که معادله‌ی خطی موازی محور yها است.

۶) اگر $b = c = ۰$ باشد، آنگاه: $y = y_۰, z = z_۰$ که معادله‌ی خطی موازی محور yها است.

مثال معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A(۱, ۰, ۲)$ و $B(-۱, ۳, ۱)$ می‌گذرد.

حل ابتدا باید بردار هادی خط را به‌دست آورد.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-۱ - ۱, ۳ - ۰, ۱ - ۲) \Longrightarrow \vec{v} = -۲i + ۳j - k$$

حال اگر نقطه‌ی $A(۱, ۰, ۲)$ را به‌عنوان نقطه‌ی $(x_۰, y_۰, z_۰)$ بگیریم،

$$x = ۱ - ۲t, \quad y = ۳t, \quad z = ۲ - t$$

---

۱. بردار v، بردار هادی خط نامیده می‌شود

یا:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-2}{-1}$$

مثال معادلات متقارن خطی که از دو نقطه‌ی $A(2,3,-1)$ و $B(2,3,4)$ می‌گذرد را بنویسید.

حل

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}=(2-2,3-3,4+1)=(0,0,5)\Longrightarrow a=b=0$$

پس معادله‌ی خط به‌صورت $x=2$، $y=3$ است.

وضعیت دو خط نسبت به هم در فضا

۵۱ـ۷ دو خط l_1 و l_2 در فضا نسبت به هم سه وضعیت دارند:

۱) موازی یکدیگرند (حالت منطبق بودن دو خط حالت خاصی از موازی بودن آن‌هاست).

۲) متقاطع هستند (که دراین‌صورت در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و صفحه‌ای شامل آن‌ها وجود دارد.)

۳) متنافرند یعنی نه موازی‌اند و نه متقاطع (دو خط در یک صفحه قرار ندارند و یکدیگر را نیز قطع نمی‌کنند.)

اکنون به بررسی هریک از سه‌حالت فوق می‌پردازیم.

۵۲ـ۷ دو خط l_1 و l_2 موازی باشند: دو خط l_1و l_2 موازی‌اند اگروفقطاگر بردارهای هادی آن‌ها موازی یکدیگر باشند، یعنی:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

مثال دو خط $l_1:\frac{2x-6}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{3-z}{2}$ و $l_2:\frac{x+7}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-4}$ نسبت به‌هم چه وضعیتی دارند؟

حل

$$l_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-2}\Longrightarrow v_1=(2,1,-2)$$
$$l_2:\frac{x+7}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-4}\Longrightarrow v_2=(4,2,-4)$$

چون $\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$، پس دو خط l_1 و l_2 موازی هستند.

تست اگر دو خط $\frac{x+1}{m}=y=\frac{1-z}{2}$ و $2x=\frac{y+2}{n}=\frac{z}{3}$ با هم موازی باشند، $m+n$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $-\frac{5}{6}$ ۳) $-\frac{11}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}\Longrightarrow v_1=(m,1,-2)$$
$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y+2}{n}=\frac{z}{3}\Longrightarrow v_2=(\frac{1}{2},n,3)$$
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\Longrightarrow\frac{m}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n}=\frac{-2}{3}\Longrightarrow m=\frac{-1}{3},n=\frac{-3}{2}$$
$$m+n=-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}=\frac{-11}{6}$$

۵۳ـ۷ دو خط l_1 و l_2 متقاطع‌اند، برای یافتن نقطه‌ی تقاطع دو خط l_1 و l_2 ابتدا معادلات پارامتری خط l_1 را نوشته و آن‌ها را درمعادلات متقارن l_2 قرار می‌دهیم و معادلات به‌دست آمده را برحسب t حل می‌کنیم. اگر از حل این سه معادله بر حسب t جوابی منحصر به‌فرد به‌دست آید، دو خط l_1 و l_2 متقاطع می‌باشند.

۵۴ـ۷ دو خط l_1 و l_2 متنافرند: در روش بالا (۵۳ـ۷) اگر برای t جوابی منحصر به‌فرد به‌دست نیاید، دو خط متنافرند.

مثال دو خط به معادلات $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$ و $l_2 : \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{4}$ نسبت به‌هم چه وضعیتی دارند؟

حل

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3} = t \Longrightarrow x = 2t+1, y = t-1, z = 3t+2$$

$$l_2 : \frac{2t+1+2}{3} = \frac{t-1}{-1} = \frac{3t+2+2}{4} \Longrightarrow \frac{2t+3}{3} = \frac{1-t}{1} = \frac{3t+4}{4} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2t+3 = 3-3t \\ 8t+12 = 9t+12 \\ 4-4t = 3t+4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{دو خط } l_1 \text{ و } l_2 \text{ متقاطع می‌باشند}$$

۵۵ـ۷ شرط عمودبودن دو خط: دو خط l_1 و l_2 بر هم عمودند هرگاه بردارهای هادی آن‌ها برهم عمود باشند، یعنی:

$$\boxed{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0}$$

تست به‌ازای کدام مقدار m دو خط $l_1 : \frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{5}$ و $l_2 : \frac{x+3}{m} = \frac{y}{m} = z$ برهم عمود هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -1

حل گزینه‌ی ۴.

$$v_1 = (3,2,5) \ , \ v_2 = (m,m,1)$$

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \Longrightarrow (3,2,5) \cdot (m,m,1) = 0 \Longrightarrow 3m+2m+5 = 0 \Longrightarrow m = -1$$

فاصله‌ی یک نقطه از یک خط

۵۶ـ۷ فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط l برابر است:

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}}$$

P_0 نقطه‌ای دلخواه روی خط l و v بردار هادی خط l است.

مثال فاصله‌ی نقطه‌ی $(2,-6,5)$ از خط $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1+4t \\ z = 2-3t \end{cases}$ را بیابید.

حل

$$t=0 \Longrightarrow P_0=(1,-1,2), P=(5,-6,2), \overrightarrow{v}=(0,4,-3), \overrightarrow{P_0P}=(4,-5,0)$$

$$\overrightarrow{P_0P}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}=15i+12j+16k \Longrightarrow |\overrightarrow{P_0P}\times\overrightarrow{v}|=\sqrt{625}=25$$

$$\vec{v}=\sqrt{0+16+9}=5 \Longrightarrow d=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}=\frac{25}{5}=5$$

فاصله‌ی دو خط موازی

۵۷ـ۷ برای یافتن فاصله‌ی دو خط موازی l_1 و l_2 کافی است یک نقطه روی l_1 یافته و فاصله آن را از خط l_2 بیابیم.

مثال فاصله‌ی دو خط موازی $l_1:\frac{x+1}{8}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+1}{2}$ و $l_2:\frac{x}{4}=\frac{y+1}{3}=z$ را بیابید.

حل

$$P_0\in l_1 \Longrightarrow P_0=(-1,3,-1), P\in l_2 \Longrightarrow P=(0,-1,0), \overrightarrow{v}=(4,3,1)$$

$$\overrightarrow{P_0P}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=7\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}-19\overrightarrow{k}$$

$$|\overrightarrow{P_0P}\times\overrightarrow{v}|=\sqrt{49+9+361}=\sqrt{419}, |\overrightarrow{v}|=\sqrt{16+9+1}=\sqrt{26}$$

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}=\frac{\sqrt{419}}{\sqrt{26}}$$

زاویه‌ی بین دو خط

۵۸ـ۷ اگر θ زاویه‌ی بین دو خط l_1 و l_2 باشد، زاویه‌ی بین بردارهای هادی آن‌ها یعنی $\overrightarrow{v}_1$ و $\overrightarrow{v}_2$ نیز θ است، پس

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{v}_1\times\overrightarrow{v}_2}{|\overrightarrow{v}_1||\overrightarrow{v}_2|}$$

مثال زاویه‌ی بین دو خط $l_1: x-1=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}$, $l_2: x-1=\frac{y-5}{2}=\frac{z-1}{2}$ را بیابید.

حل

$$\overrightarrow{v}_1=(1,2,2), \quad \overrightarrow{v}_2=(1,2,2)$$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{v}_1\cdot\overrightarrow{v}_2}{|\overrightarrow{v}_1|\cdot|\overrightarrow{v}_2|}=\frac{1+4+4}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+4+4}}=\frac{9}{3\times3}=1 \Longrightarrow \theta=0^\circ$$

صفحه در فضا

۵۹ـ۷ یک صفحه در فضا با یک نقطه‌ی معلوم $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ و یک بردار ناصفر مانند $\vec{n} = (a, b, c)$ عمود بر آن به‌طور منحصر به فرد معلوم می‌شود[1]. و:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

در معادله‌ی بالا پس از ضرب و مرتب‌کردن اگر $ax_0 + by_0 + cz_0$ را که عددی ثابت است d فرض کنیم معادله‌ی صفحه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$ax + by + cz = d$$

مثال معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A = (2, -3, -5)$ گذشته و عمود بر بردار $\vec{n} = (3, -3, 4)$ باشد؟

حل

$$3(x - 2) - 3(y + 3) + 4(z + 5) = 0 \Longrightarrow 3x - 3y + 4y = -5$$

مثال معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A = (3, -4, 1)$ گذشته و عمود بر خط $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$ باشد؟

حل چون صفحه بر خط عمود است، پس بردار هادی خط همان بردار نرمال صفحه است.

$$\vec{n} = \vec{v} = (3, 2, 4), \quad A = (3, -4, 1)$$
$$3(x - 3) + 2(y + 4) + 4(z - 1) = 0 \Longrightarrow 3x + 2y + 4z = 5$$

تست اگر $A = (-1, 2, 4)$ و $B = (5, 6, -8)$ در این‌صورت معادله‌ی عمود منصف پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $6x + 4y - 12 = 32$
۲) $6x + 4y - 12 = 52$
۳) $3x + 2y - 6z = 18$
۴) $3x + 2y - 6z = 0$

حل گزینه‌ی ۲.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (5 + 1, 6 - 2, -8 - 4) = (6, 4, -12)$$
$$M = (\frac{5-1}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{-8+4}{2}) = (2, 4, -2)$$
$$6(x - 2) + 4(y - 4) - 12(z + 2) = 0 \Longrightarrow 6x + 4y - 12z = 52$$

۶۰ـ۷ معادله‌ی صفحه‌ای که از نقاط $A(a_1, b_1, c_1)$ و $B(a_2, b_2, c_2)$ و $C(a_3, b_3, a_3)$ می‌گذرد عبارت است از

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - b_1 & z - c_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0$$

---

۱. بردار $\vec{n}$، بردار نرمال صفحه است.

مثال معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل سه نقطه $(۱,۲,۳)$، $(۲,۱,۲)$ و $(۳,۳,۱)$ باشد.

حل

$$\begin{vmatrix} x-۱ & y-۲ & z-۳ \\ ۲-۱ & ۱-۲ & ۲-۳ \\ ۳-۱ & ۳-۲ & ۱-۳ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-۱ & y-۲ & z-۳ \\ ۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow x+y-۴=۰$$

شرایط موازی بودن و عمود بودن دو صفحه

۶۱ـ۷ دو صفحه به معادلات

$$a_۱x+b_۲y+c_۱z=d_۱$$
$$a_۲x+b_۲y+c_۲z=d_۲$$

۱) موازیند هرگاه نرمال‌هایشان موازی باشند، یعنی:

$$\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲}=\frac{c_۱}{c_۲}$$

۲) برهم عمودند هرگاه نرمال‌هایشان بر یکدیگر عمود باشد، یعنی:

$$\overrightarrow{n_۱}\cdot\overrightarrow{n_۲}=۰$$

مثال دو صفحه‌ی $x-۲y+۳z=۱$ و $۲x-۴y+۶z=۱۰$ موازیند، زیرا

$$\frac{۱}{۲}=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۳}{۶}$$

پس نرمال‌های دو صفحه مزبور موازی‌اند.

مثال دو صفحه‌ی $۳x+۷y-۴=۴$ و $۵x-y+۲z=۱$ بر هم عمودند، زیرا

$$\overrightarrow{n_۱}=(۳,۷,-۴),\quad \overrightarrow{n_۲}=(۵,-۱,۲)$$
$$\overrightarrow{n_۱}\cdot\overrightarrow{n_۲}=۱۵-۷-۸=۰$$

تست دو صفحه به معادلات $۲x+y+az=۰$ و $-x+by-z+۱=۰$ با یکدیگر موازی‌اند، $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$\frac{۲}{-۱}=\frac{۱}{b}=\frac{a}{-۱}\Longrightarrow b=\frac{-۱}{۲}, a=۲\Longrightarrow a+b=\frac{۳}{۲}$$

زاویه‌ی بین دو صفحه

۶۲ـ۷ زاویه‌ی بین دو صفحه $a_۱x+b_۱y+c_۱z=d_۱$ و $a_۲x+b_۲y+c_۲z=d_۲$ زاویه‌ی بین نرمال‌های دو صفحه است.

مثال زاویه‌ی حاده بین دو صفحه به معادلات $x+y+۲z=۳$ و $۲x-y+z=۹$ چقدر است؟

حل

$$\overrightarrow{n_۱}=(۱,۱,۲),\quad \overrightarrow{n_۲}=(۲,-۱,۱)$$
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_۱}\cdot\overrightarrow{n_۲}}{|\overrightarrow{n_۱}|\cdot|\overrightarrow{n_۲}|}=\frac{۲-۱+۲}{\sqrt{۶}\times\sqrt{۶}}=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{۳}$$

فاصله‌ی یک نقطه از یک صفحه

۶۳ـ۷ فاصله‌ی نقطه‌ی $P_۰=(x_۰,y_۰,z_۰)$ از صفحه به معادله‌ی $ax+by+cz+d=۰$ برابر است با:

$$h=\frac{|ax_۰+by_۰+cz_۰+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

مثال فاصله‌ی نقطه‌ی $(۱,۱,۱)$ از صفحه به معادله‌ی $۲x+۲y+z=۲$ را بیابید.

حل

$$h=\frac{|۲+۲+۱-۲|}{\sqrt{۴+۴+۱}}=\frac{۳}{۳}=۱$$

فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی

۶۴ـ۷ فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی $ax+by+cz=d$ و $ax+by+cz=d'$ برابر است با

$$H=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

مثال فاصله‌ی دو صفحه‌ی $۲x+۲y+z=۴$ و $۴x+۴y+۲z=۲$ را بیابید.

حل معادلات دو صفحه را به‌صورت زیر می‌نویسیم

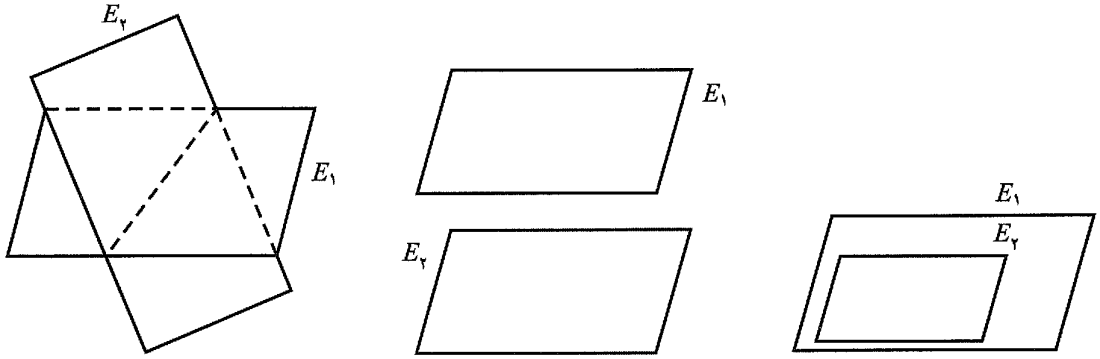
$$۲x+۲y+z=۱,۲x+۲y+z=۴$$

پس

$$H=\frac{|۴-۱|}{\sqrt{۴+۴+۱}}=\frac{۳}{\sqrt{۹}}=۱$$

وضعیت نسبی دو صفحه در فضا

۷ـ۶۵ دو صفحه، مانند E_1 و E_2 را در نظر بگیرید. این دو صفحه یا با هم موازی (امّا منطبق نیستند) یا متقاطع یا برهم منطبق‌اند.



۷ـ۶۶ اگر n_1 بردار نرمال صفحه‌ی E_1 و n_2 بردار نرمال صفحه‌ی E_2 باشد، E_1 و E_2 موازی‌اند اگر و فقط اگر n_1 و n_2 موازی باشند. در غیراین‌صورت E_1 و E_2 متقاطع‌اند.

۷ـ۶۷ دو صفحه‌ی متقاطع برهم عمودند اگر و فقط اگر بردارهای عمود بر آن‌ها بر هم عمود باشند.

مثال وضعیت نسبی دو صفحه‌ی $E_1 : -2x - 4y + 6z + 4 = 0$ و $E_2 : x + 2y - 3z - 2 = 0$ را تعیین کنید.

حل

$$n_1 = (-2,-4,6),\quad n_2 = (1,2,-3) \Longrightarrow \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}\frac{6}{-3}$$

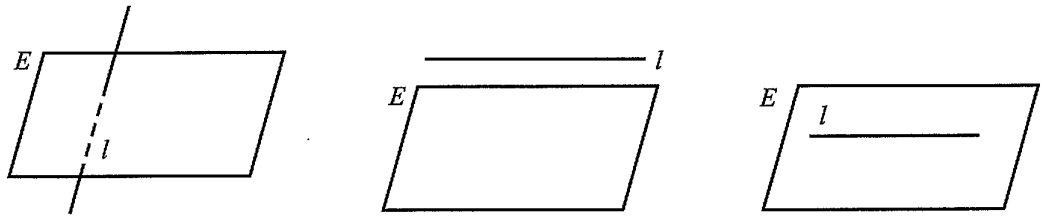
پس E_1 و E_2 موازی‌اند.

مثال فصل مشترک دو صفحه‌ی $x = 2$ و $2x - y + 3z = 1$ را بیابید.

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \Longrightarrow y = 3 + 3z \Longrightarrow l : x = 2, y = 3 + 3z \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = \dfrac{t-3}{3} \end{cases}$$

وضعیت نسبی خط و صفحه

۷ـ۶۸ خطی مانند l و صفحه‌ای مانند E را در فضا در نظر بگیرید. خط l یا موازی با E است (امّا روی E قرار ندارد)، یا E را قطع می‌کند و یا روی E واقع است.



۷ـ۶۹ خط و صفحه‌ی موازی: اگر صفحه‌ی E موازی خط l باشد، آنگاه بردار نرمال صفحه‌ی $(\overrightarrow{n})$ عمود بر بردارهای خط $(\overrightarrow{v})$ است. یعنی

$$\boxed{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0}$$

۷ـ۷۰ خط و صفحه متقاطع‌اند: اگر خط و صفحه موازی نباشند یا بر هم منطبق‌اند یا یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند و برای پی‌بردن به‌آن کافی است معادلات پارامتری خط را نوشته و در معادله‌ی صفحه قرار دهیم:

۱) اگر معادله‌ی خط در صفحه صدق کند، l بر E منطبق است.

۲) اگر معادله‌ی خط در معادله‌ی صفحه صدق نکند(تساوی غیر ممکن به‌دست آید)، l و E موازیند.

۳) اگر معادله‌ای برحسب t به‌دست آید آن را حل کرده، t را حساب می‌کنیم و مقدار t را در معادلات پارامتری خط قرار می‌دهیم تا نقطه تلاقی خط با صفحه به‌دست آید.

مثال خط $l : x = y - ۱ = z$ و صفحه‌ی $E : x + ۲y - ۳z = ۰$ نسبت به‌هم چه وضعیتی دارند؟

حل

$$l : \begin{cases} x = t \\ y = ۱ + t \\ z = t \end{cases} \quad \Longrightarrow E : t + ۲ + ۲t - ۳t = ۲ \Longrightarrow ۲ = ۲$$

چون معادله‌ی خط در معادله صفحه صدق می‌کند، خط و صفحه منطبق‌اند.

مثال خط $l : x = y - ۱ = \frac{z-۱}{۳}$ و صفحه‌ی $E : x + y - z = -۳$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

حل

$$\begin{cases} x = t \\ y = ۱ - t \\ z = ۳t + ۱ \end{cases} \quad \Longrightarrow E : t + ۱ + t - ۳t - ۱ = -۳ \Longrightarrow t = ۱ \Longrightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۰ \\ z = ۴ \end{cases}$$

نقطه‌ی تقاطع خط و صفحه $(۱, ۰, ۴)$ است.

ترکیب خطی

۷ـ۷۱ منظور از ترکیب خطی n بردار $\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ برداری است به‌صورت $\overrightarrow{v} = a_۱\overrightarrow{v_۱} + a_۲\overrightarrow{v_۲} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n}$ که در آن $a_i \in \mathbb{R}$ و بردارهای $\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ نیز متعلق به فضای مورد بررسی است.

مثال دو بردار $\overrightarrow{v_۱} = (۲, -۱)$ و $\overrightarrow{v_۲} = (-۸, ۴)$ از فضای $\mathbb{R}^۲$ را در نظر می‌گیریم. آیا $(۱, -۶)$ یک ترکیب خطی $\overrightarrow{v_۲}$ و $\overrightarrow{v_۱}$ است؟

حل در صورتی $(۱, -۶)$ یک ترکیب خطی از $\overrightarrow{v_۱}$ و $\overrightarrow{v_۲}$ است که اعداد حقیقی x و y وجود داشته باشند، به‌طوری‌که $x\overrightarrow{v_۱} + y\overrightarrow{v_۲}$، یعنی:

$$x(۲, -۱) + y(-۸, ۴) = (۱, -۶)$$

$$\begin{cases} ۲x - ۸y = ۱ \\ -x + ۴y = -۶ \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{vmatrix} ۲ & -۸ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۰, \frac{۲}{-۱} = \frac{-۸}{۴} \neq \frac{۱}{-۶}$$

پس دستگاه جواب ندارد، بنابراین $(۱, -۶)$ ترکیب خطی $\overrightarrow{v_۱}$ و $\overrightarrow{v_۲}$ نیست.

استقلال خطی و بستگی خطی

۷ـ۷۲ اگر یک ترکیب خطی از n بردار $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ برابر صفر باشد، یعنی $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n} = 0$ و a_iها با هم صفر نشوند، یعنی حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد، آنگاه بردارهای $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ بستگی خطی دارند و در صورتی که از $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n} = 0$ نتیجه شود که $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ آنگاه بردارهای $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ استقلال خطی دارند.

مثال نشان دهید بردارهای $\overrightarrow{v_1} = (0, 1, -1)$ و $\overrightarrow{v_2} = (2, 3, 0)$ و $\overrightarrow{v_3} = (0, 3, -3)$ بستگی خطی دارند.

حل صورت کلی ترکیبات این سه بردار را نوشته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3} = (0, 0, 0) \Longrightarrow x(0, 1, -1) + y(2, 3, 0) + z(0, 3, -3) = (0, 0, 0)$$

$$\Longrightarrow (0 + 2y + 0, x + 3y + 3z, -x - 3z) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ x + 3y + 3x = 0 \\ -x - 3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 6) - (0 - 6 + 0) = 0$$

بنابراین دستگاه جواب غیر صفر دارد، در نتیجه بردارهای مزبور بستگی خطی دارند.

۷ـ۷۳ به‌طورکلی برای تشخیص این‌که در فضای $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ یا ... دو بردار یا سه بردار یا ... دارای بستگی خطی هستند یا استقلال خطی کافی است بردارها را به‌صورت سطرها یا ستون‌های یک دترمینان نوشته، آنگاه:

۱) اگر حاصل دترمینان برابر صفر باشد، بردارها بستگی خطی دارند.

۲) اگر حاصل دترمینان مخالف صفر باشد، بردارها استقلال خطی دارند.

مثال در فضای $\mathbb{R}^3$ نشان دهید بردارهای $(1, 2, -1)$، $(3, 0, 2)$ و $(-1, -1, -2)$ استقلال خطی دارند یا بستگی خطی؟

حل

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0 + 2 - 12) - (0 - 4 - 3) \neq 0$$

پس بردارها استقلال خطی دارند.

تست سه بردار $\overrightarrow{a} = (2, -1, 0)$, $\overrightarrow{b} = (m - 1, 0, 3)$, $\overrightarrow{c} = (0, -2, 1)$ به‌ازای کدام مقدار m مستقل خطی نیستند؟

۱) $m = 11$ ۲) $m \neq 11$ ۳) $m = 13$ ۴) $m \neq 13$

حل گزینه‌ی ۱.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ m - 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (0 + 0 + 0) - (0 - 12 - m + 1) \Longrightarrow m = 11$$

۷ـ۷۴ سه بردار در $\mathbb{R}^3$ بستگی خطی دارند اگر و تنها اگر هم‌صفحه باشند و استقلال خطی دارند اگر و تنها اگر هم‌صفحه نباشند.

تست‌های فصل ۷

۱. فاصله نقطه $A(۱, ۲, ۳)$ از محور yها کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

۲. اگر $|\vec{v}_۱| = ۲$ و $|\vec{v}_۲| = ۳$ و $\vec{v}_۱ \cdot \vec{v}_۲ = ۴$ باشند، $|۲\vec{v}_۱ \times ۳\vec{v}_۲|$ کدام است؟

۱) $۱۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۶\sqrt{۵}$ ۴) ۱۲

۳. حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۲x\vec{k}$ و $\vec{b} = x\vec{i} - ۲\vec{j} + ۲\vec{k}$ مساوی ۶ است، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چه‌قدر است؟

۱) ۴۵° ۲) ۳۰° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۴. دو بردار $\vec{a} = (۳, ۲, ۴)$ و $\vec{b} = (۲, ۱, m)$ بر یکدیگر عمودند، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۵. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم زاویه ۳۰° می‌سازند، اگر $|\vec{a}| = ۶$ و $|\vec{b}| = ۵$، آنگاه $|\vec{a} \times \vec{b}|$ کدام است؟

۱) $۱۵\sqrt{۳}$ ۲) ۱۵ ۳) ۳۰ ۴) $۳۰\sqrt{۳}$

۶. با فرض اینکه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ و $|\vec{b}| = ۳$ و $|\vec{a}| = ۴$ باشد، مقدار $A = (۲\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - ۳\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) -۵۰ ۳) ۲۵ ۴) -۲۵

۷. حاصل‌ضرب $\vec{i} \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۳

۸. اگر $\vec{a} = ۲x\vec{i} + ۲x\vec{j} - x\vec{k}$ و $|\vec{a}| = ۶$ و $x > ۰$ باشد، مختصات بردار $۳\vec{a}$ کدام است؟

۱) $(۴, ۴, -۲)$ ۲) $(۱۲, ۱۲, -۶)$ ۳) $(۱۲, ۱۲, -۳)$ ۴) $(۲, ۲, -۱)$

۹. اگر $|\vec{a}| = ۱۰$ و $|\vec{b}| = ۲$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۱۲$ باشد، در این‌صورت $|\vec{a} \times \vec{b}|$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۰. حاصل‌ضرب اندازه‌های دو بردار ۱۲ و اندازه حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها ۹ است. حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۲) $۳\sqrt{۷}$ ۳) $\sqrt{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۱. اگر اندازه حاصل‌ضرب خارجی دو بردار عمود بر هم سه برابر اندازه یکی از آن‌ها باشد، اندازه دیگری کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۶

۱۲. بردار $\vec{c}$ بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با هم زاویه ۶۰° می‌سازند عمود است، اگر $|\vec{a}| = ۶$ و $|\vec{b}| = ۳$ و $|\vec{c}| = ۳$ باشد، حاصل‌ضرب مختلط $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۹\sqrt{۳}$ ۴) $۲۷\sqrt{۳}$

۱۳. به‌ازای کدام مقدار m ضرب درونی دو بردار $\vec{v}_۱ = (۲, ۳, ۶)$ و $\vec{v}_۲ = (۳, m, ۶)$ برابر صفر است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۲ ۳) ۱۴ ۴) -۱۴

۱۴. اندازه حاصل‌ضرب بیرونی دو بردار با حاصل‌ضرب درونی آن‌ها برابر است. زاویه بین این دو بردار چند درجه است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۱۵. معادلات پارامتری خطی که شامل نقطه $(۲, -۱, ۱)$ و موازی با بردار $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + ۲\vec{k}$ می‌باشد کدام است؟

۱) $z = ۲ - ۲t, y = -۱ + t, x = ۱ - t$
۲) $z = -۲ - ۲t, y = ۱ - t, x = ۱ + t$
۳) $z = ۲ + ۲t, y = -۱ + t, x = ۱ - t$
۴) $z = ۲ + ۲t, y = -۱ + t, x = ۱ + t$

۱۶. معادله خطی که از دو نقطه $A(۲, ۲, ۲)$ و $B(۰, -۱, ۱)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\frac{x-۲}{۲} = \frac{y-۲}{۳} = \frac{z-۲}{۱}$
۲) $\frac{x-۲}{۱} = \frac{y+۲}{۳} = \frac{z-۲}{۲}$
۳) $\frac{x+۲}{-۲} = \frac{y+۲}{-۳} = \frac{z+۲}{-۱}$
۴) $\frac{x-۲}{-۲} = \frac{y-۲}{-۳} = \frac{z-۲}{-۱}$

۱۷. اگر خط $\frac{x-۲}{۲} = -y = \frac{z-۳}{۳}$ با صفحه $۳ax + ۲y - az = ۱$ موازی باشد، a برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۸. فاصله نقطه $(-۲, -۱, ۱)$ از خط $\frac{x-۹}{۳} = \frac{y-۶}{۲} = \frac{z}{-۲}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۹. تلاقی خط $\frac{x-۴}{۲} = y - ۲ = ۲z + ۲$ با محور oz کدام است؟

۱) $(۰, ۰, ۲)$ ۲) $\left(۰, ۰, \frac{۱}{۲}\right)$ ۳) $\left(۰, ۰, -\frac{۱}{۲}\right)$ ۴) $(۰, ۰, -۲)$

۲۰. معادله صفحه عمود بر بردار $۲\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{k}$ و شامل نقطه $(۱, ۱, ۰)$ کدام است؟

۱) $۲x - y + ۳z = -۱$
۲) $۲x - y + ۳z = ۱$
۳) $۲x - y + ۳z = ۳$
۴) $۲x + y - ۳z = ۱$

۲۱. معادله صفحه‌ای که شامل سه نقطه $(-۱, ۱, ۰)$ و $(۳, ۱, ۲)$ و $(۰, ۱, -۲)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $y + ۱ = ۰$ ۲) $x + y + z = ۱$ ۳) $x - y = ۱$ ۴) $y - ۱ = ۰$

۲۲. زاویه حاده بین دو صفحه به معادلات $۲x - y + z = ۲$ و $x + y + ۲z = ۱۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

۲۳. فاصله دو صفحه $x + y + z = ۱$ و $x + y + z = -۱$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۴. معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(۱, -۱, ۰)$ گذشته و با صفحه‌ی $x - y - z = ۰$ موازی است، کدام است؟

۱) $x + y + z - ۲ = ۰$
۲) $x - y - z - ۲ = ۰$
۳) $x - y = ۲$
۴) $x - y + z - ۲ = ۰$

۲۵. کدام یک از صفحات زیر با محور oy موازی است؟

۱) $x + ۲y = ۱$
۲) $y + ۲z = ۱$
۳) $x + ۲z = ۱$
۴) $x + y + z = ۱$

۲۶. اگر دو صفحه به معادلات $(m+۲)x + (۲-m)y + (۱-۲m)z - ۱ = ۰$ و $(m-۲)x + (۱+m)y + ۲(۲-m)z + ۲ = ۰$ بر هم عمود باشند، کدام است؟

۱) ۰ یا ۲
۲) ۰ یا -۲
۳) ۰ یا ۱
۴) ۱ یا ۲

۲۷. معادله صفحه گذرنده از نقطه $M(۱, ۱, ۱)$ و عمود برخط $x - ۱ = ۲y = z + ۱$، کدام است؟

۱) $x + ۲y + z = -۴$
۲) $۲x + y + ۲z = -۵$
۳) $۲x + y + ۲z = ۵$
۴) $x + ۲y + z = ۴$

۲۸. اگر $A(۲, ۴, ۶)$ و $B(۳, ۵, ۷)$، در این‌صورت معادله‌ی صفحه‌ای که در نقطه‌ی A بر خط AB عمود است، کدام است؟

۱) $x + y + z = -۱۲$
۲) $x + y + z = ۱۲$
۳) $x + ۲y - z = ۶$
۴) $x + ۲y + z = -۶$

۲۹. معادله صفحه‌ای که از نقطه $(۲, ۰, ۱)$ می‌گذرد و بر $V = (۱, ۴, ۲)$ عمود است، کدام است؟

۱) $x + ۴y + ۲z = ۰$
۲) $۲x + ۲z = -۸$
۳) $x + ۲y + ۴z = ۴$
۴) $x + ۴y + ۲z = ۴$

۳۰. خط $x + ۲ = y - ۱ = z + ۱$ صفحه‌ی xoz را در نقطه $M(a, b, c)$ قطع می‌کند. $a + b + c$ کدام است؟

۱) -۱
۲) -۳
۳) -۵
۴) ۳

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۷

۱. گزینه‌ی ۱. می‌دانیم فاصله نقطه $A(x, y, z)$ از محور yها برابر $\sqrt{x^۲ + z^۲}$ است یعنی $\sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$.

۲. گزینه‌ی ۱.

$$\vec{v}_۱ \cdot \vec{v}_۲ = |v_۱||v_۲| \cos\theta \Longrightarrow ۴ = ۲ \times ۳ \cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{۲}{۳}, \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \Longrightarrow$$

$$\sin^۲\theta + \frac{۴}{۹} = ۱ \Longrightarrow |\sin\theta| = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$|۲\vec{v}_۱ \times ۳\vec{v}_۲| = ۶|\vec{v}_۱||\vec{v}_۲||\sin\theta| = ۶ \times ۲ \times ۳ \times \frac{\sqrt{۵}}{۳} = ۱۲\sqrt{۵}$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$\vec{a} = (۲, ۰, ۲x), \vec{b} = (x, -۲, ۲), \vec{a} \cdot \vec{b} = ۲x + ۰ + ۴x = ۶ \Longrightarrow x = ۱$$

$$\vec{a} = (۲, ۰, ۲), \vec{b} = (۱, -۲, ۲) \Longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_۱^۲ + b_۲^۲ + b_۳^۲} = \sqrt{۹} = ۳ \text{ ، } \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{۶}{۲\sqrt{۲} \times ۳} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Longrightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

۴. گزینه‌ی ۴.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longrightarrow 6+2+4m=0 \Longrightarrow m=-2$$

۵. گزینه‌ی ۲.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha=6\times5\times\sin 30^\circ=30\times\frac{1}{2}=15$$

۶. گزینه‌ی ۴.

$$A=2\vec{a}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-3\vec{b}^2=2|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2$$
$$A=2\times16-5\times3\times4\cos\frac{\pi}{3}-3\times9=32-30-27=-25$$

۷. گزینه‌ی ۲.

$$\vec{i}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=\vec{i}^2+\vec{i}\cdot\vec{j}-\vec{i}\cdot\vec{k}=1+0-0=1$$

۸. گزینه‌ی ۲.

$$\vec{a}=(2x,2x,-x),|\vec{a}|=\sqrt{4x^2+4x^2+x^2}=3|x|=3x,(x>0)$$
$$3x=6\Longrightarrow x=2\Longrightarrow\vec{a}=(4,4,-2)\Longrightarrow 3\vec{a}=(12,12,-6)$$

۹. گزینه‌ی ۳.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{12}{10\times2}=\frac{3}{5},\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\sin^2\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}$$
$$\Longrightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}\ ,\ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha=10\times2\times\frac{4}{5}=16$$

۱۰. گزینه‌ی ۲.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha\Longrightarrow 9=12\sin\alpha\Longrightarrow\sin\alpha=\frac{3}{4}$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\frac{9}{16}+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=12\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$$

۱۱. گزینه‌ی ۲. چون دو بردار بر هم عمودند $\sin\alpha=1$.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=3|\vec{a}|\Longrightarrow|\vec{b}|=3$$

۱۲. گزینه‌ی ۴.

$$\vec{v}=\vec{a}\times\vec{b},|\vec{v}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha=6\times3\times\sin 60^\circ=9\sqrt{3}$$
$$\vec{v}||\vec{c}:\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{v}\cdot\vec{c}=|\vec{v}|\cdot|\vec{c}|\cos 0^\circ=27\sqrt{3}$$

۱۳. گزینه‌ی ۴.

$$\vec{v}_۱ \cdot \vec{v}_۲ = ۰ \Longrightarrow ۶ + ۳m + ۳۶ = ۰ \Longrightarrow ۳m = -۴۲ \Longrightarrow m = -۱۴$$

۱۴. گزینه‌ی ۲.

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = |\vec{a} \times \vec{b}| \ , \ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \Longrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Longrightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

۱۵. گزینه‌ی ۳. داریم $x_۰ = ۱$ و $y_۰ = -۱$ و $z_۰ = ۲$ و نیز $a = -۱$ و $b = ۱$ و $c = ۲$ بنابراین:

$$x = ۱ - t, y = -۱ + t, z = ۲ + ۲t$$

۱۶. گزینه‌ی ۴.

$$\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (۰ - ۲, -۱ - ۲, ۱ - ۲) = (-۲, -۳, -۱) = -۲\vec{i} - ۳\vec{j} - \vec{k}$$

اگر نقطه $A(۲, ۲, ۲)$ را به‌عنوان نقطه $(x_۰, y_۰, z_۰)$ بگیریم، معادله خط به‌دست می‌آید.

$$x = ۲ - ۲t, y = ۲ - ۳t, z = ۲ - t \quad \text{یا} \quad \frac{x-۲}{-۲} = \frac{y-۲}{-۳} = \frac{z-۲}{-۱}$$

۱۷. گزینه‌ی ۳. از شرط موازی بودن خط و صفحه خواهیم داشت: $۶a - ۲ - ۳a = ۰$ یا $a = \frac{۲}{۳}$.

۱۸. گزینه‌ی ۳. $\vec{v} = (۳, ۲, -۲)$ بردار هادی خط و $P = (۰, ۰, ۶)$ نقطه‌ای واقع بر خط مزبور است پس $\overrightarrow{PA} = (۱, -۱, -۸)$ در نتیجه:

$$|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & -۱ & -۸ \\ ۳ & ۲ & -۲ \end{vmatrix} = ۱۸\vec{i} - ۲۲\vec{j} + ۵\vec{k}, d = \frac{|۱۸\vec{i} - ۲۲\vec{j} + ۵\vec{k}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{۸۳۳}}{\sqrt{۱۷}} = ۷$$

۱۹. گزینه‌ی ۴. برای هر نقطه بر محور oz داریم $x = ۰$ و $y = ۰$ در نتیجه:

$$\frac{۰ - ۴}{۲} = ۰ - ۲ = ۲z + ۲ \Longrightarrow z = -۲ \Longrightarrow (۰, ۰, -۲)$$

۲۰. گزینه‌ی ۲. بردار نرمال صفحه مزبور $\vec{n} = (۲, -۱, ۳)$ است. پس:

$$۲(x - ۱) - (y - ۱) + ۳(z - ۰) = ۰ \Longrightarrow ۲x - ۲ - y + ۱ + ۳z = ۰ \Longrightarrow ۲x - y + ۳z = ۱$$

۲۱. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{vmatrix} x - ۰ & y - ۱ & z + ۱ \\ ۲ - ۰ & ۱ - ۱ & ۳ + ۱ \\ -۲ - ۰ & ۱ - ۱ & ۰ + ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow -۱۰y + ۱۰ = ۰ \Longrightarrow y - ۱ = ۰$$

۲۲. گزینه‌ی ۳. نرمال دو صفحه مزبور عبارتند از $n(۱, ۱, ۲)$ و $n' = (۲, -۱, ۱)$ پس:

$$\cos\alpha = \frac{n \cdot n'}{|n| \cdot |n'|} = \frac{۳}{\sqrt{۶}\sqrt{۶}} = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}$$

۲۳. گزینه‌ی ۲. چون دو صفحه داده شده با یکدیگر موازیند، بنابراین:

$$H = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} = \frac{|۱ + ۱|}{\sqrt{۱ + ۱ + ۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۴. گزینه‌ی ۲.

$$۱(x - ۱) - ۱(y + ۱) - ۱(z - ۰) = ۰ \Longrightarrow x - ۱ - y - ۱ - z = ۰ \Longrightarrow x - y - z - ۲ = ۰$$

۲۵. گزینه‌ی ۳. چون با محور yها موازی است پس بردار نرمال صفحه‌ی مزبور بر محور yها عمود است پس معادله صفحه نباید y داشته باشد.

۲۶. گزینه‌ی ۱. بردارهای عمود بر دو صفحه عمود بر هم، برهم عمودند، پس:

$$(m + ۲)(m - ۲) + (۲ - m)(۱ + m) + (۱ - ۲m)(۲ - m) = ۰$$

$$m^۲ - ۴ + ۲ + ۲m - m - m^۲ + ۲ - m - ۴m + ۲m^۲ = ۰ \Longrightarrow ۲m^۲ - ۴m = ۰ \Longrightarrow m = ۰, ۲$$

۲۷. گزینه‌ی ۳. بردار نرمال صفحه‌ی موردنظر موازی بردار هادی خط داده شده است. پس $\left(۱, \frac{۱}{۲}, ۱\right)$ یا برای سهولت $n = (۲, ۱, ۲)$ نرمال صفحه‌ی مطلوب است. در نتیجه:

$$۲(x - ۱) + (y - ۱) + ۲(z - ۱) = ۰ \Longrightarrow ۲x + y + ۲z = ۵$$

۲۸. گزینه‌ی ۲. بردار نرمال صفحه‌ی مطلوب $\overrightarrow{AB}$ است.

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} = (۱, ۱, ۱)$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی مطلوب عبارت است از:

$$(x - ۲) + (y - ۴) + (z - ۶) = ۰ \Longrightarrow x + y + z = ۱۲$$

۲۹. گزینه‌ی ۴.

$$(x - ۲) + ۴(y - ۰) + ۲(z - ۱) = ۰ \Longrightarrow x + ۴y + ۲z = ۴$$

۳۰. گزینه‌ی ۳. محل تقاطع صفحه‌ی xoz یا $y = ۰$ را با خط پیدا می‌کنیم.

$$x + ۲ = ۰ - ۱ = z + ۱ \Longrightarrow x = -۳, z = -۲ \Longrightarrow (-۳, ۰, -۲)$$

در نتیجه:

$$a = -۳\ ,\ b = ۰\ ,\ c = -۲ \Longrightarrow a + b + c = -۵$$

مدیریت

۱. سه بردار $\vec{a}(۱, ۲, ۳)$ و $\vec{b}(k, ۱, ۰)$ و $\vec{c}(۱, ۱, ۱)$، به‌ازای کدام مقدار k مستقل خطی نیستند؟ [۱۳۷۸]

۱) $k \neq ۱$ ۲) $k = ۱$ ۳) $k \neq ۲$ ۴) $k = ۲$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ k & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۱ + ۰ + ۳k) - (۳ + ۲k + ۰) = ۰ \Longrightarrow k = ۲$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

حسابداری

۱. به‌ازای کدام مقدار k بردارهای $a_1(1,2,1)$ و $a_2(2,3,1)$ و $a_3(4,7,k)$ وابسته خطی هستند؟ [۱۳۷۵]

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲. درکدام حالت سه بردار غیرصفر $(1,0,c)$، $(0,b,0)$ و $(a,0,1)$ وابسته خطی‌اند؟ [۱۳۸۲]

۱) $a=-1\ ,\ c=1$ ۲) $a=1\ ,\ c=2$

۳) $a=2\ ,\ c=1$ ۴) $a=2\ ,\ c=\frac{1}{2}$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 7 & k\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow (3k+14+8)-(12+4k+7)=0 \Longrightarrow k=3$$

۲. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ a & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow (b)-(abc)=0 \Longrightarrow b(1-ac)=0$$

به ازای $a=2$ و $c=\frac{1}{2}$ تساوی بالا برقرار است.

فصل ۸

ماتریس و دترمینان

ماتریس

۸ـ۱ ماتریس آرایشی است مستطیلی از اعداد، حروف، توابع، . . .که به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

این ماتریس دارای m سطر و n ستون می‌باشد و آن را یک ماتریس از درجه‌ی (مرتبه یا اندازه) $m \times n$ می‌نامند. هر یک از اعداد حقیقی موجود در یک ماتریس را یک عنصر یا درایه آن ماتریس می‌نامند. عنصر a_{ij} را در نظر بگیرید[۱]، i شماره سطر و j شماره ستونی را نشان می‌دهد که این عنصر در آن قرار دارد. اندیس‌های i و j را به‌صورت $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ بیان می‌کنیم. برای خلاصه‌نویسی، ماتریس فوق را به‌صورت $A_{m\times n}$ یا $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ می‌نویسند.

مثال ماتریس $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ که در آن برای هر i و j داریم $a_{ij} = (i + j)$، به‌صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = 2\ ,\ a_{12} = 3\ ,\ a_{13} = 4 \\ a_{21} = 3\ ,\ a_{22} = 4\ ,\ a_{23} = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس

۸ـ۲ دو ماتریس A و B را مساوی می‌نامیم و می‌نویسیم $A = B$، هرگاه اولاً: هم درجه باشند، ثانیاً عنصرهای آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

مثال هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & x-y \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2x-y & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ و $A = B$، دراین‌صورت حاصل $(x+y)^3$ را به‌دست آورید.

---

۱. a_{ij} را عنصر عمومی می‌نامند.

حل

$$A = B \Longrightarrow \begin{cases} ۲x - y = ۱ \\ x - y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x - y = ۱ \\ -x + y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow x = ۱\ ,\ y = ۱ \Longrightarrow (x+y)^۳ = ۸$$

ماتریس‌های خاص

۸ـ۳ ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشد. مثلاً اگر $A_{n\times n}$، می‌گوییم A یک ماتریس مربع از درجه‌ی n است. در هر ماتریس مربعی از درجه‌ی n قطر اصلی شامل عناصر $a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn}$ است. بنابراین:

$$A = [a_{ij}]_{n\times n} \Longrightarrow \begin{cases} i = j \text{ دارد} & a_{ij} \text{ روی قطر اصلی قرار} \\ i > j \text{ دارد} & a_{ij} \text{ پایین قطر اصلی قرار} \\ i < j \text{ دارد} & a_{ij} \text{ بالای قطر اصلی قرار} \end{cases}$$

۸ـ۴ اثر ماتریس: در ماتریس مربع $A_{n\times n}$، مجموع عناصر قطر اصلی A را اثر ماتریس A می‌نامند و با $\text{trace}(A)$ یا trA نشان می‌دهند:

$$\text{trA} = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + a_{nn}$$

مثال اگر اثر ماتریس $A = \begin{bmatrix} m-۱ & m \\ ۰ & ۲m+۲ \end{bmatrix}$ برابر ۴ باشد. مقدار m را بیابید.

$$\text{trA} = ۴ \Longrightarrow (m-۱) + (۲m+۲) = ۴ \Longrightarrow m = ۱$$

۸ـ۵ ماتریس صفر: ماتریسی که همه‌ی عناصر آن صفر باشند. ماتریس صفر از درجه‌ی $m \times n$ را با نماد $O_{m\times n}$ یا به‌طور خلاصه با $\bar{O}$ نمایش می‌دهند: برای مثال ماتریس $\bar{O}_{۲\times ۲}$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۸ـ۶ ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. اگر A ماتریسی ستونی با m سطر باشد، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}$$

۸ـ۷ ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. اگر A ماتریس سطری با n ستون باشد، داریم:

$$A = [a_{۱۱} \quad a_{۱۲} \quad \ldots \quad a_{۱n}]$$

۸ـ۸ ماتریس همانی (واحد): ماتریسی مربعی که کلیه‌ی عناصر قطر اصلی آن عدد ۱ و سایر عناصر آن صفر باشد. ماتریس همانی از درجه‌ی n را با I_n نشان می‌دهیم. مثلاً:

$$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۸ـ۹ ماتریس قطری: ماتریسی مربعی که تمام عناصر بالا و پایین قطر اصلی آن صفر باشند. (عناصر واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند.) هر یک از ماتریس‌های زیر قطری هستند.

$$D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر می‌توان گفت ماتریس D قطری است هرگاه به‌ازای هر i و j اگر $i \neq j$ آنگاه $d_{ij} = ۰$.

۸ـ۱۰ ماتریس اسکالر: ماتریسی قطری که تمام عناصر واقع بر قطر اصلی آن با هم مساوی هستند (می‌توانند همگی صفر باشند.). هر یک از ماتریس‌های زیر اسکالر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

در واقع هر ماتریس اسکالر، مضربی از یک ماتریس همانی است. مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = ۲ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۲I$$

۸ـ۱۱ ماتریس بالامثلثی: ماتریسی مربعی که تمام عناصر واقع در پایین قطر اصلی آن صفر باشند. مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

به‌عبارت دیگر ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ را پایین مثلثی می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر i و j اگر $i > j$ آنگاه $a_{ij} = ۰$.

۸ـ۱۲ ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که تمام عناصر واقع در بالای قطر اصلی آن صفر باشند. مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۳ & ۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

به‌عبارت دیگر ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ را پایین مثلثی می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر i و j اگر $i < j$ آنگاه $a_{ij} = ۰$.

۸ـ۱۳ چند نکته:

۱) ماتریسی مربعی صفر، ماتریسی قطری است.

۲) ماتریس مربعی صفر، یک ماتریس اسکالر است.

۳) ماتریس‌های قطری، هم بالامثلثی و هم پایین مثلثی هستند.

۸ـ۱۴ قرینه‌ی یک ماتریس: قرینه‌ی ماتریس A را با $(-A)$ نمایش می‌دهیم و اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$، در این صورت بنا به تعریف $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$. مثلاً

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & -۷\end{bmatrix}\Longrightarrow -A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ -۳ & ۷\end{bmatrix}$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

۸ـ۱۵ اگر A و B دو ماتریس هم درجه باشند و فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، در این‌صورت داریم:

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

یعنی حاصل جمع دو ماتریس از درجه‌ی $m\times n$، ماتریسی است هم درجه با آن‌ها که هر عنصر آن از جمع عناصر نظیرش در دو ماتریس حاصل می‌شود.

مثال

$$\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ -۳ & ۵ & ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۲\\ ۳ & ۸ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۱۳ & ۶\end{bmatrix}$$

۸ـ۱۶ اگر A و B دو ماتریس هم درجه باشند، $A-B$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A-B=A+(-B)$$

۸ـ۱۷ خواص جمع ماتریس‌ها

۱) خاصیت جابه‌جایی: $A+B=B+A$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری: $A+(B+C)=(A+B)+C$

۳) قانون حذف: $A+C=B+C\Longrightarrow A=B$

۴) ماتریس صفر عنصر خنثی (بی‌اثر): $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$

۵) هر ماتریس نسبت به عمل جمع یک قرینه دارد: $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$

۶) k یک اسکالر است: $k(A+B)=kA+kB$

ضرب عدد در یک ماتریس

۸ـ۱۸ اگر بخواهیم یک عدد حقیقی را در یک ماتریس ضرب کنیم، باید آن عدد را در تمام عناصر آن ماتریس ضرب کنیم:

$$k\cdot A=A\cdot k=k[a_{ij}]_{m\times n}=[ka_{ij}]_{m\times n}$$

مثال

$$۳\begin{bmatrix} -۱ & ۷ \\ ۰ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۲۱ \\ ۰ & ۱۲ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

نتیجه. اگر تمام عناصر ماتریس A در k ضرب شده باشند، می‌توان از k در تمام جملات فاکتورگرفت و k را در پشت ماتریس قرار داد.

مثال

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۸ & ۶ \\ ۰ & -۱۰ & ۱۲ \end{bmatrix} = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ ۰ & -۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

۸ـ۱۹ خواص ضرب عدد در ماتریس: اگر A و B دو ماتریس هم درجه و r و s دو عدد حقیقی باشند، در این‌صورت:

۱) $r(sA) = (rs)A$
۲) $(r \pm s)A = rA \pm sA$
۳) $r(A + B) = rA + rB$
۴) $r\bar{O} = \bar{O}$
۵) $A = B \Longrightarrow rA = rB$
۶) $rA = rB\ ,\ r \neq ۰ \Longrightarrow A = B$
۷) $rA = \bar{O} \Longrightarrow r = ۰$ یا $A = \bar{O}$

ضرب ماتریس‌ها

۸ـ۲۰ در عبارت $A \times B$، A را ماتریس پیش ضرب، و B را ماتریس پس ضرب می‌نامند. در عبارتی به شکل $B \times A$، بر عکس B در A پیش‌ضرب شده است.

۸ـ۲۱ دو ماتریس را درصورتی می‌توان در هم ضرب کرد که تعداد ستون‌ها در ماتریس پیش ضرب برابر با تعداد سطرها در ماتریس پس ضرب باشد. ماتریس حاصل دارای همان تعداد سطر ماتریس پیش ضرب و همان تعداد ستون ماتریس پس ضرب خواهد بود.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times q} = C_{m\times q}$$

۸ـ۲۲ اگر فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times q}$ و $C = [c_{ij}]_{m\times q}$، دراین‌صورت

$$A \cdot B = C = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{k_j}\right]_{m\times q} \qquad i = ۱, ۲, \ldots, m,\ \ j = ۱, ۲, \ldots, n$$

مثال فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ دراین صورت اگر $A \times B = C = [c_{ij}]$ و $B \times A = D = [d_{ij}]$، آنگاه:

۱) عناصر $c_{۲۱}$ و $d_{۲۳}$ را به‌دست آورید.

۲) دو ماتریس C و D را بیابید.

حل

۱)

$$c_{۲۱} = [۳ \quad -۴ \quad ۱] \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۰ - ۴ + ۳ = -۱$$

$$d_{۲۳} = [۱ \quad ۵] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۲ + ۵ = ۷$$

۲)

$$A_{۲\times۳} \times B_{۳\times۲} = C_{۲\times۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۴ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰+۱+۶ & ۰+۵+۲ \\ ۰-۴+۳ & ۶-۲۰+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۷ \\ -۱ & -۱۳ \end{bmatrix}$$

$$B_{۳\times۲} \times A_{۲\times۳} = D_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۴ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰+۶ & ۰-۸ & ۰+۲ \\ ۰+۱۵ & ۱-۲۰ & ۲+۱۵ \\ ۰+۳ & ۳-۴ & ۶+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & -۸ & ۲ \\ ۱۵ & -۱۹ & ۷ \\ ۳ & -۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ مفروض است. مقادیر x و y را طوری بیابید که داشته باشیم: $xA^۲ + yA = I$.

حل

$$xA^۲ + yA = I \Longrightarrow x \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x & ۰ \\ ۰ & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & ۰ \\ ۲y & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x+y & ۰ \\ ۲y & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} ۲y = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \\ x + y = ۱ \Longrightarrow x = ۱ \end{cases}$$

مثال از رابطه‌ی ماتریسی $A \times \begin{pmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & -۵ \end{pmatrix} = (۱ \quad -۱)$، ماتریس A را بیابید.

حل از $A \times B_{۲\times۲} = C_{۱\times۲}$ نتیجه می‌شود که $A_{۱\times۲}$ می‌باشد.

$$(x \quad y) \begin{pmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & -۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} ۲x+۳y & -۳x-۵y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۱ \\ -۳x - ۵y = -۱ \end{cases} \Longrightarrow x = ۲ \,,\; y = -۱ \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \end{pmatrix}$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} m & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و عنصر سطر دوم و ستون اول $A^۲$ برابر ۲ باشد، m کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۳.

$$c_{۲۱}=۲ \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ ۲ \end{bmatrix}=۲ \Longrightarrow ۲m-۲=۲ \Longrightarrow m=۲$$

تست مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۳.

$$\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}=۰ \Longrightarrow \begin{bmatrix} -x+۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}=۰ \Longrightarrow [-x^۲+۲x+۳]=۰$$

$$\Longrightarrow -x^۲+۲x+۳=۰ \Longrightarrow x'+x''=\frac{-b}{a}=۲$$

۸ـ۲۳ ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها:

۱) اگر A و B دو ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند. به‌طوری که $A\times B$ قابل تعریف باشد، آنگاه:

$$(rA)\times(sB)=(rs)A\times B \qquad (rA)\times B=A\times(rB)=r(A\times B)$$
$$(-A)\times B=-(A\times B) \qquad (-A)\times(-B)=A\times B$$
$$A\times(-B)=-(A\times B)$$

۲) دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، یعنی:

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$$

۳) دارای خاصیت توزیع‌پذیری نسبت به جمع است، یعنی:

$$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$$

۴) اگر A ماتریسی مربعی از درجه‌ی n و I_n ماتریس همانی هم درجه با A باشد، در این صورت داریم:

$$A\times I_n=I_n\times A=A$$

یعنی: I_n عضو خنثی نسبت به عمل ضرب است.

۵) اگر $A\times B$ تعریف شود و سطر iام ماتریس A صفر باشد، آنگاه سطر iام ماتریس $A\times B$ صفر است.

۶) اگر $A \times B$ تعریف شود و ستون jام ماتریس B صفر باشد، آنگاه ستون jام ماتریس $A \times B$ صفر است.

۷) در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارند، یعنی

$$A \times B \neq B \times A$$

۸) اگر A و B دو ماتریس قطری و هم درجه باشند، در این صورت، همواره داریم:

$$A \times B = B \times A$$

۹) اگر A ماتریسی اسکالر و B ماتریسی هم درجه با A باشد، همواره داریم:

$$A \times B = B \times A$$

۱۰) اگر D یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه‌ی D^n کافی است عناصر روی قطر اصلی را به توان n برسانیم.

۱۱) اگر A ماتریسی قطری و B مربعی و هم درجه با A باشد، در این صورت:

الف) برای محاسبه‌ی $A \times B$ کافی است هر عنصر روی قطر اصلی A را در سطر نظیرش در ماتریس B ضرب کنیم. برای مثال:

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ -۲ & ۰ & ۳ \\ ۵ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ۲a & ۴a \\ -۲b & ۰ & ۳b \\ ۵c & c & ۲c \end{bmatrix}$$

ب) برای محاسبه‌ی $B \times A$ کافی است هر عنصر روی قطر اصلی A را در ستون نظیرش در ماتریس B ضرب کنیم. برای مثال:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۵ & ۴ \\ -۲ & ۷ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ۲b & ۳c \\ ۳a & ۵b & ۴c \\ -۲a & ۷b & ۳c \end{bmatrix}$$

۱۲) قانون حذف، در حالت کلی برقرار نیست، یعنی در حالت کلی از $A \times B = A \times C$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $B = C$.

۱۳) اگر دو ماتریس مربعی و هم درجه A و B تعویض‌پذیر باشند ($A \times B = B \times A$)، در این‌صورت، تمام اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است. برای مثال:

$$AB = BA \Longleftrightarrow (A - B)(A + B) = A^۲ - I^۲$$

نتیجه. چون ماتریس همانی (I) با هر ماتریس هم درجه‌ی خود تعویض‌پذیر است، لذا تمام اتحادهای جبری برای I و هر ماتریس هم‌درجه با آن برقرار است. برای مثال:

$$A^۳ + I^۳ = (A + I)(A^۲ - AI + I^۲)$$

۱۴) اگر دو ماتریس مربعی و هم مرتبه‌ی A و B تعویض‌پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$، در این‌صورت، برای هر $m, n \in N$ داریم:

$$A^m \times B^n = B^n \times A^m$$

۱۵) در ماتریس‌ها از تساوی $A \times B = \bar{O}$، در حالت کلی، نمی‌توان نتیجه گرفت که $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$.

۱۶) اگر A و B دو ماتریس مربعی و تعویض‌پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$، در این‌صورت داریم:

$$(A \times B)^n = A^n \times B^n$$

۱۷) اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم درجه باشند، آنگاه:

$$\mathrm{tr}(A \times B) = \mathrm{tr}(B \times A)$$

۱۸) ضرب دو ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) و هم درجه ماتریسی است بالا مثلثی (پایین مثلثی).

نتیجه. حاصل ضرب دو ماتریس قطری و هم درجه، ماتریسی قطری از همان درجه است.

۱۹) ماتریس $A_{m\times n}$ را زمانی در خودش می‌توان ضرب کرد که داشته باشیم $m = n$ یعنی تنها ماتریس مربع را می‌توان در خودش ضرب کرد. اگر A ماتریس مربع از درجه‌ی $m \times m$ باشد، طبق قرار داد:

$$\underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n\ \text{تا}} = A^n$$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، آنگاه مجموع عناصر ماتریس $A \times B$ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۰

حل گزینه‌ی ۴. بنابر ویژگی (۱۱) در سطر اول B عدد ۲ و در سطر دوم عدد (-۱) و در سطر سوم عدد ۳ را ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع عناصر } A \times B = ۲ + ۴ + ۶ + ۱ + ۰ - ۲ + ۰ + ۶ + ۳ = ۲۰$$

تست اگر A و B ماتریس‌های ۲×۲ و $A \times B = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۳ \\ ۸ & ۸ \end{bmatrix}$ در این‌صورت $(B \times A)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & ۱۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ -۴ & ۸ \end{bmatrix}$

حل گزینه‌ی ۲. زیرا فقط گزینه‌ی (۲) ماتریسی را معرفی می‌کند که حاصل جمع عناصر روی قطر اصلی آن با $\mathrm{tr}(A \times B)$ یعنی $۱۸ = ۱۴ + ۴$ برابر است. ویژگی (۱۷).

توان‌های طبیعی یک ماتریس مربع

۸ـ۲۴ اگر A یک ماتریس مربع باشد، دراین‌صورت توان‌های طبیعی A به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A^1 = A\ ,\ A^2 = A \cdot A\ ,\ A^3 = A^2 \cdot A, \ldots, A^{n+1} = A^n \cdot A$$

۸ـ۲۵ توان‌های طبیعی ماتریس‌ها در ضرب خاصیت جابه‌جایی دارند. مثلاً داریم:

$$A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3$$

و درصورتی‌که A یک ماتریس مربع درجه‌ی n باشد، آنگاه $A^0 = I_n$.

۸ـ۲۶ نکات مهم:

۱) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ مفروض است:

الف) اگر n زوج باشد، آنگاه: $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$

ب) اگر n فرد باشد. آنگاه: $A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^n \\ a^n & 0 \end{bmatrix}$

۲) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ مفروض است.

الف) اگر n زوج باشد، آنگاه: $A^n = \begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$

ب) اگر n فرد باشد، آنگاه: $A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، آنگاه مجموع عناصر قطری A^6 کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

حل گزینه‌ی ۳.

$$A^6 = \begin{bmatrix} (2 \times 1)^{\frac{6}{2}} & 0 \\ 0 & (2 \times 1)^{\frac{6}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{مجموع عناصر قطری} = 8 + 8 = 16$$

ماتریس‌های بی‌اثر (هیچ‌نما) و خود توان

۸ـ۲۷ ماتریس مربع A را بی‌اثر می‌نامند هرگاه به‌ازای یک عدد طبیعی n، داشته باشیم $A^n = \bar{O}$، همه‌ی ماتریس‌های بی‌اثر 2×2 به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} mn & n^2 \\ -m^2 & -mn \end{bmatrix}$$

۲۸ـ۸ ماتریس مربع A را خود توان می‌نامند، هرگاه $A^۲ = A$. بدیهی است که اگر A خود توان باشد، آنگاه به‌ازای هر عدد طبیعی n، داریم $A^n = A$.

مثال اگر A، ماتریس خودتوان و I ماتریس همانی و هم درجه با A باشد، حاصل $(A+I)^۳$ را بیابید.

حل چون A و I تعویض‌پذیرند، می‌توان اتحاد مکعب مجموع را به‌کاربرد.

$$(A+I)^۳ = A^۳ + ۳A^۲ + ۳A + I$$

چون A خود توان است، لذا $A^۳ = A$ و $A^۲ = A$. بنابراین:

$$(A+I)^۳ = A + ۳A + ۳A + I = ۷A + I$$

تست اگر A، ماتریسی خودتوان باشد $(A^۲ = A)$ در این صورت کدام ماتریس خودتوان نیست؟

۱) $(I-A)$ ۲) $A^۴$ ۳) $(A-I)$ ۴) $A^۳$

حل گزینه‌ی ۳. A خود توان است، پس $A^n = A$:

$$(I-A)^۲ = I^۲ - ۲AI + A^۲ = I - ۲A + A = (I-A)$$

$$(A^۴)^۲ = A^۸ = A \quad , \quad (A^۳)^۲ = A^۶ = A$$

پس ثابت کردیم هر یک از ماتریس‌های $(I-A)$، $A^۴$ و $A^۳$ خودتوان هستند.

ماتریس ترانهاده (ترانسپوزه)

۲۹ـ۸ اگر در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$، جای تمام سطرها و ستون‌های متناظر آن را تعویض کنیم، ماتریس حاصل را که با A' یا A^t نشان می‌دهیم، ترانهاده یا ترانسپوزه ماتریس A خوانند و داریم:

$$A' = [a_{ji}]_{n\times m}$$

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۴ & -۳ \end{bmatrix}$ باشد، $A' = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۲ & ۴ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ است.

تست اگر $A' = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ اثر ماتریس X از معادله‌ی $XA = A'$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۴.

$$X \cdot \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ۵a+۳b & ۲a+b \\ ۵c+۳d & ۲c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} ۵a+۳b = ۵ \\ ۲a+b = ۳ \end{cases} \Longrightarrow a = ۴, b = -۵$$

$$\begin{cases} ۵c+۳d = ۲ \\ ۲c+d = ۱ \end{cases} \Longrightarrow c = ۱ \ , \ d = -۱ \Longrightarrow X = \begin{bmatrix} ۴ & -۵ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{tr} X = ۳$$

۸ـ۳۰ ویژگی‌های ماتریس ترانهاده:

۱) برای هر ماتریس A داریم: $(A')' = A$

۲) برای هر ماتریس A, $k \in \mathbb{R}$ داریم: $(kA)' = kA'$

۳) برای هر دو ماتریس هم درجه A و B داریم: $(A \pm B)' = A' \pm B'$

ویژگی (۳) در حالت کلی نیز برقرار و قابل تعمیم است، یعنی:

$$(A + B + \cdots + Z)' = A' + B' + \cdots + Z'$$

۴) اگر A و B دو ماتریس و $(A \times B)$ تعریف شود، آنگاه:

$$(AB)' = B'A'$$

از ویژگی (۴) می‌توان نتیجه گرفت:

الف) اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ماتریس‌های قابل ضرب باشند، آنگاه:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n)' = A_n' \cdot \cdots \cdot A_2' \cdot A_1'$$

ب) اگر A ماتریس مربع و $n \in N$ باشد، آنگاه:

$$(A')^n = (A^n)'$$

۵) ترانهاده هر ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) یک ماتریس پایین مثلثی (بالامثلثی) است.

۶) هرگاه ضرب دو ماتریس دارای ویژگی تعویض‌پذیری (جابه‌جایی) باشد، آنگاه ترانهاده آن‌ها نیز دارای ویژگی تعویض‌پذیری است.

تست اگر A ماتریسی مربعی و خودتوان و A' ترانهاده‌ی آن باشد و داشته باشیم $(A - A')^2 = \bar{O}$، دراین‌صورت، حاصل $(A + A')$ کدام است؟

۱) $AA' + A'A$ ۲) $2AA'$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $AA' - A'A$

حل گزینه‌ی ۱.

$$A^2 = A \Longrightarrow (A^2)' = A' \Longrightarrow (A')^2 = A'$$
$$(A - A')^2 = \bar{O} \Longrightarrow (A - A')(A - A') = \bar{O}$$
$$\Longrightarrow A^2 - AA' - A'A + (A')^2 = \bar{O} \Longrightarrow A - AA' - A'A + A' = \bar{O}$$
$$\Longrightarrow A + A' = AA' + A'A$$

ماتریس متقارن

۸ـ۳۱ ماتریس مربعی A را متقارن می‌نامیم هرگاه ترانهاده‌اش با خودش برابر باشد، یعنی $A' = A$. به بیان‌دیگر ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ متقارن است، اگر به‌ازای جمیع مقادیر i و j داشته باشیم $a_{ij} = a_{ji}$.

مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۴ \\ ۵ & ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریسی متقارن است و همانطورکه مشاهده می‌شود: $a_{۱۲} = a_{۲۱} = ۳$، $a_{۱۳} = a_{۳۱} = ۵$، $a_{۲۳} = a_{۳۲} = ۴$.

۸ـ۳۲ ویژگی‌های ماتریس متقارن:

۱) در هر ماتریس متقارن، عناصر قرینه نسبت به قطر اصلی ماتریس، مساوی یکدیگرند.

۲) هر ماتریس قطری و در نتیجه ماتریس اسکالر و ماتریس همانی متقارن هستند.

۳) اگر A ماتریس مربع باشد، $(A + A')$ یک ماتریس متقارن است.

۴) مجموع و تفاضل دو ماتریس متقارن هم درجه، ماتریس متقارن است.

۵) حاصل‌ضرب یک عدد در یک ماتریس متقارن، ماتریسی متقارن است.

مثال نشان دهید اگر A ماتریس مربع باشد، $A + A'$ یک ماتریس متقارن است.

حل فرض می‌کنیم $B = (A + A')$:

$$B' = (A + A')' = A' + A = A + A'$$

پس $B = B'$ بوده یعنی B ماتریس متقارن است.

ماتریس پادمتقارن (شبه متقارن)

۸ـ۳۳ ماتریس مربعی A را پادمتقارن می‌نامیم هرگاه ترانهاده‌اش با قرینه‌اش برابر باشد، یعنی $A' = -A$. به‌بیان دیگر، ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ پاد متقارن است، اگر به‌ازای جمیع مقادیر i و j داشته باشیم $a_{ji} = -a_{ij}$.

مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۱ \\ -۳ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریسی پادمتقارن است و همان‌طورکه مشاهده می‌شود $a_{۲۱} = -a_{۱۲}$، $a_{۳۱} = -a_{۱۳}$ و $a_{۳۲} = -a_{۲۳}$.

۸ـ۳۴ نکات مهم:

۱) ماتریس مربعی صفر تنها ماتریسی است که هم متقارن و هم پاد متقارن است.

۲) هرگاه بخواهیم ثابت کنیم ماتریسی متقارن یا پادمتقارن است یا بخواهیم وجود این خواص را برای ماتریسی بررسی کنیم، کافی است ترانهاده‌ی آن ماتریس را محاسبه کنیم که اگر با خودش برابر باشد متقارن و اگر با قرینه‌اش برابر باشد پادمتقارن است.

مثال اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم درجه و متقارن باشند، ثابت کنید ماتریس $(AB + BA)$ ماتریسی متقارن است.

حل طبق فرض مسأله $A' = A, B' = B$:

$$(AB + BA)' = (AB)' + (BA)' = B'A' + A'B' = BA + AB = (AB + BA)$$

و چون ترانهاده‌اش با خودش برابر است، پس متقارن است.

مثال ثابت کنید توان‌های طبیعی هر ماتریس متقارن، ماتریسی متقارن است. به‌عبارت دیگر، اگر A متقارن باشد، آنگاه A^n متقارن است.

حل طبق فرض مسأله $A' = A$:

$$(A^n)' = (A')^n = (A)^n \Longrightarrow A^n \text{ متقارن است}$$

مثال ثابت کنید اگر A ماتریسی پادمتقارن باشد، در این صورت برای هر n زوج A^n متقارن و برای هر n فرد همواره A^n پادمتقارن است.

حل طبق فرض مسأله $A' = -A$:

$$n \text{ فرد} \Longrightarrow (A^n)' = (A')^n = (-A)^n \Longrightarrow (-1)^n \times A^n = -1 \times A^n = -A^n$$

$$n \text{ زوج} \Longrightarrow (A^n)' = (A')^n = (-A)^n \Longrightarrow (-1)^n \times A^n = 1 \times A^n = A^n$$

نتیجه. اگر A متقارن باشد، در این صورت هر ترکیب خطی از توان‌های مختلف A نیز متقارن است. یعنی با فرض متقارن بودن A به‌راحتی نتیجه می‌گیریم که: $(\lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_n A^n)$ نیز متقارن است.

۳۵ـ۸ ویژگی‌های ماتریس پادمتقارن:

۱) عناصر روی قطر اصلی هر ماتریس پادمتقارن همگی صفرند و عناصری که نسبت به قطر جایگاه قرینه دارند، قرینه‌ی جبری یکدیگرند.

۲) اگر A ماتریس مربع باشد، $A - A'$ یک ماتریس پادمتقارن است.

۳) مجموع و تفاضل دو ماتریس پاد متقارن هم درجه، ماتریس پادمتقارن است.

۴) حاصل‌ضرب یک عدد در یک ماتریس پادمتقارن، ماتریس پاد متقارن است.

مثال نشان دهید اگر A ماتریس مربع باشد، $A - A'$ یک ماتریس پادمتقارن است.

حل فرض می‌کنیم $B = A - A'$:

$$B' = (A - A')' = A' - A = -(A - A') = -B$$

پس $B' = -B$ بوده یعنی B ماتریس پادمتقارن است.

دترمینان

۸ـ۳۶ به هر ماتریس مربعی مانند $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ می‌توان عددی حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نام دارد، و آن را $|A|$ یا $\det(A)$ و به‌صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|$$

۸ـ۳۷ دترمینان ماتریس‌های 1×1

$$A = [a] \Longrightarrow |A| = a$$

۸ـ۳۸ دترمینان ماتریس‌های 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = ad - bc$$

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است $|A|, |A - 2I_2|$.

حل

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10$$

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - 2I_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-6) = 4$$

تست اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m+1 \end{bmatrix}$ برابر ۳ باشد، m کدام است؟

۱) ۰ ۲) ± 2 ۳) ± 1 ۴) ± 3

حل گزینه‌ی ۲.

$$|A| = 3 \Longrightarrow (m-1)(m+1) - 0 = 3 \Longrightarrow m^2 - 1 = 3 \Longrightarrow m^2 = 4 \Longrightarrow m = \pm 2$$

۸ـ۳۹ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ (روش ساروس، که فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است): در این روش ابتدا دو ستون سمت چپ ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و حاصل ضرب قطرهای فرعی را از حاصل ضرب قطرهای اصلی کم می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = \begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} = (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

(۶) (۵) (۴) (۱) (۲) (۳)

مثال دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۶ & ۵ \end{bmatrix}$ را بیابید.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۶ & ۵ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۶ \end{matrix} = (۱۰ - ۲۴ + ۰) - (۰ + ۴۸ + ۲) = -۶۴$$

تست به‌ازای کدام مقدار a دترمینان $B = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & a \end{vmatrix}$ برابر صفر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۴.

$$|B| = ۰ \Longrightarrow (-a + ۶ + ۰) - (-۹ + ۴a + ۰) = ۰ \Longrightarrow -۵a + ۱۵ = ۰ \Longrightarrow a = ۳$$

دترمینان ماتریس‌های $n \times n$

۸ـ۴۰ برای تعریف $|A|$ برای ماتریس‌های $n \times n$ که $n \geqslant ۳$ نیاز به تعریف دو نماد و اصطلاح داریم: یکی «کِهاد» و دیگری «همسازه».

۸ـ۴۱ تعریف کهاد: اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ باشد، آنگاه ماتریسی را که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A به‌دست می‌آید با M_{ij} نشان می‌دهیم ، آن را کهاد (مینور) متناظر با عنصر a_{ij} از ماتریس A می‌نامیم.

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۵ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$ در این‌صورت دایم:

$M_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۷ & ۶ \end{bmatrix}$ (سطر دوم و ستون اول A حذف شده)

$M_{۳۲} = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ (سطر سوم و ستون دوم A حذف شده)

۸ـ۴۲ تعریف همسازه: اگر $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ باشد، همسازه‌ی (کوفاکتور) نظیر a_{ij} را با A_{ij} نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \times |M_{ij}|$$

مثال در مثال قبل داریم:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \times |M_{21}| = -1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times (-21) = 21$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \times |M_{32}| = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times (-1-6) = 7$$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع همسازه‌های نظیر قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۲

حل گزینه‌ی ۴.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (8-1) = 7 \ , \ A_{22} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (8-0) = 8$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times (4+3) = 7$$

در نتیجه:

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 7 + 8 + 7 = 22$$

۸ـ۴۳ اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد که $n \geqslant 3$، دترمینان A بر حسب هر سطر یا هر ستون با توجه به ضابطه‌ی زیر بسط داده می‌شود که همواره عددی ثابت است، فرض کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

برای محاسبه‌ی $|A|$ برحسب یک سطر (ستون) کافی است هر عنصر آن سطر (ستون) را در همسازه‌ی نظیرش ضرب و همه را با هم جمع کنیم. مثلاً

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \quad \text{بر حسب سطر اول}$$

یا:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n} \quad \text{بر حسب سطر دوم}$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۳ & ۴\end{bmatrix}$، در این‌صورت $|A|$ را به‌دست آورید.

حل $|A|$ را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم.

$$|A|=۳(-۱)^{۲}\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{vmatrix}+۲(-۱)^{۳}\begin{vmatrix}۰ & ۲\\ ۰ & ۴\end{vmatrix}+۱(-۱)^{۴}\begin{vmatrix}۰ & -۱\\ ۰ & ۳\end{vmatrix}$$

$$|A|=۳(-۴-۶)-۲(۰-۰)+۱(۰-۰)=-۳۰$$

۴۴ـ۸ تذکر:اگر دترمینان یک ماتریس را برحسب سطر یا ستونی که تعداد صفرهای واقع در آن بیش از بقیه‌ی سطر و ستون‌هاست بسط دهیم، ساده‌تر و سریعتر به جواب می‌رسیم. زیرا نیازی به محاسبه همسازه‌های صفر نیست، چون حاصل‌ضرب صفر در هر همسازه‌ای برابر با صفر است.

مثال در مثال قبلی $|A|$ را برحسب ستون اول بسط می‌دهیم.

$$|A|=۳(-۱)^{۲}(-۴-۶)+۰+۰=-۳۰$$

۴۵ـ۸ دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی، پایین مثلثی، قطری یا اسکالر برابر است با حاصل‌ضرب عناصر واقع بر قطر اصلی آن.

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۲\end{bmatrix}$، حاصل $|A|$ را بیابید.

حل ماتریس A پایین مثلثی است، بنابراین

$$|A|=-۲\times ۳\times ۲=-۱۲$$

۴۶ـ۸ به‌طورکل یک دترمینان $n\times n$ دارای $n^{۲}$ عنصر و $n!$ جمله است.

ویژگی‌های دترمینان یک ماتریس

۴۷ـ۸ اگر ماتریسی دارای یک سطر یا یک ستون صفر باشد، آنگاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

۴۸ـ۸ دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانهاده‌ی همان ماتریس برابر است، یعنی:

$$|A|=|A'|$$

۴۹ـ۸ هرگاه یک سطر یا یک ستون ماتریسی در عدد حقیقی k ضرب شود، در این صورت دترمینان آن ماتریس در عدد k ضرب می‌شود.

نتیجه ۱. از عناصر یک سطر یا یک ستون می‌توان فاکتورگرفت و عامل فاکتورگرفته را به پشت علامت دترمینان انتقال داد.

نتیجه ۲. اگر تمام عناصر ماتریس مربع n را در k ضرب کنیم، دترمینان آن ماتریس در k^{n} ضرب می‌شود.

نتیجه ۳. اگر A ماتریسی پادمتقارن از مرتبه‌ی n و n فرد باشد آن‌گاه $|A|=۰$.

نتیجه ۴. دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبه‌ی زوج، یک عدد مربع کامل است.

۸ـ۵۰ اگر در ماتریسی جای دو سطر را با هم و یا جای دو ستون را با یکدیگر عوض کنیم، آنگاه دترمینان ماتریس حاصل، قرینه‌ی ماتریس قبل خواهد بود، ولی قدرمطلق آن تغییر نمی‌کند.

۸ـ۵۱ اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون برابر یا متناسب وجود داشته باشد، آنگاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثال ثابت کنید

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲a & b & ۳a \\ ۲d & e & ۳d \\ ۲f & g & ۳f \end{vmatrix} = ۰$$

حل بعد از فاکتورگیری در ستون اول از ۲ و در ستون سوم از ۳، خواهیم داشت:

$$|A| = ۲ \times ۳ \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ f & g & f \end{vmatrix} = ۶ \times ۰ = ۰$$

۸ـ۵۲ هرگاه مضربی از یک سطر (ستون) A را به سطر (ستون) دیگری از A اضافه کنیم، دترمینان حاصل با دترمینان A برابر است.

مثال بدون استفاده از بسط ثابت کنید مقدار دترمینان زیر صفر است.

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & b+c \\ ۱ & b & c+a \\ ۱ & c & a+b \end{vmatrix}$$

حل ستون دوم را به ستون سوم اضافه می‌کنیم

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & b+c \\ ۱ & b & c+a \\ ۱ & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & a & a+b+c \\ ۱ & b & a+b+c \\ ۱ & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} ۱ & a & ۱ \\ ۱ & b & ۱ \\ ۱ & c & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

تست مقدار دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۳ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) صفر ۳) -۳ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۲. ستون‌های دوم، سوم و چهارم را به ستون اول اضافه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} -۳ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & -۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۳ \end{vmatrix} = ۰$$

۸ـ۵۳ با تعمیم ویژگی (۸ − ۵۲) می‌توان درجه‌ی یک دترمینان را کاهش داد. برای این‌منظور تمامی عناصر یک سطر (ستون) دلخواه و مناسبی را بجز یک عنصر، با توجه به ویژگی (۸ − ۵۲) به صفر تبدیل می‌کنیم. سپس دترمینان را بر حسب همان سطر (ستون) بسط می‌دهیم. در نتیجه دترمینان کاهش می‌یابد. این روش برای محاسبه‌ی دترمینانهای درجات بالاتر به کار می‌رود.

مثال مقدار دترمینان $|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}$ را بیابید.

حل در این دترمینان تمامی عناصر ستون اول بجز $a_{۱۱}$ را به صفر تبدیل می‌کنیم. برای این منظور اعمال $-R_۱ + R_۲$ و $-۲R_۱ + R_۳$ و $R_۱ + R_۴$ را انجام می‌دهیم، سپس بر حسب ستون اول بسط می‌دهیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & -۲ & -۱ & -۳ \\ ۰ & -۵ & -۲ & -۷ \\ ۰ & ۵ & ۳ & ۶ \end{vmatrix} = (+۱) \begin{vmatrix} -۲ & -۱ & -۳ \\ -۵ & -۲ & -۷ \\ ۵ & ۳ & ۶ \end{vmatrix}$$

$$= (۲۴ + ۴۵ + ۳۵) - (۳۰ + ۳۰ + ۴۲) = ۲$$

دترمینان دوم را به روش ساروس حل کرده‌ایم.

۸ـ۵۴ اگر در یک دترمینان عناصر یک سطر (ستون) دلخواهی را در کوفاکتورهای متناظر سطر (ستون) دیگری ضرب کنیم و حاصل‌ها را با هم جمع نماییم نتیجه صفر خواهد شد.

۸ـ۵۵ اگر A و B و C سه ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند به‌طوری که سطر (ستون) iام A مساوی با مجموع سطرهای (ستون‌های) iام ماتریس‌های B و C باشد و سایر سطرهای (ستون‌های) سه ماتریس برابر باشند، دراین‌صورت:

$$|A| = |B| + |C|$$

مثال مقدار $|A| = \begin{vmatrix} ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}$ را بیابید.

حل عناصر سطر اول را به‌صورت $\begin{bmatrix} ۱+۵ & ۱+۴ & ۱+۳ & ۱+۲ \end{bmatrix}$ می‌نویسیم و از ویژگی (۸ − ۵۵) استفاده می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ + ۰ = ۰$$

(در دترمینان سمت چپ، سطر سوّم دو برابر سطر اول است و در دترمینان سمت راست، سطر دوم دو برابر سطر اول است)

۵۶ـ۸ دترمینان حاصل‌ضرب دو ماتریس مربعی و هم درجه برابر است با حاصل‌ضرب دترمینانهای آن دو ماتریس، یعنی:

$$|AB| = |A||B|$$

نتیجه ۱. اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی n باشد، در این صورت داریم:

$$|AA'| \geqslant ۰$$

نتیجه ۲. اگر A و B ماتریس‌های مربعی و هم درجه باشند، داریم:

$$|AB| = |BA|$$

توجه دارید که در حالت کلی $AB = BA$ برقرار نیست.

تست اگر A و B دو ماتریس مربع، $AB = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$ و $|B| = ۸$ باشد، آنگاه $|A|$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۵

حل گزینه‌ی ۴.

$$|AB| = \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱۰ \end{vmatrix} = ۴۰ - ۰ = ۴۰ \;,\; |AB| = |A||B| \Longrightarrow ۴۰ = |A| \times ۸ \Longrightarrow |A| = ۵$$

۵۷ـ۸ اگر A ماتریسی مربع باشد، آنگاه برای هر عدد طبیعی n:

$$|A^n| = |A|^n$$

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $A^۳$ را بیابید.

حل

$$|A^۳| = |A|^۳ = (-۱ \times ۲ \times ۲)^۳ = (-۴)^۳ = -۶۴$$

تست ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض است، دترمینان ماتریس $A^۲A'$ کدام است؟

۱) ۶۰۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۳۳۱ ۴) ۹۶۸

حل گزینه‌ی ۳.

$$|A^۲A'| = |A^۲||A'| = |A|^۲|A'| = (۸ + ۳)^۲ \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۱۲۱ \times (۸ + ۳) =$$

دو کاربرد دترمینان

۸ـ۵۸ معادله‌ی خطی که از دو نقطه $A(a,b)$ و $B(c,d)$ می‌گذرد، عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۸ـ۵۹ اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ رأس‌های یک مثلث باشند، آنگاه مساحت مثلث ABC برابر است با قدرمطلق دترمینان زیر:

$$S = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

مثال اگر $A(۱,۲)$ و $B(۰,۵)$، $C(۰,۰)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را بیابید.

حل

$$S = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}(۱ \times ۵ \times ۱) = ۲/۵$$

ماتریس منفرد و غیر منفرد

۸ـ۶۰ ماتریس مربع A مفروض است:

۱) اگر دترمینان این ماتریس مخالف صفر باشد ($|A| \neq ۰$). ماتریس A را غیر منفرد نامند.

۲) اگر دترمینان این ماتریس مساوی صفر باشد ($|A| = ۰$)، ماتریس A را منفرد نامند.

تست به‌ازای چه مقدار k، ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ k-۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ منفرد است؟

۱) $k = ۳$ ۲) $k = ۲$ ۳) $k \neq ۳$ ۴) $k \neq ۲$

حل گزینه‌ی ۱.

$$|A| = ۰ \Longrightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ k-۱ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۰ + ۹ + ۲k - ۲) - (۰ + ۱۲ + ۱) = ۰ \Longrightarrow k = ۳$$

ماتریس همسازه و ماتریس الحاقی

۸ـ۶۱ اگر به‌جای هر عنصر ماتریس $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ همسازه‌ی نظیرش را قرار دهیم. ماتریس حاصل را ماتریس همسازه می‌نامیم و به $\text{cof. } A$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\boxed{\text{cof. } A = [(-1)^{i+j} M_{ij}]}$$

۸ـ۶۲ ترانهاده‌ی (ترانسپوزه) ماتریس همسازه را ماتریس الحاقی نامیده و به $\text{adj } A$ یا A^* نشان می‌دهیم و داریم:

$$\boxed{A^* = \text{adj } A = [(-1)^{i+j} M_{ji}]}$$

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد، داریم:

$$\text{cof. } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس همسازه و الحاقی را بیابید.

حل

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\ ,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1\ ,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\ ,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\ ,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

بنابراین:

$$\text{cof. } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸ـ۶۳ قضیه کوشی: اگر A یک ماتریس $n \times n$ بوده به‌طوری که $n > 1$ باشد، آنگاه:

$$\boxed{|\text{adj } A| = (|A|)^{n-1}}$$

تست دترمینان ماتریس الحاقی A کدام است؟ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد.

۱) ۲۹۵ ۲) ۹۲۵ ۳) ۹۵۲ ۴) ۴۸۴

حل گزینه‌ی ۴.

$$|A| = (۱ - ۱۵ + ۰) - (۲ + ۰ + ۶) = -۲۲$$
$$|adjA| = (-۲۲)^۲ = ۴۸۴$$

معکوس (وارون) یک ماتریس

۸ـ۶۴ تعریف: اگر A ماتریس $n \times n$ باشد و ماتریسی چون B وجود داشته باشد، به‌طوری که $AB = BA = I_n$، دراین صورت ماتریس B را معکوس A می‌نامند و می‌نویسند $B = A^{-۱}$. در این حالت A را معکوس‌پذیر می‌نامیم.

۸ـ۶۵ اگر $AB = BA = I$. A معکوس B است و B نیز معکوس A است، یعنی $B = A^{-۱}$ و $A = B^{-۱}$، پس

$$AB = BA = I_n \Longrightarrow AA^{-۱} = A^{-۱}A = I_n$$

مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض است. نشان دهید که ماتریس $B = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ معکوس ماتریس A است.

حل طبق تعریف کافی است $AB = BA = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix},$$
$$BA = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۸ـ۶۶ قضیه‌ی یکتایی معکوس: معکوس هر ماتریس، در صورت وجود منحصر به فرد است. یعنی اگر A دارای دو معکوس B و C باشد، آنگاه $B = C$ است.

مثال اگر I $(۳I+A)A = A(۳I+A) = I$ بلافاصله از قضیه‌ی یکتایی معکوس نتیجه می‌شود که $(۳I+A) = A^{-۱}$.

۸ـ۶۷ اگر k یک عدد حقیقی و ناصفر باشد، دراین‌صورت kI ماتریسی معکوس‌پذیر و معکوس آن $(\frac{۱}{k}I)$ است.

۸ـ۶۸ قضیه (شرط برقراری قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها): اگر A ماتریسی معکوس‌پذیر باشد و B و C دو ماتریس دلخواه باشند، به‌طوری که AB و AC تعریف شود، در این صورت داریم:

$$AB = AC \Longrightarrow B = C$$

نتیجه ۱. در حالت خاص، اگر $A = [k]$ ماتریسی ۱×۱ باشد و $k \neq ۰$، در این صورت، داریم:

$$kB = kC \Longrightarrow B = C$$

نتیجه ۲. اگر A ماتریس معکوس‌پذیر و داشته باشیم: $AB = \bar{O}$، در این صورت داریم: $B = \bar{O}$، زیرا

$$AB = \bar{O} \Longrightarrow AB = A\bar{O} \Longrightarrow B = \bar{O}$$

۸ـ۶۹ ماتریس مربع A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $|A| \neq ۰$. به عبارت دیگر ماتریس مربع A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر A غیرمنفرد باشد.

مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر نیست، زیرا $|A| = ۸ - ۸ = ۰$

تست به‌ازای چه مقدار m، ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & m & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر نیست؟

۱) $\frac{-۶}{۵}$ ۲) $\frac{-۵}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$|A| = ۰ \Longrightarrow \begin{vmatrix} ۱ & m & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۱ + ۰ - ۶m) - (۶ + ۰ + ۰) = ۰ \Longrightarrow m = \frac{-۵}{۶}$$

۸ـ۷۰ اگر $\operatorname{adj} A$ ماتریس الحاقی A باشد، همواره داریم:

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = |A| I$$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A \cdot \operatorname{adj} A$ کدام است؟

۱) $۳I$ ۲) $۵I$ ۳) $-۵I$ ۴) $۶I$

حل گزینه‌ی ۴.

$$|A| = (۰ - ۳ + ۴) - (۰ - ۶ + ۱) = ۶ \Longrightarrow A \cdot \operatorname{adj} A = ۶I$$

۸ـ۷۱ ماتریس برگردان: اگر معکوس ماتریسی برابر خودش باشد، آن ماتریس را ماتریس برگردان خوانند. ماتریس A، ماتریس برگردان است اگر و فقط اگر

$$(A - I_n)(A + I_n) = \bar{O}$$

۸ـ۷۲ درصورتی‌که ماتریس A معکوس‌پذیر باشد، برای پیدا کردن A^{-1}، دترمینان A را معکوس کرده و در ماتریس الحاقی آن ضرب می‌کنیم، یعنی

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A$$

مثال معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بیابید.

حل

$$|A| = (0 - 6 + 0) - (0 - 4 + 8) = -10$$

$$A_{11} = -8\,,\ A_{12} = 2\,,\ A_{13} = -2$$

$$A_{21} = 2\,,\ A_{22} = 2\,,\ A_{23} = -2$$

$$A_{31} = 8\,,\ A_{32} = -7\,,\ A_{33} = 2$$

$$\text{cof}\,A = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 8 & -7 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{adj}\,A = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -7 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\text{adj}\,A = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -7 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0/8 & -0/2 & -0/8 \\ -0/2 & -0/2 & 0/7 \\ 0/2 & 0/2 & -0/2 \end{bmatrix}$$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$، عنصر سطر سوم و ستون دوم ماتریس A^{-1} کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) صفر

حل گزینه‌ی ۱.

$$|A| = (0 + 0 + 2) - (0 + 0 - 6) = 8$$

می‌دانیم a_{32} عنصر مربوط به سطر دوم و ستون سوم ماتریس الحاقی A می‌باشد، بنابراین a_{23} عنصر متناظر در ماتریس همسازه است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0 - 2) = 2 \Longrightarrow A^{-1}_{32} = \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}$$

۸ـ۷۳ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس 2×2 و دلخواه باشد و $|A| \neq 0$، دراین‌صورت

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر معکوس ماتریس A کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۱.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۵-۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{مجموع عناصر } A^{-۱} = -۱$$

۸ـ۷۴ نکات مهم:

۱) معکوس هر ماتریس قطری D (در صورت وجود) یک ماتریس قطری است که عناصر واقع بر قطر اصلی آن معکوس عناصر واقع بر قطر اصلی ماتریس D است.

۲) معکوس هر ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) در صورت وجود یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) است.

۳) هر ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی)که تمام عناصر روی قطر اصلی آن ناصفر باشند، معکوس‌پذیر است.

مثال اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$، مجموع عناصر $A^{-۱}$ را بیابید.

حل ماتریس A معکوس‌پذیر است، زیرا $|A| = ۱۵ \neq ۰$، پس:

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{مجموع عناصر } A^{-۱} = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} = \frac{۲۳}{۱۵}$$

ویژگی‌های معکوس یک ماتریس

۸ـ۷۵ اگر A و B ماتریس‌های مربعی، هم درجه و معکوس‌پذیر باشند و λ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت ویژگی‌های زیر همگی برقرارند.

۱)

$$(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$$

این ویژگی در حالت کلی نیز برقرار و قابل تعمیم است، یعنی:

$$(A_۱A_۲\dots A_n)^{-۱} = A_n^{-۱}A_{n-۱}^{-۱}\cdot \dots \cdot A_۲^{-۱}\cdot A_۱^{-۱}$$

۲)

$$(\lambda A)^{-۱} = \frac{۱}{\lambda}A^{-۱}$$

۳) معکوس معکوس یک ماتریس مساوی ماتریس اصلی است، یعنی:

$$(A^{-۱})^{-۱} = A$$

۴) معکوس ترانهاده‌ی یک ماتریس برابر است با ترانهاده‌ی معکوس همان ماتریس، یعنی

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}$$

۵) توان منفی در ماتریس‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

۶) به‌ازای هر عدد طبیعی n ماتریس A^n نیز معکوس‌پذیر است، یعنی

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

۷) دترمینان معکوس یک ماتریس برابر با عکس دترمینان همان ماتریس است، یعنی

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

۸) اگر A ماتریسی پوچ توان از مرتبه‌ی n باشد، در این صورت $(I - A)$ معکوس‌پذیر و معکوس آن ماتریس $(I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})$ است.

۹) اگر A و B ماتریس‌های معکوس‌پذیر و تعویض‌پذیر باشند، آنگاه:

الف) A و B^{-1} تعویض‌پذیرند.

ب) A^{-1} و B تعویض‌پذیرند.

پ) A^{-1} و B^{-1} تعویض‌پذیرند.

۱۰) اگر A و B ماتریس‌های متقارن و وارون‌پذیر و تعویض‌پذیر باشند، آنگاه ماتریس‌های A^{-1} و B^{-1} و $A^{-1}B$ و AB^{-1} و $A^{-1}B^{-1}$ نیز متقارن‌اند.

۱۱) اگر A ماتریس $n \times n$ و هم‌درجه با ماتریس معکوس‌پذیر B باشد، آنگاه:

$$(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$$

۱۲) اگر A و B دو ماتریس معکوس‌پذیر و هم درجه باشند، آنگاه:

$$(AB)^* = B^*A^*$$

این ویژگی در حالت کلی نیز برقرار و قابل تعمیم است، یعنی،

$$(A_1A_2 \ldots A_n)^* = A_n^* \ldots A_2^*A_1^*$$

تست اگر X و Y ماتریس‌های معکوس‌پذیر باشند، حاصل $X^{-1}(X^{-1}+Y^{-1})^{-1}Y^{-1}$ کدام است؟

۱) $X+Y$ ۲) $X-Y$ ۳) $(X-Y)^{-1}$ ۴) $(X+Y)^{-1}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$X^{-1}(X^{-1}+Y^{-1})^{-1}Y^{-1}=[Y(X^{-1}+Y^{-1})X]^{-1}=(YX^{-1}X+YY^{-1}X)^{-1}$$
$$=(YI+IX)^{-1}=(Y+X)^{-1}$$

تست اگر A و B و C ماتریس‌های $n\times n$ و معکوس‌پذیر باشند و داشته باشیم $D=(A'CA)^{-1}A'CB^{-1}$ دراین‌صورت ماتریس D کدام است؟

۱) $A'B^{-1}$ ۲) AB ۳) $(AB)^{-1}$ ۴) $(BA)^{-1}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$D=(A'CA)^{-1}A'CB^{-1}=A^{-1}C^{-1}(A')^{-1}A'CB^{-1}=A^{-1}C^{-1}ICB^{-1}$$
$$=A^{-1}C^{-1}CB^{-1}=A^{-1}IB^{-1}=A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $C=A^{-1}B^{۲}A'$ باشند، $|C|$ پقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۹ ۳) -۱ ۴) -۹

حل گزینه‌ی ۲.

$$|C|=|A^{-1}||B^{۲}||A'|=\frac{۱}{|A|}|B|^{۲}|A|=|B|^{۲}=(۱+۲)^{۲}=۹$$

ماتریس متعامد

۸ـ۷۶ ماتریس حقیقی مربع A را ماتریس متعامد خوانند اگر معکوس آن برابر ترانهاده‌ی آن باشد. یعنی:

$$AA'=I_n\Longrightarrow A^{-1}=A'$$

مثال نشان دهید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ متعامد است.

حل

$$A\cdot A'=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

پس A متعامد است و داریم:

$$A^{-1}=A'=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

۸ـ۷۷ ویژگی‌های ماتریس متعامد

۱) حاصل ضرب دو ماتریس متعامد هم درجه، خود یک ماتریس متعامد است.

۲) معکوس یک ماتریس متعامد و ترانهاده‌ی یک ماتریس متعامد خود ماتریس‌های متعامدند.

۳) دترمینان یک ماتریس متعامد برابر (± ۱) است.

عملیات مقدماتی

۸ـ۷۸ اعمال زیر موسوم به عملیات مقدماتی است و هرگاه بر روی ماتریس A انجام گردد ماتریس جدیدی مانند B به‌دست می‌آید که آن را هم‌ارز ماتریس A نامیده و به $A \sim B$ نمایش می‌دهند.

۱) عناصر متناظر دو سطر نظیر به نظیر با هم عوض شود. این عمل را به R_{ij} نشان می‌دهیم[۱]. شبیه این عمل برای ستون‌ها را به C_{ij} نشان می‌دهیم[۲].

۲) هر یک از عناصر سطر iام در عددی مخالف صفر (k) ضرب شود، این عمل را به kR_i نشان می‌دهیم[۳]. شبیه این عمل برای ستون‌ها را به kC_j نشان می‌دهیم[۴].

۳) مضربی غیر از صفر از یک سطر به یک سطر دیگر اضافه گردد. این عمل را به $kR_i + R_j$ نشان نی‌دهیم.شبیه این عمل برای ستون‌ها به $kC_i + C_j$ نشان می‌دهیم.

۸ـ۷۹ سه عمل R_{ij}، kR_i، $kR_i + R_j$ موسوم به عملیات مقدماتی سطری و به عمل $kC_i + C_j, kC_j, C_{ij}$ موسوم به عملیات ستونی است.

مثال

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \underset{R_۲ - ۳R_۱}{\sim} \begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۷ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \underset{۲C_۲ + C_۳}{\sim} \begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۱۵ \\ ۳ & ۴ & ۹ \\ ۲ & ۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های به‌دست آمده با A هم‌ارزند.

مرتبه (رتبه) ماتریس

۸ـ۸۰ ماتریس A مفروض است، بنا به تعریف، درجه بزرگ‌ترین دترمینان (ازلحاظ درجه) استخراجی از ماتریس A را که مخالف صفر باشد مرتبه ماتریس A می‌نامند و به $r(A)$ نشان می‌دهند.

۸ـ۸۱ برای تعیین مرتبه ماتریس $A_{n\times n}$، ابتدا $|A|$ را محاسبه و درصورتی‌که $|A| \neq ۰$ باشد رتبه ماتریس n خواهد بود. اگر $|A| = ۰$ باشد و یکی از دترمینان‌های $(n-۱)\times(n-۱)$ برای ماتریس مذکور مخالف صفر باشد، رتبه ماتریس $(n-۱)$ خواهد بود، و در غیر این صورت یکی از دترمینان‌های $(n-۲)\times(n-۲)$ ماتریس مفروض را محاسبه و مشابه بالا نتیجه‌گیری می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه داده تا یکی از دترمینان‌های ماتریس A مخالف صفر باشد.

مثال مرتبه هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

$$۱)\ A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad ۲)\ B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

حل

۱)

$$|A| = (-۱ + ۸ + ۰) - (-۶ + ۰ + ۶) = ۷ \neq ۰$$

---

۱. یعنی عناصر سطر iام با عناصر سطر jام تعویض گردد.
۲. یعنی عناصر ستون iام با عناصر سطر jام تعویض گردد.
۳. یعنی هر یک از عناصر سطر iام در عدد مخالف صفر $k \in \mathbb{R}$ ضرب گردد.
۴. یعنی هر یک از عناصر ستون jام در عدد مخالف صفر $k \in \mathbb{R}$ ضرب گردد.

پس $r(A) = ۳$ است.

۲) چون ستون‌های اول و سوم این ماتریس متناسب است $(C_۳ = ۳C_۱)$، لذا داریم $|A| = ۰$ پس باید دترمینان‌های درجه‌ی ۲ را درنظر بگیریم. اگر حداقل یکی از این دترمینانها مخالف صفر باشد مرتبه ماتریس B دومی باشد. مثلاً داریم

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} = ۴ + ۲ = ۶ \neq ۰ \Longrightarrow r(B) = ۲$$

۸ـ۸۲ انجام هر یک از اعمال مقدماتی باعث تغییر مرتبه‌ی ماتریس نمی‌گردد یا به تعبیری دیگر ماتریس‌های هم‌ارز، دارای مرتبه یکسانی می‌باشند.

۸ـ۸۳ نکات مهم:

۱) اگر A ماتریسی قطری باشد، $r(A)$ مساوی تعداد عناصر غیر صفر قطری است.

۲) در حالت خاص $r(I_n) = n$.

۳) اگر A' ترانهاده‌ی ماتریس A باشد، آنگاه $r(A) = r(A')$.

۴) اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، آنگاه $۰ \leqslant r(A) \leqslant \min(m, n)$

۵) اگر A و B ماتریس هم درجه باشند، آنگاه $r(A + B) \leqslant r(A) + r(B)$.

۶) اگر $A \cdot B$ قابل تعریف باشد، آنگاه $r(A \cdot B) \leqslant \min[r(A), r(B)]$

۷) اگر ماتریس مربع B غیر منفرد باشد، آنگاه $r(A \cdot B) = r(A)$. این رابطه قابل تعمیم است.یعنی اگر ماتریس‌های B و C غیر منفرد باشند، آنگاه $r(A \cdot B \cdot C) = r(A)$.

۸) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد: اگر A غیرمنفرد باشد، آنگاه $r(A) = n$ و اگر A منفرد باشد، آنگاه $r(A) < n$.

۹) اگر $|A| \neq ۰$ باشد، $r(A^{-۱}A) = n$ و اگر $|A| = ۰$ باشد، $r(A^{-۱} \cdot A) < n$.توجه داشته باشید که $A^{-۱}A = I_n$.

۱۰) مرتبه یک ماتریس برابر است با مینیمم تعداد سطرهای مستقل خطی و یا تعداد ستون‌های مستقل خطی.

مثال مرتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۶ & ۱ & ۳ & ۸ \\ ۴ & ۲ & ۶ & -۱ \\ ۱۰ & ۳ & ۹ & ۷ \\ ۱۶ & ۴ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل ستون سوم، ۳ برابر ستون دوم است:

$$(۳, ۶, ۹, ۱۲) = ۳(۱, ۲, ۳, ۴)$$

لذا تعداد ستون‌های مستقل خطی برابر ۳ می‌باشد. سطر چهارم برابر است با مجموع سطرهای اول و سوم

$$(۶, ۱, ۳, ۸) + (۱۰, ۳, ۹, ۷) = (۱۶, ۴, ۱۲, ۱۵)$$

و سطر سوم برابر است با مجموع سطرهای اول و دوم:

$$(۶, ۱, ۳, ۸) + (۴, ۲, ۶, -۱) = (۱۰, ۳, ۹, ۷)$$

لذا تعداد سطرهای مستقل برابر ۲ است. بنابراین، با توجه به نکته‌ی (۱۰) مرتبه ماتریس $r(A) = ۲$ می‌باشد.

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، مرتبه‌ی ماتریس $A^{-۱} \cdot A$ را بیابید.

حل ماتریس A بالا مثلثی است، پس $|A| = -۱ \times ۱ \times ۱ = -۱$، با توجه به نکته‌ی (۹) داریم: $r(A^{-۱} \cdot A) = n = ۳$.

تست مرتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۳. با توجه به نکته‌ی (۱)، $r(A) = ۳$.

دستگاه معادلات خطی

۸ـ۸۴ معادله‌ی خطی: هر معادله به‌صورت $a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \cdots + a_nx_n = b$ را یک معادله خطی با n مجهول می‌نامیم. اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ را ضرایب، $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ را مجهولات و عدد حقیقی b را مقدار ثابت یا معلوم نام‌گذاری می‌کنیم.

۸ـ۸۵ دستگاه معادلات خطی: یک یا چند معادله‌ی خطی که به دنبال جواب‌های مشترکی برای آن‌ها باشیم، اصطلاحاً یک دستگاه معادلات خطی تشکیل می‌دهند.

مثال یک دستگاه دو معادله و دو مجهول به‌صورت $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ و یا یک دستگاه سه‌معادله سه مجهول به‌صورت $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ نمایش داده می‌شود.

۸ـ۸۶ معادلات و دستگاه‌های همگن و غیرهمگن: هر معادله خطی که در آن مقدار ثابت (یعنی b) برابر با صفر باشد، یک معادله‌ی خطی همگن و اگر $b \neq ۰$، آن معادله را غیر همگن می‌نامیم. دستگاهی که همه‌ی معادلات آن همگن باشند یک دستگاه معادلات همگن و درصورتی‌که حداقل یکی از معادله‌های دستگاه ناهمگن باشند، آن را یک دستگاه معادلات ناهمگن می‌نامیم.

مثال به دستگاه‌های زیر توجه کنید:

۱) $\begin{cases} x + ۲y = ۰ \\ ۲x - y = ۰ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x + y - z = ۱ \\ x - y + ۲z = ۰ \\ x + z = ۰ \end{cases}$

دستگاه (۱) همگن و دو معادله دو مجهول، دستگاه (۲) ناهمگن و سه معادله سه مجهول است.

۸ـ۸۷ حل دستگاه: منظور از حل یک دستگاه یافتن عدد یا اعداد حقیقی است که اگر به جای مجهول‌ها در تمام معادلات دستگاه قرار دهیم، صدق کنند.

مثال $x=۱$، $y=۲$ و $z=۰$ یک دسته جواب برای $\begin{cases} x+y+z=۳ \\ x-y=-۱ \\ y+z=۲ \end{cases}$ است، زیرا $x=۱$، $y=۲$ و $z=۰$ در هر سه معادله صدق می‌کند.

۸ـ۸۸ اگر دستگاه خطی جواب داشته باشد، می‌گوییم سازگار است، چنانچه جواب نداشته باشد، آن را ناسازگار خوانیم.

۸ـ۸۹ هر معادله‌ی خطی، بسته به این که در چه فضایی ($\mathbb{R}^۲$ یا $\mathbb{R}^۳$) مورد بررسی قرار بگیرد، شکل خاصی ایجاد می‌کند. برای مثال، معادله‌ی خطی $ax+by=۰$ در $\mathbb{R}^۲$ یک خط و در $\mathbb{R}^۳$ یک صفحه را مشخص می‌کند، اکنون با توجه به این مطلب، به ارائه و بررسی روش‌های حل دستگاه‌های معادلات خطی می‌پردازیم و برای هر یک، تعبیر هندسی و روش حل بیان می‌کنیم:

دستگاه دو معادله دو مجهول

۸ـ۹۰ دستگاهی به‌صورت $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ که فقط شامل دو معادله با دو مجهول است.

۸ـ۹۱ یکی از راه حل‌های یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، حذف یکی از مجهول‌ها بین دو معادله است. برای این کار معمولاً معادله‌ها را در عددی ضرب میکنیم تا ضرایب یکی از مجهول‌ها در دو معادله قرینه یکدیگر شوند و سپس دو معادله را با هم جمع می‌کنیم. با قرار دادن مقدار به‌دست آمده برای یکی از مجهول‌ها، مجهول دیگر را پیدا می‌کنیم.

مثال دستگاه $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ x+y=۰ \end{cases}$ را حل کنید.

حل

$$\begin{cases} x-۲y=۳ \\ x+y=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-۲y=۳ \\ ۲x+۲y=۰ \end{cases} \Longrightarrow ۳x=۳ \Longrightarrow x=۱\ ,\ y=-۱$$

۸ـ۹۲ از نظر هندسی، یافتن یک جواب برای چنین دستگاهی معادل است با یافتن نقطه‌ای که روی هر دو خط واقع باشد. این دستگاه در $\mathbb{R}^۲$ یا جواب ندارد یا یک جواب منحصر به فرد و یا تعداد نامتناهی جواب دارد، یعنی:

۱) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، در این صورت دو خط یکدیگر را در یک نقطه می‌کنند، و دستگاه جواب دارد.

۲) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد، در این صورت دو خط موازی یکدیگرند، دستگاه فاقد جواب است.

۳) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، در این صورت دو خط بر یکدیگر منطبق می‌شوند، و دستگاه تعداد نامتناهی جواب دارد.

مثال اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases}$ جواب نداشته، m چه‌قدر است؟

حل

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\Longrightarrow\frac{۲}{m-۱}=\frac{m}{۱}\neq\frac{۱}{۳}\Longrightarrow m^{۲}-m-۲=۰\Longrightarrow m=-۱,۲$$

دستگاه سه معادله و سه مجهول

۸ـ۹۳ دستگاهی به‌صورت زیر که فقط شامل سه معادله با سه مجهول است:

$$\begin{cases}ax+by+cz=d\\a'x+b'y+c'z=d'\\a''x+b''y+c''z=d''\end{cases}$$

۸ـ۹۴ برای حل یک دستگاه شامل سه معادله و سه مجهول، ابتدا در دو جفت از معادله‌ها یکی از مجهول‌ها را حذف می‌کنیم و سپس دو معادله‌ی به‌دست آمده را مانند یک دستگاه دو معادله و دو مجهول حل می‌کنیم. با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده برای دو مجهولی که از مرحله‌ی اول به‌دست می‌آید، مجهول را پیدا می‌کنیم.

مثال دستگاه $\begin{cases}x+y-z=۱\\x+۲y+z=۴\\x-y+۲z=۲\end{cases}$ را حل کنید.

حل مثلاً مجهول z را حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases}x+y-z=۱\\x+۲y+z=۴\end{cases}\Longrightarrow ۲x+۳y=۵$$

$$\begin{cases}x+y-z=۱\\x-y+۲z=۲\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}۲x+۲y-۲z=۲\\x-y+۲z=۲\end{cases}\Longrightarrow ۳x+y=۴$$

در نتیجه:

$$\begin{cases}۲x+۳y=۵\\۳x+y=۴\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}۲x+۳y=۵\\-۹x-۳y=-۱۲\end{cases}\Longrightarrow -۷x=-۷\Longrightarrow x=۱,\ y=۱$$

$$\Longrightarrow ۱+۱-z=۱\Longrightarrow z=۱$$

۸ـ۹۵ از نظر هندسی یافتن یک جواب برای چنین دستگاهی معادل است با یافتن نقطه‌ای که روی هر یک از سه صفحه واقع باشد. بنابراین این دستگاه یا فاقد جواب است، یا تعداد نامتناهی جواب دارد، یا جواب منحصر به فرد دارد. برای بررسی سه حالت اخیر، ابتدا در دو جفت از معادله‌ها یکی از مجهول‌ها را حذف می‌کنیم، در دو معادله‌ی به‌دست آمده مطابق آنچه در (۸ − ۹۱) آمد، عمل می‌کنیم.

مثال اگر دستگاه $\begin{cases}mx-۲y+z=۱۴\\x-y+z=۶\\۳x-z=۱\end{cases}$ فاقد جواب باشد، m را بیابید.

حل بین معادله‌های (۱) و (۲) متغیر y را می‌کنیم:

$$-۲\times\begin{cases} mx-۲y+z=۱۴ \\ x-y+z=۶ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} mx-۲y+z=۱۴ \\ -۲x+۲y-۲z=-۱۲ \end{cases} \Longrightarrow (m-۲)x-z=۲$$

بنابراین در دستگاه دو معادله دو مجهول زیر شرط فاقد جواب بودن را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} (m-۲)x-z=۲ \\ ۳x-z=۱ \end{cases} \Longrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \Longrightarrow \frac{m-۲}{۳}=\frac{-۱}{-۱}\neq\frac{۲}{۱} \Longrightarrow m=۵$$

تست دستگاه معادله خطی $\begin{cases} ۴x+۳y+۲z=۳ \\ x-۲y+z=۲ \\ ۳x+y-z=۱ \end{cases}$ دارای چند جواب است؟

۱) یک جواب منحصر به فرد دارد
۲) حداقل یک جواب
۳) بی‌نهایت جواب
۴) دستگاه جواب ندارد

حل گزینه‌ی ۱. مثلاً متغیر z را حذف می‌کنیم

$$-۲\times\begin{cases} ۴x+۳y+۲z=۳ \\ x-۲y+z=۲ \end{cases} \Longrightarrow ۲x+۷y=-۱$$

$$\begin{cases} x-۲y+z=۲ \\ ۳x+y-z=۱ \end{cases} \Longrightarrow ۴x-y=۳$$

پس:

$$\begin{cases} ۲x+۷y=-۱ \\ ۴x-y=۳ \end{cases} \Longrightarrow \frac{۲}{۴}\neq\frac{۷}{-۱} \Longrightarrow \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'} \Longrightarrow$$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد

دستگاه دو معادله و سه مجهول

۸ـ۹۶ دستگاهی به‌صورت زیر که فقط شامل دو معادله و سه مجهول است.

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

۸ـ۹۷ از نظر هندسی یافتن یک جواب برای چنین دستگاهی معادل است با یافتن نقطه‌ای که روی هر یک از دو صفحه واقع باشد، بنابراین، این دستگاه یا فاقد جواب است یا تعداد نامتناهی جواب دارد، یعنی:

۱) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$ باشد، و به عبارت دیگر، اگر دو صفحه موازی باشند، دستگاه فاقد جواب است.

۲) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ باشد و به عبارت دیگر، اگر دو صفحه منطبق بر هم باشند (دو معادله قابل تبدیل به یک معادله باشند) دستگاه دارای تعداد نامتناهی جواب است.

۳) در غیر این دو صورت، دو صفحه متقاطع‌اند، و دستگاه دارای تعداد نامتناهی جواب است. در واقع، محل تلاقی دو صفحه همواره یک خط راست است و روی یک خط، تعداد نامتناهی نقطه قرار دارد.

تست در مورد دستگاه $\begin{cases} x-y+z=۲ \\ -۲x+۲y-۲z=۴ \end{cases}$ چه می‌توان گفت؟

۱) دستگاه جواب ندارد.
۲) دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.
۳) یک جواب منحصر به فرد دارد.
۴) دستگاه حداقل یک جواب دارد.

حل گزینه‌ی ۱.

$$\frac{۱}{-۲}=\frac{-۱}{۲}=\frac{۱}{-۲}\neq\frac{۲}{۴}\Longrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}\Longrightarrow \text{دستگاه جواب ندارد}$$

دستگاه سه معادله و دو مجهول

۸ـ۹۸ دستگاهی به‌صورت زیر که فقط شامل سه معادله و دو مجهول است:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$$

۸ـ۹۹ ازنظر هندسی یافتن یک جواب برای چنین دستگاهی معادل است با یافتن نقطه‌ای که روی هر سه خط واقع باشد. بنابراین، این دستگاه یا جواب ندارد و یا فقط یک جواب دارد و تنها در حالتی که هر سه خط بر هم منطبق باشند، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۸ـ۱۰۰ برای حل دستگاه شامل دو مجهول و بیش از دو معادله، ابتدا دو تا از معادله‌ها را در یک دستگاه حل می‌کنیم، دستگاه به شرطی دارای جواب است که جواب‌های به‌دست آمده از دو معادله‌ی اول در دیگر معادله‌ها صدق کند.

مثال دستگاه $\begin{cases} x-۳y=-۲ \\ x+۵y=۶ \\ x+۳y=۴ \end{cases}$ را حل کنید.

حل

$$\begin{cases} x-۳y=-۲ \\ x+۳y=۴ \end{cases}\Longrightarrow ۲x=۲\Longrightarrow x=۱\ ,\ y=۱$$

چون $(x=۱, y=۱)$ در معادله‌ی دیگر $(x+۵y=۶)$ صدق می‌کند، پس دستگاه دارای جواب است.

تست به‌ازای کدام مقادیر m دستگاه $\begin{cases} x+۲y=۵ \\ x+y=m^۲+m+۲ \\ x+y=۴ \end{cases}$ دارای جواب (سازگار) است؟

۱) $۳,-۴$ ۲) $۲,-۳$ ۳) $-۲,۱$ ۴) $-۱,۲$

حل گزینه‌ی ۳. با حل معادله‌ی اول و سوم دستگاه داریم:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+y=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x-2y=-5 \\ x+y=4 \end{cases} \Longrightarrow y=1\ ,\ x=3$$

در معادله‌ی دوم جاگذاری می‌کنیم:

$$3+1=m^2+m+2 \Longrightarrow m^2+m-2=0 \Longrightarrow (m+2)(m-1)=0 \Longrightarrow m=1\ ,\ -2$$

دستگاه معادلات خطی m معادله n مجهول

۸ـ۱۰۱ مجموعه‌ی m معادله‌ی خطی از n مجهول $x_1, x_2, \ldots, x_n$ به‌صورت زیر را یک دستگاه معادلات خطی می‌نامند.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

شکل ماتریسی دستگاه (۱) به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2) \qquad \text{یا} \qquad AX = B \qquad (3)$$

ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ موسوم به ماتریس ضرایب است، و بردار $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ ماتریس مجهولات و $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)'$ ماتریس اعداد معلوم (ثابت) است.

مثال دستگاه $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+y+3z=6 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ را می‌توان به صورت $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ نوشت.

۸ـ۱۰۲ بردار $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ جواب دستگاه (۱) است. هرگاه X^* در تمامی m معادله‌ی خطی دستگاه (۱) صدق کند. اگر برای دستگاه (۱)، X^* وجود داشته باشد دستگاه را سازگار نامند و اگر X^* وجود نداشته باشد دستگاه را ناسازگار خوانند یک دستگاه سازگار ممکن است یک دسته جواب مانند X^* و یا دارای بی‌نهایت دسته جواب باشد. با انجام هر یک از اعمال زیر روی یک دستگاه یک دستگاه هم ارز[1] با دستگاه اول به‌دست می‌آید.

۱) تعویض جای دو معادله با یکدیگر.

۲) ضرب یک معادله در یک عدد حقیقی ناصفر

۳) افزودن مضربی از معادله‌ی iام به معادله jام و جایگزین کردن آن به جای معادله jام.

---

۱. دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز می‌نامیم، هرگاه دارای جواب‌های یکسان باشند.

۸ـ۱۰۳ در دستگاه m معادله n مجهولی $AX = B$.

۱) اگر تعداد مجهولات بیش از تعداد معادلات باشد $(n > m)$ دستگاه یا جواب ندارد و یا بی‌شمار جواب دارد و دستگاه هیچگاه جواب منحصر به فرد ندارد.

۲) اگر تعداد معادلات بیش از تعداد مجهولات باشد $(m > n)$ آنگاه یک ماتریس $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ وجود دارد که به‌ازای آن دستگاه جواب ندارد.

۸ـ۱۰۴ ماتریس افزوده: به ماتریسی که شامل ماتریس ضرایب یک دستگاه و یک ستون اضافی یعنی ماتریس ستونی معلومات دستگاه باشد، ماتریس افزوده گفته می‌شود.

مثال ماتریس افزوده‌ی دستگاه $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x - 3y + 2z = 14 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases}$ عبارت است از $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$.

۸ـ۱۰۵ روش حذفی گاوس برای حل دستگاه‌ها: در این روش با استفاده از این خاصیت که انجام اعمال سطری مقدماتی روی معادلات دستگاه، تأثیری در جواب ندارد، دستگاه مربوطه را به یک دستگاه ساده‌تر تبدیل می‌کنند. یعنی ماتریس افزوده‌ی $[A|B]$ را با اعمال سطری مقدماتی به ساده‌ترین صورت ممکن در می‌آورند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال دستگاه معادلات $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + 2z = 14 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases}$ را حل کنید.

حل

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -7y - 4z = 2 \\ -5y - 10z = -20 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -7y - 4z = 2 \\ y + 2z = 4 \end{cases} \Longrightarrow y = -2\ ,\ z = 3 \Longrightarrow x = 1$$

۸ـ۱۰۶ بحث در تعداد جواب‌های دستگاه معادلات خطی: خلاصه زیر مربوط به جواب دستگاه معادلات خطی $AX = B$ برای حالت کلی m معادله و n مجهول و هم‌چنین حالت خاص n معادله و n مجهول است. ماتریس افزوده‌ی $[A|B]$ را تشکیل می‌دهیم، با عملیات سطری مقدماتی (در صورت نیاز) مقادیر $r(A)$ و $r(A|B)$ مشخص می‌گردد.

۱) اگر $r(A) \neq r(A|B)$ باشد، دستگاه ناسازگار و فاقد جواب است.

۲) اگر $r(A) = r(A|B)$ باشد، دستگاه سازگار و حداقل یک دسته جواب دارد.

۳) اگر $r(A) = r(A|B) = n$ باشد، دستگاه سازگار و یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

۴) اگر $r(A) = r(A|B) < n$ باشد، دستگاه سازگار و تعداد بی‌نهایت دسته جواب دارد.

تست تعداد جواب‌های دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ کدام است؟

۱) فاقد جواب است.
۲) حداقل یک دسته جواب دارد.
۳) یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.
۴) بی‌نهایت دسته جواب دارد.

حل گزینه‌ی ۳.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۴ & -۲\end{bmatrix}\Longrightarrow |A|=(-۴-۲-۴)-(۴-۲+۴)=-۱۶\neq ۰\Longrightarrow r(A)=۳$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}۱ & ۱ & ۱ & ۶\\ ۱ & ۲ & -۱ & ۱۰\\ ۲ & -۴ & -۲ & ۵\end{array}\right]\Longrightarrow \begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۶\\ ۱ & ۲ & ۱۰\\ ۲ & -۴ & ۵\end{vmatrix}=۱۷\neq ۰\Longrightarrow r(A|B)=۳$$

$r(A)=r(A|B)$ می‌باشد، پس دستگاه سازگار و یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

حل دستگاه n معادله n مجهول

۱۰۷ـ۸ با استفاده از دستور کرامر: در دستگاه (۱) فرض می‌کنیم $m=n$ باشد. به روش کرامر از دستورهای $x_۱=\frac{|A_۱|}{|A|}$، $x_۲=\frac{|A_۲|}{|A|}$ و ... و $x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$ که در آن‌ها $|A|$ دترمینان ضرایب دستگاه بوده ($|A|\neq ۰$) و $|A_۱|$ و $|A_۲|$ و ... و $|A_n|$ را دترمینان‌های متناظر با مجهولات $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n می‌نامند و برای تعیین هر یک از آن‌ها کافی است در دترمینان ضرایب دستگاه ستونی را که متناظر با آن مجهول بوده حذف کنیم و جای آن ماتریس مقادیر را قرار دهیم.

مثال دستگاه معادلات $\begin{cases}x_۱+x_۲+x_۳=۴\\ x_۱-x_۲+x_۳=۲\\ x_۱-۳x_۲+۲x_۳=۲\end{cases}$ را حل کنید.

حل

$$|A|=\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۱ & -۳ & ۲\end{vmatrix}=-۲\quad,\quad |A_۱|=\begin{vmatrix}۴ & ۱ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۲ & -۳ & ۲\end{vmatrix}=-۲$$

$$|A_۲|=\begin{vmatrix}۱ & ۴ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۲\end{vmatrix}=-۲\quad,\quad |A_۳|=\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & ۲\\ ۱ & -۳ & ۲\end{vmatrix}=-۴$$

خواهیم داشت:

$$x_۱=\frac{|A_۱|}{|A|}=\frac{-۲}{-۲}=۱\ ,\ x_۲=\frac{|A_۲|}{|A|}=\frac{-۲}{-۲}=۱\ ,\ x_۳=\frac{|A_۳|}{|A|}=\frac{-۴}{-۲}=۲$$

۱۰۸ـ۸ با استفاده از معکوس ماتریس‌ها: در دستگاه (۱) فرض می‌کنیم $m=n$ باشد، آن را به‌صورت $AX=B$ می‌نویسیم، که در آن A ماتریس مربع $n\times n$ و بردارهای X و B ستونی $n\times ۱$ است. اگر $|A|\neq ۰$ در این صورت A دارای معکوس $A^{-۱}$ خواهد بود. اگر طرفین $AX=B$ را در ماتریس $A^{-۱}$ ضرب کنیم، داریم $A^{-۱}AX=A^{-۱}B$ و در نتیجه $X=A^{-۱}B$ از این رابطه X را می‌توان به‌دست آورد.

مثال دستگاه معادلات $\begin{cases} ۵x - ۳y = ۹ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases}$ را حل کنید.

حل

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ \\ ۸ \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = ۱۱ \Longrightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-۱}B \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ \\ ۸ \end{bmatrix} \Longrightarrow X = \frac{۱}{۱۱} \begin{bmatrix} ۳۳ \\ ۲۲ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$$

دستگاه معادلات همگن خطی

۸ـ۱۰۹ با توجه به این‌که یک دستگاه معادلات همگن دارای معادلاتی همگن است که همگی شامل مبدأ هستند و جواب بدیهی صفر در تمام آن‌ها صدق می‌کند. می‌توان گفت: این حالت که دستگاه فاقد جواب باشد، امکان‌پذیر نیست و حداقل جواب صفر یک جواب دستگاه خواهد بود و اگر غیر از جواب صفر هم جوابی برای دستگاه یافت شود، در واقع، تعداد نامتناهی جواب یافت خواهد شد که همان خطی است که از مبدأ گذشته و فصل مشترک صفحه‌هاست.

۸ـ۱۱۰ دستگاه معادلات همگن خطی به‌صورت $AX = \bar{O}$ در می‌آید. اگر ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده را در نظر بگیریم. داریم $[A|O]$ بدیهی است که $r(A) = r(A|O)$ یعنی دستگاه همگن $AX = \bar{O}$ همواره سازگار است. پس

۱) شرط لازم و کافی برای آن که یک دستگاه همگن فقط جواب منحصر به فرد صفر داشته باشد، آن است که $|A| \neq ۰$.

۲) شرط لازم و کافی برای آن که یک دستگاه همگن دارای تعداد نامتناهی جواب غیر صفر هم باشد، آن است که $|A| = ۰$.

مثال به‌ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y + ۲z = ۰ \\ x + ۲y + mz = ۰ \\ x - y - ۲z = ۰ \end{cases}$ جواب غیر صفر دارد؟

حل

$$|A| = ۰ \Longrightarrow \begin{vmatrix} m & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & m \\ ۱ & -۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow m^۲ - ۳m - ۴ = ۰ \Longrightarrow m = ۴ \text{ یا } m = -۱$$

معادله مفسر، مقادیر ویژه و امتدادهای یک ماتریس مربع

۸ـ۱۱۱ هرگاه X یک بردار و k عددی حقیقی باشد و A یک ماتریس مربع از درجه n باشد، به قسمی که $AX = kX$، در این‌صورت k را «مقدار ویژه (خاص)» و X را «بردار یا امتداد ویژه (خاص)» گویند. با توجه به این‌که $X = \bar{O}$ در معادله صدق می‌کند، داریم:

$$AX - kX = \bar{O} \Longrightarrow (A - kI)X = \bar{O} \qquad (۱)$$

رابطه‌ی (۱) یک دستگاه معادلات همگن است. شرط آن‌که این دستگاه جواب‌های غیربدیهی داشته باشد آن است که دترمینان ضرایب مجهولات دستگاه (۱) مساوی صفر باشد، یعنی:

$$|A - kI| = ۰ \qquad (۲)$$

رابطه‌ی (۲) موسوم به معادله‌ی مفسر ماتریس A است.

مثال معادله‌ی مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ را بیابید:

حل

$$A - kI = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-k & -۱ \\ -۱ & ۲-k \end{bmatrix}$$

$$|A - kI| = ۰ \Longrightarrow \begin{vmatrix} ۲-k & -۱ \\ -۱ & ۲-k \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۲-k)^۲ - ۱ = ۰ \Longrightarrow k^۲ - ۴k + ۳ = ۰$$

۸ـ۱۱۲ نحوه‌ی تعیین مقدار ویژه و بردار ویژه: فرم ماتریسی $AX = kX$ را به‌صورت دستگاه معادلات خطی درمی‌آوریم، یعنی:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n۱}x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_۱ \\ kx_۲ \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n = kx_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n = kx_۲ \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n۱}x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \cdots + a_{nn}x_n = kx_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (a_{۱۱}-k)x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n = ۰ \\ a_{۲۱}x_۱ + (a_{۲۲}-k)x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n = ۰ \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n۱}x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \cdots + (a_{nn}-k)x_n = ۰ \end{cases}$$

شرط وجود جواب برای دستگاه فوق آن است که دترمینان ضرایب دستگاه مساوی صفر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix} (a_{۱۱}-k) & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & (a_{۲۲}-k) & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & (a_{nn}-k) \end{vmatrix} = ۰$$

معادله‌ی فوق یک معادله‌ی درجه n است و دارای n ریشه $k_۱$ و $k_۲$ و ... و k_n است. در واقع ریشه‌های معادله فوق همان مقادیر ویژه هستند. یعنی یک ماتریس درجه n دارای n مقدار ویژه است. با جای‌گذاری این مقادیر ویژه در دستگاه معادلات n بردار ویژه به‌دست می‌آید.

مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ مفروض است. معادله‌ی مفسر، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به دست آورید.

حل

$$|A-kI|=۰ \Longrightarrow \begin{vmatrix}۴-k & ۱\\ -۲ & ۱-k\end{vmatrix}=۰ \Longrightarrow (۴-k)(۱-k)+۲=۰ \Longrightarrow k^۲-۵k+۶=۰$$

جواب‌های این معادله عبارتند از $k=۲$ و $k=۳$ که همان مقادیر ویژه هستند. بردارهای $k=۲$ و $k=۳$ جواب‌های ناصفر معادله‌ی $AX=kX$ است. اگر $X=\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}$ در این‌صورت:

$$\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}۴x_۱+x_۲=kx_۱\\ -۲x_۱+x_۲=kx_۲\end{cases} \xrightarrow{k=۲} \begin{cases}۲x_۱+x_۲=۰\\ -۲x_۱-x_۲=۰\end{cases}$$

جواب‌های این دستگاه عبارتند از کلیه نقاط واقع بر خط $x_۲=-۲x_۱$. پس بردار ویژه نظیر $k=۲$ عبارت است از $\{(x_۱,x_۲)|x_۲=-۲x_۱\}$. به‌طور مشابه برای $k=۳$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x_۱+x_۲=۰\\ -۲x_۱-۲x_۲=۰\end{cases}$$

جواب‌های این دستگاه عبارتند از کلیه نقاط واقع بر خط $x_۲=-x_۱$. پس بردار ویژه نظیر $k=۳$ عبارت است از $\{(x_۱,x_۲)|x_۲=-x_۱\}$.

تست مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۳ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $۲,-۱,۱$ ۲) $-۲,-۱,۱$ ۳) $۲,۱$ ۴) $۲,-۱$

حل گزینه‌ی ۱.

$$|A-kI|=۰ \Longrightarrow \begin{vmatrix}۲-k & ۱ & ۰\\ ۰ & ۱-k & ۰\\ -۳ & -۱ & -۱-k\end{vmatrix}=۰ \Longrightarrow (۲-k)(۱-k)(-۱-k)=۰$$
$$\Longrightarrow k_۱=۲\ ,\ k_۲=۱\ ,\ k_۳=-۱$$

صورت کلی معادله مفسر یک ماتریس ۲ × ۲ و ۳ × ۳

۸ـ۱۱۳ معادله مفسر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ برابر است با:

$$k^۲-(a+d)k+(ad-bc)=۰$$

می‌دانیم trA، مجموع عناصر واقع بر قطر اصلی است، یعنی $trA = a + d$ و هم‌چنین $|A| = ad - bc$ بنابراین فرم دیگر معادله مفسر ماتریس A عبارت است از:

$$k^۲ - (trA)k + |A| = ۰$$

در نتیجه اگر $k_۱$ و $k_۲$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند، آنگاه:

$$\text{مجموع مقادیر ویژه } A = k_۱ + k_۲ = trA = a + d$$
$$\text{حاصل‌ضرب مقادیر ویژه } A = k_۱.k_۲ = |A| = ad - bc$$

مثال معادله‌ی مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل

$$k^۲ - (\text{tr}\, A)k + |A| = ۰ \Longrightarrow k^۲ - (۱ + ۲)k + (۲ + ۳) = ۰ \Longrightarrow k^۲ - ۳k + ۵ = ۰$$

تست مجموع مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۵ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۳ ۳) ۱۱ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۲.

$$\text{مجموع مقادیر ویژه‌ی } A = k_۱ + k_۲ = \text{tr}\, A = -۱ + ۴ = ۳$$

تست اگر حاصل‌ضرب مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ برابر ۵ باشد، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۳.

$$\text{حاصل ضرب مقادیر ویژه‌ی } A = ۵ \Longrightarrow |A| = ۵ \Longrightarrow m - (-۲) = ۵ \Longrightarrow m = ۳$$

۸ـ۱۱۴ معادله‌ی مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$k^۳ - (\text{tr}\, A)k^۲ + \left(\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} \right) k - |A| = ۰$$

در نتیجه اگر k_1 و k_2 و k_3 مقادیر ویژه ماتریس A باشد، آنگاه:

$$\text{مجموع مقادیر ویژه } A = k_1 + k_2 + k_3 = trA$$
$$\text{حاصل‌ضرب مقادیر ویژه } A = k_1.k_2.k_3 = |A|$$

مثال معادله‌ی مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ & ۴ \\ -۷ & -۳ & -۱ \\ ۷ & ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل

$$k^3 - (۷ - ۳ + ۲)k^2 + \left(\begin{vmatrix} ۵ & ۴ \\ -۷ & -۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۵ & ۴ \\ -۷ & -۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -۳ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{vmatrix}\right) k - \begin{vmatrix} ۵ & ۴ & ۴ \\ -۷ & -۳ & -۱ \\ ۷ & ۴ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$$

$$k^3 - ۷k^2 + (-۱۵ + ۲۸ - ۵ + ۲۸ - ۶ + ۴)k - [(-۳۰ - ۱۱۲ - ۲۸) - (-۸۴ - ۲۰ - ۵۶)] = ۰$$

$$k^3 - ۷k^2 + ۳۴k - ۱۰ = ۰ \quad \text{معادله‌ی مفسر}$$

۱۱۵ـ۸ خواص معادله مفسر، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

۱) مجموع مقادیر ویژه‌ی هر ماتریس مربع A برابر است با $\text{tr } A$.

۲) حاصل‌ضرب مقادیر ویژه‌ی هر ماتریس مربع A برابر است با $|A|$.

۳) مقادیر ویژه یک ماتریس قطری، همان عناصر واقع بر قطر اصلی ماتریس است.

۴) مقادیر ویژه یک ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) همان عناصر واقع بر قطر اصلی ماتریس است.

۵) هر ماتریس مربع در معادله‌ی مفسرش صدق می‌کند (قضیه کیلی‌ـهامیلتون).

۶) ماتریس A معکوس‌پذیر است، اگر و تنها اگر همه‌ی مقادیر ویژه‌اش مخالف صفر باشد.

۷) اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد و k_1 و k_2 و ...مقادیر ویژه‌ی آن باشند، آنگاه $\frac{۱}{k_1}$، $\frac{۱}{k_2}$ و ...مقادیر ویژه‌ی ماتریس A^{-1} است.

۸) درحالت‌کلی اگر k_1 و k_2 و ...مقادیر ویژه‌ی ماتریس A باشند، دراین‌صورت:

الف) مقادیر ویژه‌ی nA عبارتند از: nk_1، nk_2 و ....

ب) مقادیر ویژه‌ی A^n عبارتند از: k_1^n، k_2^n و ....

پ) مقادیر ویژه‌ی $A + nI$ عبارتند از: $k_1 + n$ و $k_2 + n$ و ....

۹) مقادیر ویژه A و A' یکسان هستند.

۱۰) مقادیر ویژه هر ماتریس متقارن اعداد حقیقی‌اند.

۱۱) اگر ماتریس A متقارن باشد و k_1 و k_2 دو مقدار ویژه‌ی متمایز باشند، امتدادهای ویژه نظیر k_1 و k_2 بر هم عمودند.

۱۲) اگر k_1 و k_2 و ...و k_n ریشه‌های مجزای معادله مفسر ماتریس مربع A باشد، و اگر X_1 و X_2 و ...و X_n بردارهای ویژه غیرصفر متناظر k_iها باشند در این‌صورت X_iها مستقل خطی‌اند.

۱۳) اگر دو ماتریس متشابه باشند[۱]، دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند.

---

۱. دو ماتریس مربع A و B را متشابه گویند، اگر ماتریس غیرمنفرد مربع از همان درجه مانند R وجود داشته باشد، به‌طوری که داشته باشیم: $B = R^{-1}.A.R$

تست یکی از ریشه‌های معادله‌ی مفسر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) ۰

حل گزینه‌ی ۲. ماتریس A پایین مثلثی است، طبق ویژگی (۴) مقادیر ویژه (ریشه‌های معادله‌ی مفسر) آن عبارتند از: $۱, ۲, ۳$.

تست اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، آنگاه مقادیر ویژه‌ی ماتریس A' کدام است؟

۱) $۲, ۱, ۰$ ۲) $۱, ۲, -۱$ ۳) $۲, -۱, ۰$ ۴) $۱, -۲, -۱$

حل گزینه‌ی ۲. ماتریس A قطری است، طبق ویژگی (۳) مقادیر ویژه‌ی آن -۱، ۲ و ۱ می‌باشد. و طبق ویژگی (۸) مقادیر ویژه‌ی A و A' یکسان هستند.

فرم‌های درجه‌ی دوم

۸ـ۱۱۶ هر عبارت درجه‌ی دوم همگن به‌صورت زیر را یک فرم درجه‌ی دوم n متغیره می‌خوانند.

$$q(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = X'AX$$

که درآن $X' = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ بوده و $A = [a_{ij}]$. ماتریس از درجه n است و A را ماتریس فرم درجه دوم گویند. مثلاً به‌ازای $n = ۲$، داریم:

$$q(x_۱, x_۲) = a_{۱۱}x_۱^۲ + a_{۱۲}x_۱x_۲ + a_{۱}x_۲x_۱ + a_{۲۲}x_۲^۲ = [x_۱, x_۲] \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

۸ـ۱۱۷ ماتریس A را که ماتریس فرم درجه‌ی دوم است درنظر می‌گیریم بنابه تعریف مرتبه‌ی A را مرتبه فرم درجه دوم می‌گویند اگر $r(A) < n$ باشد، فرم درجه‌ی دوم را منفرد خوانند، به عبارت دیگر اگر ماتریس A منفرد باشد فرم درجه‌ی دوم را نیز منفرد گویند و در غیراین‌صورت آن را غیر منفرد گویند.

۸ـ۱۱۸ علامت فرم درجه‌ی دوم: یک فرم درجه‌ی دوم $q = X'AX$ را درنظر می‌گیریم، اگر به‌ازای هر $X \neq O$ داشته باشیم $q > ۰$ آن را معین مثبت و اگر $q \geqslant ۰$ باشد آن را شبه معین مثبت خوانند. و به همین ترتیب اگر به ازای هر $X \neq O$ داشته باشیم $q < ۰$ آن را معین منفی و اگر $q \leqslant ۰$ باشد آن را شبیه معین منفی خوانند. به طورکلی

۱) q هنگامی معین مثبت است که تمامی مینورهای اصلی مثبت باشد. یعنی:

$$|H_۱| > ۰ \ , \ |H_۲| > ۰ \ , \ \ldots \ , \ |H_n| > ۰$$

۲) q هنگامی شبه معین مثبت است اگر مینورهای اصلی مثبت یا برابر صفر باشد. یعنی:

$$|H_۱| \geqslant ۰ \ , \ |H_۲| \geqslant ۰ \ , \ \ldots \ , \ |H_n| \geqslant ۰$$

۳) q هنگامی معین منفی است اگر مینورهای اصلی یک در میان منفی و مثبت باشد. یعنی:

$$|H_۱| < ۰ \ , \ |H_۲| > ۰ \ , \ |H_۳| < ۰$$

۴) q هنگامی شبه معین منفی است اگر مینورهای فوق (برخی) مساوی صفر نیز باشد.

۵) اگر q به صورت‌های مختلف فوق نباشد، q را نامعین گویند. اگر q معین مثبت (منفی) باشد ماتریس A، ماتریس فرم درجه دوم را ماتریس معین و مثبت (منفی) است.

مثال نشان دهید فرم درجه دوم $q = X'AX$ که در آن $A = \begin{bmatrix} ۷ & -۲ & ۱ \\ -۲ & ۱۰ & -۲ \\ ۱ & -۲ & ۷ \end{bmatrix}$ است، معین و مثبت است.

حل

$$|H_۱| = ۷ > ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۷ & -۲ \\ -۲ & ۱۰ \end{vmatrix} = ۶۴ > ۰ \ , \ |H_۳| = \begin{vmatrix} ۷ & -۲ & ۱ \\ -۲ & ۱۰ & -۲ \\ ۱ & -۲ & ۷ \end{vmatrix} = ۴۳۴ > ۰$$

پس فرم درجه‌ی دوم فوق معین و مثبت است.

تست علامت ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) معین مثبت ۲) معین منفی ۳) شبه معین مثبت ۴) نا معین

حل گزینه‌ی ۴. زیرا:

$$|H_۱| = ۱ > ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} = -۱ < ۰ \ , \ |H_۳| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۵ & ۵ \end{vmatrix} = -۲ < ۰$$

تست‌های فصل ۸

۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$ باشد. $(A^۲)'$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۴ & ۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}$

۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ m & ۱\end{bmatrix}$ و $A^۲=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ -۶ & a_{۲۲}\end{bmatrix}$، m کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۱

۳. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۴\\ -۱\end{bmatrix}=۰$ در $[۱ \quad -۱ \quad ۴ \quad x]$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) -۶

۴. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۴}$ و $C=[c_{ij}]_{۶\times ۳}$، درجه ماتریس B چه‌قدر باشد تا حاصل‌ضرب $A(BC)$ وجود داشته باشد؟

۱) ۶×۴ ۲) ۳×۲ ۳) ۴×۶ ۴) ۲×۳

۵. اگر $A^۲=A$ و $B=(۲A-I)$، در این‌صورت $A^۳+B^۳$ کدام است؟

۱) $A-B$ ۲) $A+B$ ۳) A ۴) B

۶. به‌ازای کدام مقدار x و y حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & y\\ x & ۱\end{bmatrix}$ ماتریس قطری می‌شود؟

۱) $y=-۲, x=-۱$ ۲) $y=۲, x=-۱$ ۳) $y=-۲, x=۱$ ۴) $y=۲, x=۱$

۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۶ & ۴\\ -۳ & -۲\end{bmatrix}$ در این‌صورت ماتریس $A^۸$ کدام است؟

۱) $۴I$ ۲) $۲۵۶I$ ۳) $۶۴I$ ۴) $۱۲۵I$

۸. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۴ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، آنگاه مجموع درآیه‌های ستون دوم BA کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۹ ۳) ۱۷ ۴) ۲۱

۹. ماتریس A از درجه ۳ است، اگر مقدار دترمینان A برابر ۳ باشد، دترمینان ماتریس $۳A$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۸۱ ۴) ۲۴۳

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}a & m-۱\\ ۲m+۱ & b\end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن باشد، m کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ و $f(x)=۳x^۲-۴I_۲$ باشد، $f(A)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۸ & ۱۵\\ ۰ & ۲۳\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱۲ & ۱۵\\ ۰ & ۲۷\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱۶ & ۱۵\\ ۰ & ۳۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۸ & ۳\\ ۰ & ۲۷\end{bmatrix}$

۱۲. حاصل ماتریس $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$، دترمینان $(A')^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\beta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\beta)\\ \sin\varphi & \cos\varphi & \sin(\varphi+\beta)\end{bmatrix}$، آنگاه دترمینان A کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ ۴) $\sin\alpha\cos\beta\sin\varphi$

۱۵. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۳ & -۵\\ -۱ & ۴ & ۵\\ ۱ & -۳ & -۴\end{bmatrix}$ در این‌صورت ماتریس A^n کدام است؟

۱) $\bar{o}$ ۲) A ۳) $-A$ ۴) شبه‌متقارن

۱۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۳\\ ۲ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}$، در این‌صورت دترمینان $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۱}$ ۳) -۱۱ ۴) ۱۱

۱۷. اگر $AA'=A'A$ و $B=A^{-۱}A'$ باشد، آنگاه $(BB')^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\bar{o}$ ۲) A ۳) B' ۴) I

۱۸. در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۴\\ ۰ & ۱ & ۵\\ ۶ & ۳ & -۴\end{bmatrix}$، همسازه‌ی $A_{۱۳}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۶

۱۹. اگر A یک ماتریس ۴ × ۴ و A' ترانسپوزه A باشد و همچنین $|A|=۴$ آنگاه حاصل $\frac{|۲A|}{|۴A'|}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۰. اگر $A^۲=۳A$ باشد، آنگاه $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $۳^{۱۰۰}A^{۹۹}$ ۲) $۳^{۹۹}A$ ۳) $۳^{۱۰۰}A$ ۴) $۳^{۹۹}A^{۹۹}$

۲۱. اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$، در این‌صورت $-۳AB$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۹ & -۳ \\ -۱۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۹ & ۳ \\ -۱۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

۲۲. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & -۴ \\ ۶ & -۳ & ۷ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ، مجموع کهادهای عناصر اولین سطر کدام است؟

۱) -۲۶ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹

۲۳. اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a & ۰ & ۰ \\ b & c & ۰ \end{bmatrix}$ ، در این‌صورت $A^۳$ کدام است؟

۱) I ۲) $\bar{o}$ ۳) A ۴) $۳I$

۲۴. اگر $A_{۲\times ۲}, |A^{-۱}| = ۴$ باشد، دراین‌صورت $|nA^{-۱}|$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{n}$ ۲) $۴n$ ۳) $۱۶n^۲$ ۴) $۴n^۲$

۲۵. اگر $X^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $Y^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $(۴XY)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۸ & ۸ \\ ۸ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۴} & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

۲۶. ماتریس A از درجه‌ی ۵×۵ مفروض است، دترمینان A دارای:

۱) ۲۵ عنصر و ۱۲۰ جمله است.
۲) ۱۲۰ عنصر و ۲۵ جمله است.
۳) ۲۵ عنصر و ۵ جمله است.
۴) ۵ عنصر و ۲۵ جمله است.

۲۷. اگر A' ترانسپوزه‌ی ماتریس A باشد و $AA' = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۱۰ & ۰ \\ a & b & ۱ \end{bmatrix}$ ، $|A|$ کدام است؟

۱) $a + ۳b$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $a + b$

۲۸. اگر $\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} = A$ ، در آن‌صورت دترمینان A کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) -۲ ۴) صفر

۲۹. اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد، کدام یک از ماتریس‌های زیر همواره معکوس‌پذیر است؟

۱) $A + A'$ ۲) $A - A'$ ۳) AA' ۴) $A + I$

۳۰. حاصل $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+a & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+b & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱+c \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $(۱+a)(۱+b)(۱+c)$ ۲) صفر ۳) abc ۴) ۱

۳۱. دو سطر یک ماتریس مربعی را در عدد ۳ و سه ستون آن را در عدد -۳ ضرب کرده‌ایم، دترمینان ماتریس چند برابر دترمینان ماتریس اول خواهد بود؟

۱) -۲۴۳ ۲) ۵۴ ۳) -۲۷ ۴) ۱۲

۳۲. دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\sin\theta + \cos\theta$ ۴) صفر

۳۳. اگر $A = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \end{vmatrix}$ و دترمینان ماتریس $A^۲$ برابر ۹ باشد، a کدام است؟

۱) $-۳, ۲$ ۲) $۵, -۱$ ۳) $۳, -۲$ ۴) $۱, -۵$

۳۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، $A^{-۱}B^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۶} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۶} \\ ۰ & \end{bmatrix}$

۳۵. در ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ کهاد $a_{۲۱}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۶. با فرض $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ معکوس $I - A$ کدام است؟

۱) $I + A$ ۲) $I - A^۲$ ۳) $I + A + A^۲$ ۴) $A - I$

۳۷. به‌ازای کدام مقدار m ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & m & ۱ \\ ۱ & ۰ & m \\ m & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر نمی‌باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۱

۳۸. حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & \log a & \log bc \\ ۱ & \log b & \log ac \\ ۱ & \log c & \log ab \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $\log abc$ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) $\log a + \log b + \log c$

۳۹. اگر $X = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ باشد، $A = (X'X)^{-۱}.(X'Y)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

۴۰. مرتبه (رتبه) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) ۲

۴۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۴\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ، مجموع عناصر قطری ماتریس الحاقی A کدام است؟

۱) -۲۶ ۲) ۹ ۳) -۸ ۴) ۸

۴۲. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ مفروض است، مجموع عناصر قطری در $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) ۰

۴۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ، رتبه (مرتبه) A. $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۴۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۳\\ ۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، مرتبه ماتریس $(A.B.C)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۸

۴۵. به‌ازای کدام مقدار a، دستگاه معادلات مقابل جواب غیرصفر دارد؟

$$\begin{cases} ax_۱ + x_۲ + ۲x_۳ = ۰\\ x_۱ + ۲x_۲ + ax_۲ = ۰\\ x_۱ - x_۲ - ۲x_۳ = ۰ \end{cases}$$

۱) ۱ و ۴ $-$ ۲) ۱ $-$ و ۴
۳) ۱ $-$ و ۴ $-$ ۴) ۱ و ۴

۴۶. ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات خطی $\left[\begin{array}{ccc|c}۱ & ۰ & ۰ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱\end{array}\right]$ می‌باشد، این دستگاه چند دسته جواب دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) بی‌شمار ۴) جواب ندارد

۴۷. به‌ازای کدام مقدار m، دستگاه معادلات مقابل جواب منحصر به‌فرد ندارد؟

$$\begin{cases} x + my + z = -۱\\ ۲x + z = ۱\\ mx + y - z = ۱ \end{cases}$$

۱) ۲ $-$ ۲) ۱ $-$
۳) ۱ ۴) ۰

۴۸. دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} x_۲ + ۴x_۲ - x_۳ = ۴\\ ۵x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ = ۳ \end{cases}$ دارای چند جواب است؟

۱) یک ۲) دو ۳) جواب ندارد ۴) بی‌شمار

۴۹. تعداد جواب‌های دستگاه $\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳\\ ۴x_۱ - x_۲ - x_۳ = ۲\\ x_۱ - x_۲ - x_۳ = -۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) یک ۲) دو ۳) جواب ندارد ۴) بی‌شمار

۵۰. اگر جواب x از دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - y = ۱ \\ bx + ۲y = ۳ \end{cases}$ برابر ۲٫۵ باشد، مقدار $۲a + b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۱. دستگاه معادلات مقابل:

$$\begin{cases} x_۲ + ۲x_۲ - x_۳ = ۱۰ \\ ۲x_۱ - ۴x_۲ - ۲x_۳ = ۵ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶ \end{cases}$$

۱) یک‌دسته جواب منحصر به‌فرد دارد. ۲) تعداد نامحدودی دسته جواب دارد.
۳) فاقد جواب است. ۴) ناسازگار است.

۵۲. اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & \sin\theta \\ \csc\theta & ۰ \end{bmatrix}$ ، در این‌صورت حاصل $A^{۲۰}$ کدام است؟

۱) I ۲) $۲۰I$ ۳) A ۴) O

۵۳. اگر $A^۴ = I$، در این‌صورت ماتریس $A^{۴۲۶}$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $A^۲$ ۴) $۲A$

۵۴. در دترمینان $A = \begin{vmatrix} -۲ & ۳ & a \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۱ & b & -۱ \end{vmatrix}$ ، مجموع همسازه‌های عناصر a و b کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۵. اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & m \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -m \end{vmatrix}$ برابر ۶ باشد، m کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) ۲

۵۶. اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$، A^* ماتریس الحاقی آن و $|AA^*| = ۲۱۶$ باشد، مقدار $|A|$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۳۶ ۳) ۶ ۴) ۹

۵۷. اگر عناصر سطر چهارم ماتریس X، $[۰ \ ۱ \ ۳ \ -۲]$ و عناصر ستون سوم ماتریس Y، $[۱ \ ۲ \ ۳ \ -۱]$ باشند، عنصر سطر چهارم ستون سوم ماتریس XY کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۵ ۴) ۶

۵۸. مقادیر ویژه $\begin{bmatrix} x & -۱ \\ ۳ & y \end{bmatrix}$ برابر با ۳ و ۵ است، در این‌صورت x و y کدام است؟

۱) $x = -۳$ و $y = ۴$ ۲) $x = ۵$ و $y = ۲$ ۳) $x = ۲$ و $y = ۶$ ۴) $x = ۱$ و $y = ۷$

۵۹. اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس درجه ۲ باشد، کدام بردار نیز بردار ویژه این ماتریس است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$

۶۰. اگر معادله مفسر ماتریس A به‌صورت $k^۲ - ۵k + ۶ = ۰$ باشد، ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۴ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۴ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$

۶۱. یکی از امتدادهای ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $x_۲ = ۲x_۱$ ۲) $x_۲ = x_۱$ ۳) $x_۲ = -x_۱$ ۴) $x_۲ = -۲x_۱$

۶۲. اگر $\log_۲^a$ و $\log_۲^b$ مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشند، $ab + ۱$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۶۳. معادله‌ی مفسر A از درجه ۲×۲ به‌صورت $k^۲ - ۵k - ۱ = ۰$ است، وارون A کدام است؟

۱) $A^۲ - ۵A$ ۲) $A - ۵I$ ۳) $\frac{۱}{۲}(۵I + A)$ ۴) A وارون‌پذیر نیست.

۶۴. هر سه مقدار ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & -۳ & -۹ \\ ۰ & ۵ & ۱۸ \\ ۰ & m & -۷ \end{bmatrix}$ برابرند، m کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۶۵. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴

۶۶. اگر اعداد ۳ و -۴ مقادیر ویژه ماتریس ۲×۲، A باشند مقدار $|A + ۳I|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۱۲ ۴) -۱۲

۶۷. به‌ازای کدام مقدار m، ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ m & ۱ \end{bmatrix}$ مقدار ویژه ندارد؟

۱) $m = ۱$ ۲) $m = -۱$ ۳) $m = ۰$ ۴) $m = ۲$

۶۸. اگر معادله مفسر ماتریس مربع A به‌صورت $۳k^۲ - ۵k + ۲ = ۰$ باشد، معادله مفسر $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $۳k^۲ + ۵k + ۲ = ۰$ ۲) $۲k^۲ - ۵k + ۳ = ۰$

۳) $۲k^۲ + ۵k + ۳ = ۰$ ۴) $۴k^۲ + ۲k + ۵ = ۰$

۶۹. مقادیر ویژه ماتریس A از درجه ۲ عبارتند از ۳ و -۲، مقدارهای ویژه ماتریس الحاقی A کدام است؟

۱) -۲ و ۳ ۲) ۲ و -۳ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۶ و -۴

۷۰. اگر $A = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}$، در این‌صورت مقادیر ویژه $A^{-۳}$ کدام است؟

۱) ۱ و ۸ ۲) ۱ و $\frac{۱}{۸}$ ۳) ۰ و $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۲۷ و ۰

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۸

۱. گزینه‌ی ۱.

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Longrightarrow (A^۲)' = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۲. گزینه‌ی ۱.

$$A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ m & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ m & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۱-m & ۲ \\ ۲m & -m+۱ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۲} \\ -۶ & a_{۲۲} \end{bmatrix} \Longrightarrow ۲m = -۶ \Longrightarrow m = -۳$$

۳. گزینه‌ی ۴. از ضرب دو ماتریس اول و دوم خواهیم داشت:

$$[۲x+۴ \;\; x-۲ \;\; ۴] \begin{bmatrix} x \\ ۴ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow ۲x^۲ + ۴x + ۴x - ۸ - ۴ = ۰ \Longrightarrow ۲x^۲ + ۸x - ۱۲ = ۰$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = -\frac{۱۲}{۲} = -۶$$

۴. گزینه‌ی ۳.

$$A_{۲\times ۴} B_{\,m\times n}\, C_{۶\times ۳} \Longrightarrow B_{۴\times ۶}$$
$$\searrow \swarrow \;\; \searrow \swarrow$$
$$m=۴ \quad n=۶$$

۵. گزینه‌ی ۲.

$$A^۳ = A^۲ \cdot A = A \cdot A = A$$
$$B^۳ = (۲A - I)^۳ = ۸A^۳ - ۱۲A^۲ + ۶A - I = ۸A - ۱۲A + ۶A - I = ۲A - I = B$$
$$A^۳ + B^۳ = A + B$$

۶. گزینه‌ی ۱. برای این‌که ماتریسی قطری باشد، باید عناصر بالا و پایین قطر اصلی آن صفر باشند، پس:

$$[۱ \;\; ۲] \begin{bmatrix} y \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow y + ۲ = ۰ \Longrightarrow y = -۲$$
$$[۱ \;\; ۴] \begin{bmatrix} ۴ \\ x \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow ۴ + ۴x = ۰ \Longrightarrow x = -۱$$

۷. گزینه‌ی ۲.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} = ۴I \longrightarrow A^۸ = (A^۲)^۴ = (۴I)^۴ = ۲۵۶I^۴ = ۲۵۶I$$

۸. گزینه‌ی ۲.

$$(BA) \text{ ستون دوم} = B \times (A \text{ ستون دوم}) = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۷ \\ ۴ \end{bmatrix} \Longrightarrow ۷ + ۸ + ۴ = ۱۹$$

۹. گزینه‌ی ۳. ماتریس A از درجه ۳ است و با ضرب عدد ۳ درکلیه عناصر آن $۳^۳$ برابر می‌شود.

$$|۳A| = ۳^۳|A| = ۲۷(۳) = ۸۱$$

۱۰. گزینه‌ی ۱.

$$a_{۲۱} = a_{۱۲} \Longrightarrow ۲m + ۱ = m - ۱ \Longrightarrow m = -۲$$

۱۱. گزینه‌ی ۱.

$$f(A) = ۳A^۲ - ۴I_۲ = ۳\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}^۲ - ۴\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۳\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۱۵ \\ ۰ & ۲۳ \end{bmatrix}$$

۱۲. گزینه‌ی ۴.

$$\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^۲\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos^۲\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^۲\theta & -\sin\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^۲\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۳. گزینه‌ی ۱.

$$|A'| = \begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۶ - ۵ = ۱$$

$$|(A')^۲| = |A'|^۲ = (۱)^۲ = ۱$$

۱۴. گزینه‌ی ۲.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\beta) \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \sin(\varphi+\beta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\beta + \sin\beta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma\cos\beta \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\beta\cos\varphi \end{vmatrix} = ۰ + ۰ = ۰$$

زیرا در هر یک از دترمینان‌های فوق، دوستون متناسب وجود دارد. پس مقدار دترمینان هر یک از آن‌ها صفر است.

۱۵. گزینه‌ی ۲.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} = A \Longrightarrow A^۲ = A$$

$$A^۳ = A^۲.A = A.A. = A^۲ = A \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow A^n = A$$

۱۶. گزینه‌ی ۲.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = (۰ + ۰ + ۲) - (۰ + ۱ + ۱۲) = -۱۱ \Longrightarrow |A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|} = -\frac{۱}{۱۱}$$

۱۷. گزینه‌ی ۴.

$$BB' = A^{-۱}A'(A^{-۱}A')' = A^{-۱}A'A(A')^{-۱} = A^{-۱}A'A(A')^{-۱} = II = I \Longrightarrow (BB')^{-۱} = I$$

۱۸. گزینه‌ی ۴.

$$A_{ij} = (-۱)^{i+j}|M_{ij}| \Longrightarrow A_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۶ & ۳ \end{vmatrix} = -۶$$

۱۹. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{|۲A|}{۲A'|} = \frac{۲^۴ \times |A|}{۴^۴ \times |A'|} \xrightarrow{|A|=|A'|} = \frac{۲^۴}{۲^۸} = \frac{۱}{۲^۴} = \frac{۱}{۱۶}$$

۲۰. گزینه‌ی ۲.

$$A^۳ = A^۲.A = (۳A)A = ۳A^۲ = ۳(۳A) = ۳^۲A$$
$$A^۴ = A^۳.A = (۳^۲A)A = ۳^۲A^۲ = ۳^۲(۳A) = ۳^۳A$$
$$\vdots$$
$$A^{۱۰۰} = ۳^{۹۹}A$$

۲۱. گزینه‌ی ۱.

$$(A^{-۱})^{-۱} = A \Longrightarrow (A^{-۱})^{-۱} = \frac{۱}{|A^{-۱}|}\text{adj}A^{-۱} = ۱ \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$(B^{-۱})^{-۱} = B \Longrightarrow (B^{-۱})^{-۱} = \frac{۱}{|B^{-۱}|}\text{adj}B^{-۱} = (-۱) \times \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$
$$-۳AB = -۳ \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} = -۳\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & -۳ \\ -۱۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

۲۲. گزینه‌ی ۲.

$$A_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} -۳ & ۷ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} = -۲۶, A_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۶ & ۷ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = -۱۷, A_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۶ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱۵$$

۲۳. گزینه‌ی ۲. به طورکلی اگر A یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) ۳×۳ باشد، آنگاه $A^۳ = \bar{O}$.

۲۴. گزینه‌ی ۴.

$$|nA^{-۱}| = n^۲ \times |A^{-۱}| = ۴n^۲$$

۲۵. گزینه‌ی ۴.

$$(۴XY)^{-۱} = \frac{۱}{۴}Y^{-۱}X^{-۱} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۸ & ۸ \\ ۸ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲۶. گزینه‌ی ۱. دترمینان ۵×۵ دارای $۵^۲$ عنصر و $۱۲۰ = ۵!$ جمله است.

۲۷. گزینه‌ی ۲. داریم $|A| = \sqrt{|AA'|}$ پس $|A|^۲ = |AA'| = |A||A'|$ از طرفی

$$|AA'| = ۴ \Longrightarrow |A| = \sqrt{۴} = \pm ۲ \text{ برحسب ستون سوم}$$

۲۸. گزینه‌ی ۴. اگر دو ماتریس با درجه‌های $m \times n$ و $n \times m$ درهم ضرب شوند و $m > n$ باشد، حاصل که یک ماتریس مربع است دترمینانش صفر است.

۲۹. گزینه‌ی ۳. ماتریس A معکوس‌پذیر است در نتیجه $|A| \neq ۰$ پس:

$$|AA'| = |A||A'| = |A||A| = |A|^۲ \neq ۰$$

۳۰. گزینه‌ی ۳. در دترمینان داده شده (-۱) برابر سطر اول را به سایر سطرها اضافه می‌کنیم، یعنی:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱-۱ & ۱+a-۱ & ۱-۱ & ۱-۱ \\ ۱-۱ & ۱-۱ & ۱+b-۱ & ۱-۱ \\ ۱-۱ & ۱-۱ & ۱-۱ & ۱+c-۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & a & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = abc$$

۳۱. گزینه‌ی ۱. اگر دو سطر را در ۳ ضرب کنیم، دترمینان در $۳ \times ۳ = ۹$ ضرب می‌شود و اگر سه ستون آن را در -۳ ضرب کنیم، دترمینان $(-۳)(-۳)(-۳) = -۲۷$ ضرب می‌شود، پس در کل دترمینان در $(-۲۷) \times ۹ = -۲۴۳$ ضرب شده است.

۳۲. گزینه‌ی ۲.

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -\cos^۲\theta - \sin^۲\theta = -(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta) = -۱$$

۳۳. گزینه‌ی ۴.

$$|A^۲| = ۹ \Longrightarrow |A|^۲ = ۹ \Longrightarrow (a+۲)^۲ = ۹ \Longrightarrow a+۲ = \pm ۳ \Longrightarrow a = ۱, -۵$$

۳۴. گزینه‌ی ۴. می‌دانیم معکوس هر ماتریس قطری در صورت وجود یک ماتریس قطری است که عناصر واقع بر قطر آن معکوس واقع بر قطر ماتریس می‌باشند، بنابراین:

$$A^{-۱}B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۶} \end{bmatrix}$$

۳۵. گزینه‌ی ۳.

$$|M_{۲۱}| = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۲ - ۰ = ۲$$

۳۶. گزینه‌ی ۳. چون $A^۳ = \bar{O}$ بنابراین:

$$(I-A)(I+A+A^۲) = I^۳ - A^۳ = I^۳ - \bar{O} = I \Longrightarrow (I-A) = \frac{I}{I+A+A^۲}$$

$$(I-A)^{-۱} = I + A + A^۲$$

۳۷. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{vmatrix} ۰ & m & ۱ \\ ۱ & ۰ & m \\ m & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow m^۳ + ۱ = ۰ \Longrightarrow m = -۱$$

۳۸. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{vmatrix} ۱ & \log a & \log bc \\ ۱ & \log b & \log ac \\ ۱ & \log c & \log ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & \log a & \log bc + \log a \\ ۱ & \log b & \log ac + \log b \\ ۱ & \log c & \log ab + \log c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & \log a & \log abc \\ ۱ & \log b & \log abc \\ ۱ & \log c & \log abc \end{vmatrix} = ۰$$

۳۹. گزینه‌ی ۱.

$$A = \left(\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \right)^{-۱} \times \left(\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}^{-۱} \times \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۶} \begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۴۰. گزینه‌ی ۴. دترمینان A برابر صفر است زیرا همه عناصر سطر سوم مساوی صفرند، بنابراین باید دترمینان‌های درجه دو را درنظر بگیریم. اگر حداقل یکی از این دترمینان‌ها مخالف صفر باشد، مرتبه ماتریس A، دو می‌باشد، مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} = ۹ - ۶ = ۳ \Longrightarrow r(A) = ۲$$

۴۱. گزینه‌ی ۳. می‌دانیم اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & a \\ ۰ & b & ۰ \\ c & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ آنگاه $\text{adj}A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -ab \\ ۰ & -ac & ۰ \\ -bc & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، بنابراین $\text{adj}A =$

$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱۲ \\ ۰ & -۸ & ۰ \\ -۶ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ در نتیجه مجموع عناصر قطری $\text{adj}A$ برابر -۸ است.

۴۲. گزینه‌ی ۱.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۳-۲} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-۱} \text{ مجموع عناصر قطری} = ۱ + ۳ = ۴$$

۴۳. گزینه‌ی ۳. $|A| = (-۱ + ۲ + ۰) - (۰ + ۴ + ۱) = -۴ \neq ۰$. می‌دانیم اگر $|A| \neq ۰$ باشد $r(A^{-۱}.A) = n$ بنابراین $r(A^{-۱}.A) = ۳$.

۴۴. گزینه‌ی ۳. $|B| \neq ۰$ و $|C| \neq ۰$ $r(A.B.C) = r(A) = ۳$ چون $|A| \neq ۰$.

۴۵. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{vmatrix} a & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & a \\ ۱ & -۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow a^۲ - ۳a - ۴ = ۰ \Longrightarrow (a-۴)(a+۱) = ۰ \Longrightarrow a = ۴, a = -۱$$

۴۶. گزینه‌ی ۴. چون تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیش‌تر است، پس دستگاه جواب ندارد.

۴۷. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{vmatrix} ۱ & m & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ m & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۰ + ۲ + m^۲) - (۰ + ۱ - ۲m) \Longrightarrow m^۲ + ۲m + ۱ = ۰ \Longrightarrow m = -۱$$

۴۸. گزینه‌ی ۴. چون تعداد مجهولات بیش‌تر از تعداد معادلات است، پس دستگاه معادلات خطی بی‌شمار جواب دارد.

۴۹. گزینه‌ی ۴.

$$A = ۱\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۴ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰, \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{vmatrix} = -۵ \neq ۰ \Longrightarrow r(A) = ۲, \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۴ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{vmatrix} = -۵ \Longrightarrow r(A|B) = ۲ = r(A) = r(A|B) = ۲ < ۳$$

۵۰. گزینه‌ی ۴.

$$۲\times \begin{cases} ax - y = ۱ \\ bx + ۳y = ۳ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲ax - ۲y = ۲ \\ bx + ۲y = ۳ \end{cases} \Longrightarrow (۲a+b)x = ۵ \Longrightarrow ۲a + b = ۲$$

۵۱. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۴ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & -۴ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۱۶ \neq ۰ \Longrightarrow r(A) = ۳$$

$$\Rightarrow r(A) = r(A|B) = n$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & -۱ & ۱۰ \\ ۲ & -۴ & -۲ & ۵ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۶ \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱۰ \\ ۲ & -۴ & ۵ \\ ۱ & ۱ & ۶ \end{vmatrix} = ۱۷ \neq ۰ \Longrightarrow r(A|B) = ۳$$

۵۲. گزینه‌ی ۱.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & \sin\theta \\ \csc\theta & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & \sin\theta \\ \csc\theta & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I \Longrightarrow A^{۲۰} = (A^۲)^{۱۰} = I^{۱۰} = I$$

۵۳. گزینه‌ی ۳.

$$A^{۴۲۶} = (A^۴)^{۱۰۶}.A^۲ = I^{۱۰۶}.A^۲ = A^۲$$

۵۴. گزینه‌ی ۱.

$$A_{۱۳}+A_{۲۲}=\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & b\end{vmatrix}+(-۱)\begin{vmatrix}-۲ & a\\ ۰ & ۵\end{vmatrix}=-۱+۱۰=۹$$

۵۵. گزینه‌ی ۱. دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$۱(-m-۰)+m(-۱-۰)=۶\Longrightarrow m=-۳$$

۵۶. گزینه‌ی ۳. می‌دانیم $AA^*=|A|I$، بنابراین $||A|I|=۲۱۶$. در نتیجه $|A|^۳=۲۱۶$ و $|A|=۶$.

۵۷. گزینه‌ی ۲.

$$[۲\ \ -۱\ \ ۳\ \ ۰]\begin{bmatrix}-۱\\ ۳\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۲(-۱)+(-۱)۳+۳(۲)+۰(۱)=۱$$

۵۸. گزینه‌ی ۳. چون مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر مجموع عناصر قطر اصلی است، پس $x+y=۸$. در نتیجه گزینه‌های ۱ و ۲ غلط‌اند. از طرفی دترمینان ماتریس مزبور برابر حاصل‌ضرب مقدارهای ویژه است. در نتیجه باید $xy+۳=۱۵$ یا $xy=۱۲$ باشد، پس گزینه ۳ درست است.

۵۹. گزینه‌ی ۴. هر مضربی از یک بردار ویژه همواره بردار ویژه همانی ماتریس خواهد بود.

۶۰. گزینه‌ی ۲. معادله مفسر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ به‌صورت $k^۲-(trA)k+|A|=۰$ است. اثر ماتریس‌های (tr) داده شده به‌ترتیب -۳ و ۵ و ۳ و -۵ است. که با توجه به $k^۲-۵k+۶=۰$ گزینه ۲ صحیح است.

۶۱. گزینه‌ی ۲. $k^۲-۳k-۴=۰$ بنابراین $(k-۴)(k+۱)=۰$ در نتیجه $k=۴$ و $k=-۱$ مقادیر ویژه هستند. معادله امتدادهای ویژه ماتریس مزبور به‌صورت $(۲-k)x_۱+۲x_۲=۰$.

$$k=۴\Longrightarrow -۲x_۱+۲x_۲=۰\Longrightarrow x_۱=x_۲, k=-۱\Longrightarrow ۳x_۱+۲x_۲=۰$$

۶۲. گزینه‌ی ۳. می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع عناصر واقع بر قطر اصلی است. پس:

$$\log_۲^a+\log_۲^b=۳\Longrightarrow \log_۲^{ab}=۳\Longrightarrow ab=۲^۳\Longrightarrow ab=۸\Longrightarrow ab+۱=۹$$

۶۳. گزینه‌ی ۲. بنابر قضیه کیلی-هامیلتون، هر ماتریس مربع در معادله‌ی مفسرش صدق می‌کند، $A^۲-۵A-I=۰$ بنابراین $A(A-۵I)=I$ پس $A^{-۱}=A-۵I$.

۶۴. گزینه‌ی ۱. $k+k+k=-۱+۵-۷$، پس $k=-۱$. از طرف دیگر حاصل‌ضرب مقادیر ویژه برابر $|A|$ است، در نتیجه $|A|=-۱$. پس:

$$-(-۳۵-۱۸m)=-۱\Longrightarrow m=-۲$$

۶۵. گزینه‌ی ۲. مقادیر ویژه (ریشه‌های معادله مفسر) یک ماتریس پایین‌مثلثی همان عناصر واقع بر قطر اصلی است یعنی ۱ و ۲ و ۳ که حاصل‌ضرب آن‌ها ۶ است.

۶۶. گزینه‌ی ۲. مقادیر ویژه $A+۳I$ عبارتند از $(۳+۳)$ و $(۳+۴-)$ یعنی ۶ و -۱ و همواره دترمینان هر ماتریس عبارت است از حاصل‌ضرب مقادیر ویژه (در صورت وجود) آن، پس $|A+۳I|=۶\times(-۱)=-۶$.

۶۷. گزینه‌ی ۲.

$$k^۲ - ۳k + ۲ - ۳m = ۰ \Longrightarrow \Delta = ۹ - ۴(۲ - ۳m) < ۰ \Longrightarrow ۱ + ۱۲m < ۰ \Longrightarrow m < -\frac{۱}{۱۲}$$

۶۸. گزینه‌ی ۲. چون مقدارهای ویژه A و $A^{-۱}$ عکس یکدیگرند، بنابراین ریشه‌های معادله مفسر $A^{-۱}$ عکس ریشه‌های معادله مفسر A است. پس باید معادله‌ای تشکیل دهیم که ریشه‌هایش عکس ریشه‌ای معادله $۳k^{۲۰} - ۵k + ۲ = ۰$ باشد. یعنی $۲k^۲ - ۵k + ۳ = ۰$.

۶۹. گزینه‌ی ۱. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (ماتریس الحاقی A) در نتیجه $tr(A) = tr(A^*)$ و $|A| = |A^*|$. پس معادله مفسر A و A^* یکسان است و بنابراین مقادیر ویژه A و A^* یکسان است.

۷۰. گزینه‌ی ۲. مقدارهای ویژه A عبارتند از $k_۱ = ۱$ و $k_۲ = \frac{۱}{۲}$ پس مقدارهای ویژه $A^{-۳}$ عبارتند از: $\frac{۱}{k_۱^۳}$ و $\frac{۱}{k_۲^۳}$ یعنی ۱ و ۸.

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

مدیریت

۱. مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $A^۲ - I_۲$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) -۱۲ ۲) -۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۳. مقدار دترمینان $A = \begin{vmatrix} x & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}$ به‌ازای چه مقدار x برابر صفر است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۳

۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض باشد، ماتریس $A^۲$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۹ & -۵ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

۵. معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$

۶. در دستگاه $\begin{cases} x + y + z = ۲ \\ x - y - ۲z = -۱ \\ ۲x + y - z = ۴ \end{cases}$ مقدار x کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۷. مرتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۱

۸. به‌ازای چه مقداری از a، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & a \end{vmatrix}$ صفر است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۹. اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ مجموع عناصر قطری ماتریس $A^۲$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۳ ۴) ۲۳

۱۰. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض است در $A^{-۱}$ مجموع عناصر قطری کدام است؟ ۱۳۷۲

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۴

۱۱. در دستگاه $\begin{cases} x+y-z=۰ \\ x-y-۲z=۰ \\ -x+y+z=۰ \end{cases}$ مقدار $x+y+z$ کدام است؟ ۱۳۷۲

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر ماتریس $A^۲$ کدام است؟ ۱۳۷۳

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۳. مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}$ کدام است؟ ۱۳۷۳

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۴. رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟ ۱۳۷۳

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵. دستگاه $\begin{cases} x+۲ay=۰ \\ x+۴y=۰ \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a جواب‌های بی‌شمار دارد؟ ۱۳۷۳

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶. در معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ، مجموع عناصر کدام است؟ ۱۳۷۳

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۱۷. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد مجموع عناصر روی قطر AB کدام است؟ ۱۳۷۴

۱) ۶ ۲) ۱۳ ۳) ۱۲ ۴) ۷

۱۸. مقدار دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ & -۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ کدام است؟ ۱۳۷۴

۱) -۱۴ ۲) ۸ ۳) -۱۰ ۴) ۱۲

۱۹. معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ کدام است؟ ۱۳۷۴

۱) $\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۴ & -۵ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ -۴ & -۳ \end{bmatrix}$

۲۰. دستگاه $\begin{cases} ax+y=۰ \\ x-۲y=۰ \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a بی‌شمار جواب دارد؟ ۱۳۷۴

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۱. اگر داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۳\\ ۵ & ۴ & ۹\end{bmatrix}$ مقدار دترمینان $|A^{۲}|$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) صفر ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۶۴

۲۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر قطری معکوس A کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۱

۲۳. مرتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۱ & ۲\\ ۳ & ۳ & ۳ & ۳\\ ۶ & ۶ & ۶ & ۶\end{bmatrix}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴. به‌ازای کدام مقدار m، دستگاه $\begin{cases}mx+y-z=۰\\ x-y+z=۰\\ ۲x-۲y+z=۰\end{cases}$ جواب غیرصفر دارد؟ [۱۳۷۵]

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۵. به‌ازای کدام مقدار a ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ a & a-۲\end{bmatrix}$، معکوس ندارد؟ [۱۳۷۶]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۸ & ۹\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان AA' کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲۱ ۴) ۱۴۴

۲۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۸ & ۹\end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر معکوس ماتریس A کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $-\frac{۲۹}{۱۱}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۹}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱}{۱۱}$

۲۸. دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) -۶ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۶

۲۹. مجموع عناصر سطر اول ماتریس $A^{۲}$ کدام است؟ (A ماتریس سوال قبل است) [۱۳۷۷]

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۶ ۴) ۵

۳۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر $A^{-۱}$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۱. در معادله ماتریسی $AX=O$ در کدام حالت فقط یک دسته جواب صفر دارد؟ [۱۳۷۷]

۱) $|A|=۰$ ۲) $|A|\neq ۰$ ۳) $A^{-۱}=O$ ۴) $|A^{-۱}|=۰$

۳۲. از رابطه ماتریس $\begin{bmatrix}۱\\۲\\۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & y\\ ۱ & -۱ & ۲\\ ۱ & x & ۰\end{bmatrix}[۳\ ۲\ ۱] = ۰$ رابطه بین x و y کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $x+y+۱۰=۰$ ۲) $۶x+y+۱۰=۰$ ۳) $۲x-y+۴=۰$ ۴) $x+۲y+۱=۰$

۳۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ باشد در ماتریس $A^{-۱}$ درایه $a_{۱۳}$، کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۳

۳۴. به‌ازای کدام مقدار m دستگاه $\begin{cases}mx+y-z=۰\\ x-y+z=۰\\ ۲x-۲y+z=۰\end{cases}$ جواب غیرصفر دارد؟ [۱۳۷۹]

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۵. در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ می‌دانیم $|A|=۳$ است. مجموع عناصر روی قطر ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۳۶. مقادیر ویژه ماتریس تبدیل $A=\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $۱,-۴$ ۲) $۱,۴$ ۳) $-۱,۴$ ۴) $-۱,-۴$

۳۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس AA'، مجموع عناصر روی قطر کدام است؟ [۱۳۸۰]

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۳۸. در سؤال شماره‌ی ۳۷، مقدار دترمینان A کدام است؟ [۱۳۸۰]

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۳۹. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$ مفروض است. مجموع عناصر روی قطر $A^{-۱}$ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴۰. کدام یک از ماتریس‌های زیر فاقد معکوس‌اند؟ [۱۳۸۱]

۱) $\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۲ & -۵\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$

۴۱. کدام یک از روابط زیر در جبر ماتریس‌ها صحیح است؟ [۱۳۸۱]

۱) $AB=BA$ ۲) $(AB)'=A'\cdot B'$

۳) $(AB)^{-۱}=B^{-۱}\cdot A^{-۱}$ ۴) $|kA_{n\times n}|=k|A_{n\times n}|$

۴۲. مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ وقتی که $x = \rho\cos\theta$ و $y = \rho\sin\theta$ باشد، برابر است با: [۱۳۸۱]

۱) ρ ۲) ρ^2 ۳) $\rho\cos\theta$ ۴) $\rho\sin\theta$

۴۳. مقدار b از رابطه $(a \;\; b)\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix} = (۱ \;\; ۵)$، کدام است؟ [۸۱]

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۴۴. مرتبه (Rank) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & -۲ & -۳ & -۴ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix}$، برابر است با: [۱۳۸۱]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۵. فرض کنید A، ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، کدام یک از ماتریس‌های زیر متقارن است؟ [۱۳۸۲]

۱) $A - A^{-1}$ ۲) $A - A^t$ ۳) $A + A^t$ ۴) $A + A^{-1}$

۴۶. به‌ازای کدام مقدار k دستگاه معادلات زیر بیشمار جواب دارد؟ [۱۳۸۲]

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۴ \\ x_۱ + ۳x_۲ + ۲x_۳ + ۴x_۴ = ۰ \\ ۲x_۱ + x_۳ - x_۴ = k \end{cases}$$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۴۷. رتبه ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۶ & ۱ & ۳ & ۸ \\ ۴ & ۲ & ۶ & -۱ \\ ۱۰ & ۳ & ۹ & ۷ \\ ۱۶ & ۴ & ۱۲ & ۱۵ \end{pmatrix}$، کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۸. از رابطه $(x \;\; ۱ \;\; ۱)\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = ۰$، مقدار x کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) $۲ \pm \sqrt{۲}$ ۲) $۳ \pm \sqrt{۲}$ ۳) $-۳ \pm \sqrt{۵}$ ۴) $-۳ \pm \sqrt{۷}$

۴۹. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، آنگاه مجموع عناصر قطر اصلی، ماتریس A^{-1} کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۵۰. مقدار x از معادله $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۰$ برابر است با: [۱۳۸۳]

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۱. اگر داشته باشیم $A^۳ = ۰$، الزاماً ماتریس A کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) معکوس‌ناپذیر ۲) صفر ۳) بالا مثلثی ۴) شبه متقارن

۵۲. در دستگاه $AX = B$ اگر $A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ آنگاه $x + y$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۵۳. اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، در ماتریس الحاقی $(adj\ A)$ مجموع عناصر روی قطر کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۵۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس X از رابطه $AX = I$ کدام است؟ (I ماتریس یکه از مرتبه ۲) ۱۳۸۴

۱) $\begin{bmatrix} -۳ & ۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$

۵۵. حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & -۲ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۲ \end{vmatrix}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۶. از دستگاه معادلات $\frac{z+۳}{-۱} = \frac{y+۱}{۲} = \frac{۲x-۱}{۳}$ و $۲x + y + z = ۵$ مقدار y کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) -۵

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{vmatrix} = (-۱ + ۰ + ۱) - (۰ + ۰ + ۰) = ۰$$

۲. گزینه‌ی ۱.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۴ & ۱۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow A^۲ - I_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۴ & ۱۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۸ \\ ۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$|A^۲ - I_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & ۸ \\ ۴ & ۱۰ \end{vmatrix} = ۲۰ - ۳۲ = -۱۲$$

۳. گزینه‌ی ۲.

$$|A| = ۰ \Longrightarrow (۰ + ۴ + ۲) - (۰ + ۲x + ۴) = ۰ \Longrightarrow x = ۱$$

۴. گزینه‌ی ۳.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$$

۵. گزینه‌ی ۲.

$$A^{-1}=\frac{1}{6-2}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

۶. گزینه‌ی ۱.

$$\underline{\begin{cases}x+y+z=2\\ x-y-2z=-1\end{cases}}\ ,\ \underline{\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+y-z=4\end{cases}}\Longrightarrow\begin{cases}2x-z=1\\ -2x+2z=-2\end{cases}\Longrightarrow x=0$$

۷. گزینه‌ی ۴. $|A_{3\times3}|=0$ بنابراین ماتریس از مرتبه ۳ نیست و به همین‌صورت $|A_{2\times2}|=0$ و بنابراین ماتریس از مرتبه ۲ نیست و چون $|A_{1\times1}|=2$ پس ماتریس از مرتبه ۱ می‌باشد.

۸. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ a & 3 & 2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow(2+6+2a)-(a+8+3)=0\Longrightarrow a=3$$

۹. گزینه‌ی ۴.

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 7 & 12\\ 7 & 8 & 12\\ 4 & 4 & 7\end{bmatrix}\Longrightarrow \text{مجموع عناصر قطری ماتریس } A^2=23$$

۱۰. گزینه‌ی ۲.

$$A^{-1}=\frac{1}{5-2}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\Longrightarrow \text{مجموع عناصر قطری ماتریس } A^{-1}=2$$

۱۱. گزینه‌ی ۱.

$$\underline{\begin{cases}x+y-z=0\\ x-y-2z=0\\ -x+y+z=0\end{cases}}$$

$$x+y-2z=0\Longrightarrow\underbrace{(x+y-z)}_{0}-z=0\Longrightarrow z=0$$

$$x+y+z=(x+y-z)+2z=0=0+0=0$$

۱۲. گزینه‌ی ۴.

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}\Longrightarrow \text{مجموع عناصر ماتریس } A^2=18$$

۱۳. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=(1+4+2)-(2+2+2)=1$$

۱۴. گزینه‌ی ۴. در تست شماره ۱۳ معلوم شد که دترمینان ماتریس مخالف صفر است بنابراین مرتبه ماتریس ۳ است.

۱۵. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\Longrightarrow\frac{۱}{۱}=\frac{۲a}{۴}\Longrightarrow ۲a=۴\Longrightarrow a=۲$$

۱۶. گزینه‌ی ۱.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۴-۳}\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\Longrightarrow \text{مجموع عناصر ماتریس } A^{-۱}=۰$$

۱۷. گزینه‌ی ۲.

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۱۴\\ -۴ & ۱۴\end{bmatrix}\Longrightarrow \text{مجموع عناصر روی قطر } AB=۱۳$$

۱۸. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{vmatrix}۲ & -۱ & ۴\\ ۱ & ۲ & -۲\\ ۳ & ۱ & ۰\end{vmatrix}=(۰+۶+۴)-(۲۴-۴+۰)=-۱۰$$

۱۹. گزینه‌ی ۱.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۵-۸}\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}$$

۲۰. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\Longrightarrow\frac{a}{۱}=\frac{۱}{-۲}\Longrightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۲۱. گزینه‌ی ؟. دترمینان برای ماتریس‌های غیرمربع تعریف نشده است.

۲۲. گزینه‌ی ۴.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۶-۱}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵} & \frac{۱}{۵}\\ \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\end{bmatrix}\Longrightarrow \text{مجموع عناصر قطری } A^{-۱}=۱$$

۲۳. گزینه‌ی ۲. $|A_{۴\times۴}|=۰$ زیرا دو سطر ماتریس با هم متناسبند و در نتیجه ماتریس از مرتبه ۴ نیست. به همین دلیل $|A_{۳\times۳}|=۰$ و در نتیجه ماتریس از مرتبه ۳ نیست، اما

$$\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}=۱-۴=-۳\neq۰\Longrightarrow r(A)=۲$$

۲۴. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{vmatrix}m & ۱ & -۱\\ ۱ & -۱ & +۱\\ ۲ & -۲ & ۱\end{vmatrix}=(-m+۲+۲)-(۱-۲m+۲)=۰\Longrightarrow m=-۱$$

۲۵. گزینه‌ی ۴.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & ۲\\ a-۲ & ۱\end{vmatrix}=a-۲(a-۲)=۰\Longrightarrow a=۴$$

۲۶. گزینه‌ی ۳.

$$A.A' = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۸ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۷ & ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷۴ & ۱۰۳ \\ ۱۰۳ & ۱۴۵ \end{bmatrix} \Longrightarrow |AA'| = \begin{vmatrix} ۷۴ & ۱۰۳ \\ ۱۰۳ & ۱۴۵ \end{vmatrix} = ۱۰۷۳۰ - ۱۰۶۰۹ = ۱۲۱$$

۲۷. گزینه‌ی ۴.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۴۵ - ۵۶} \begin{bmatrix} ۹ & -۷ \\ -۸ & ۵ \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{مجموع عناصر معکوس ماتریس } A = \frac{۱}{-۱۱}(۹ - ۷ - ۸ + ۵) = \frac{۱}{۱۱}$$

۲۸. گزینه‌ی ۱.

$$|A| = (۰ + ۰ + ۲) - (۰ + ۸ + ۰) = -۶$$

۲۹. گزینه‌ی ۲.

$$A^۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱+۴+۱ & ۲+۰+۰ & ۱+۲+۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ۶ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{مجموع عناصر سطر اول} = ۶ + ۲ + ۵ = ۱۳$$

۳۰. گزینه‌ی ۴.

$$A^{-۱} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۴} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} \end{pmatrix}, \quad A^{-۱} \text{ مجموع عناصر} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۴}{۴} = ۱$$

۳۱. گزینه‌ی ۲.

۳۲. گزینه‌ی ۲.

$$[۱\ ۲\ ۳] \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & y \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & x & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow [۶\ \ ۳x\ y + ۴] \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow$$

$$۶ + ۶x + y + ۴ = ۰ \Longrightarrow ۶x + y + ۱۰ = ۰$$

۳۳. گزینه‌ی ۱.

داریم $|A| = ۳$ اگر $A'_{۱۳}$ عنصر مربوط به سطر اول و ستون سوم ماتریس الحاقی ماتریس A باشد آنگاه $A'_{۱۳}$ برابر است با $A_{۳۱}$ عنصر متناظر در ماتریس همسازه که به‌صورت زیر می‌توان آن را به‌دست آورد:

$$A_{۳۱} = (-۱)^{۳+۱} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱ \quad , \quad A^{-۱}_{۱۳} = \frac{A'_{۱۳}}{|A|} = \frac{۱}{۳}$$

۳۴. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{vmatrix} m & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (-m+۲+۲)-(۲+۱-۲m)=۰ \Longrightarrow m=-۱$$

۳۵. گزینه‌ی ۲.

$$A_{۱۱}=(-۱)^{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=-۱ \quad , \quad A_{۲۲}-(-۱)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۰ \quad , \quad A_{۳۳}=(-۱)^{۶}\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۳$$

مجموع عناصر قطر اصلی ماتریس $A^{-۱}$ با توجه به فرمول $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\text{adj}A$ برابر است با:

$$\frac{۱}{۳}(-۱+۰+۳)=\frac{۲}{۳}$$

۳۶. گزینه‌ی ۳.

$$k^{۲}-trAk+|A|=۰ \Longrightarrow k^{۲}-۳k-۴=۰ \Longrightarrow (k-۴)(k+۱)=۰ \Longrightarrow k'=۴ \quad , \quad k''=-۱$$

۳۷. گزینه‌ی ۴.

$$AA'=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۴+۱ & & \\ & ۰+۱+۴ & \\ & & ۴+۱+۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & & \\ & ۵ & \\ & & ۵ \end{bmatrix}$$

برای به‌دست آورد عناصر قطر اصلی در فوق کافی است سطر اول را در ستون اول، سطر دوم را در ستون دوم و سطر سوم را در ستون سوم ضرب کنیم.

$$AA' \text{ مجموع عناصر روی قطر} = ۶+۵+۵=۱۶$$

۳۸. گزینه‌ی ۳.

$$|A|=(۰+۰+۸)-(-۲+۰+۲)=۸$$

۳۹. گزینه‌ی ۲.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۸-۳}\begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-۱} \text{ مجموع عناصر روی قطر} = \frac{۱}{۵}(۴+۲)=\frac{۶}{۵}$$

۴۰. گزینه‌ی ۲.

$$|A|=۱۵+۸=۲۳\neq ۰ \quad , \quad |B|=-۱۰+۱۰=۰$$
$$|C|=۸+۱۰=۱۸\neq ۰ \quad , \quad |D|=۲-۳=-۱\neq ۰$$

۴۱. گزینه‌ی ۳.

۴۲. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho\cos^{۲}\theta+\rho\sin^{۲}\theta=\rho$$

۴۳. گزینه‌ی ۳.

$$[a \quad b]\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = [۵ \quad ۱] \Longrightarrow (a+۲b \quad -a+b) = (۵ \quad ۱)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a+۲b = ۵ \\ -a+b = ۱ \end{cases} \Longrightarrow ۳b = ۶ \Longrightarrow b = ۲$$

۴۴. گزینه‌ی ۱. سطر دوم (-۱) برابر سطر اول است:

$$(-۱ \quad -۲ \quad -۳ \quad -۴) = -(۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴)$$

و سطر سوم ۲ برابر سطر اول است:

$$(۲ \quad ۴ \quad ۶ \quad ۸) = ۲(۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴)$$

بنابراین تعداد سطرهای مستقل برابر ۱ است. از طرف دیگر ستون دوم ۲ برابر ستون اول است:

$$(۲ \quad -۲ \quad ۴) = ۲(۱ \quad -۱ \quad ۲)$$

و ستون سوم ۳ برابر ستون اول است:

$$(۳ \quad -۳ \quad ۶) = ۳(۱ \quad -۱ \quad ۲)$$

و ستون چهارم ۴ برابر ستون اول است:

$$(۴ \quad -۴ \quad ۸) = ۴(۱ \quad -۱ \quad ۲)$$

لذا تعداد ستون‌های مستقل خطی برابر ۱ است. بنابراین مرتبه ماتریس برابر ۱ است.

۴۵. گزینه‌ی ۳.

$$(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

۴۶. گزینه‌ی ۴. در دستگاه m معادله n مجهولی $AX = B$. اگر تعداد مجهول‌ها بیش از تعداد معادلات باشد $(n > m)$ دستگاه یا جواب ندارد و یا بیشمار جواب دارد. در دستگاه دو معادله و سه مجهولی هر $\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ = b_۲ \end{cases}$ یک از معادلات نشان‌دهنده‌ی یک صفحه از فضای $\mathbb{R}^۳$ می‌باشد. اگر این دو صفحه موازی و غیر منطبق باشند، یعنی:

$$\frac{a_{۱۱}}{a_{۲۱}} = \frac{a_{۱۲}}{a_{۲۲}} = \frac{a_{۱۳}}{a_{۲۳}} \neq \frac{b_۱}{b_۲}$$

دستگاه جواب ندارد، زیرا دو صفحه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. و اگر دو صفحه موازی نباشند یکدیگر را در یک خط (فصل مشترک دو صفحه) قطع می‌کنند که هر یک از نقاط این خط جواب دستگاه می‌باشد که بیشمار جواب دارد. مجهول $x_۲$ در معادله‌ی اول را برحسب سه مجهول دیگر به دست آورده و آن را در معادله قرار می‌دهیم.

$$x_۲ = ۴ - x_۱ - x_۳ - x_۴$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۳(۴ - x_۱ - x_۳ - x_۴) + ۲x_۳ + ۴x_۴ = ۰ \\ ۲x_۱ + x_۳ - x_۴ = k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۲x_۱ - x_۳ + x_۴ = -۱۲ \\ ۲x_۱ + x_۳ - x_۴ = k \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{-۲}{۲} = \frac{-۱}{۱} = \frac{۱}{-۱} = \frac{-۱۲}{k} \Longrightarrow k = ۱۲$$

۴۷. گزینه‌ی ۲. $|A| = ۰$ زیرا ستون‌های دوم و سوم ماتریس A متناسب هستند، پس $r(A) \neq ۴$. از طرفی تمام دترمینان‌های ۳×۳ نیز برابر صفراند، اکنون اگر یکی از دترمینان‌های ۲×۲ مخالف صفر باشد، $r(A) = ۲$.

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = ۱۲ - ۴ = ۸ \neq ۰ \Longrightarrow r(A) = ۲$$

۴۸. گزینه‌ی ۳.

$$[x \quad ۱ \quad ۱] \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow [x+۳ \quad ۲x+۳ \quad x+۱] \begin{bmatrix} x \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Longrightarrow x^۲ + ۳x + ۲x + ۳ + x + ۱ = ۰$$

$$\Longrightarrow x^۲ + ۶x + ۴ = ۰ \Longrightarrow x = -۳ \pm \sqrt{۵}$$

۴۹. گزینه‌ی ۴.

$$|A| = (۸ + ۰ + ۱) - (۰ + ۰ + ۰) = ۹$$

$$A_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ \ , \ A_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ \ , \ A_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۴$$

$$A_{۱۱}^{-۱} + A_{۲۲}^{-۱} + A_{۳۳}^{-۱} = \frac{۴}{۹} + \frac{۴}{۹} + \frac{۴}{۹} = \frac{۴}{۳}$$

۵۰. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (-۲ + x + ۰) - (۰ + ۱ - x) = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

۵۱. گزینه‌ی ۱.

۵۲. گزینه‌ی ۴.

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \frac{۱}{۱ - ۴} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \frac{۲}{۳} y = ۲$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -\frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}x - \frac{۱}{۳}y = ۱ \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{۲}{۳}x + \frac{۴}{۳}y = ۴ \\ \frac{۲}{۳}x - \frac{۱}{۳}y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow y = ۵ \ , \ x = ۴ \Longrightarrow x + y = ۹$$

۵۳. گزینه‌ی ۱.

$$A_{۱۱} = (-۱)^{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱ \ ; \ A_{۲۲} = (-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱ \ ; \ A_{۳۳} = (-۱)^{۶}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = -۳$$

$$c \circ f.A = \begin{bmatrix} ۱ & - & - \\ - & ۱ & - \\ - & - & -۳ \end{bmatrix} \Longrightarrow adj\ A = \begin{bmatrix} ۱ & - & - \\ - & ۱ & - \\ - & - & -۳ \end{bmatrix}$$

مجموع عناصر قطری $= ۱ + ۱ - ۳ = -۱$

۵۴. گزینه‌ی ۳.

$$AX = I \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۲a + ۵c & ۲b + ۵d \\ a + ۳c & b + ۳d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{cases} ۲a + ۵c = ۱ \\ a + ۳c = ۰ \end{cases}}_{c = -۱, a = ۳} \ , \ \underbrace{\begin{cases} ۲b + ۵d = ۰ \\ b + ۳d = ۱ \end{cases}}_{d = ۲, b = -۵} \Longrightarrow X = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

۵۵. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۳ \end{vmatrix} = (-۶ + ۱۰ + ۱۲) - (-۸ + ۹ + ۱۰) = ۵$$

۵۶. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{۲x - ۱}{۳} = \frac{y + ۱}{۲} = \frac{z + ۳}{-۱} = t \Longrightarrow \begin{cases} ۲x = ۳t + ۱ \\ y = ۲t - ۱ \\ z = -t - ۳ \end{cases}$$

$$۲x + y + z = ۵ \Longrightarrow ۳t + ۱ + ۲t - ۱ - t - ۳ = ۵ \Longrightarrow ۴t = ۸ \Longrightarrow t = ۲$$

پس $y = ۲t - ۱$ یا $y = ۳$.

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

حسابداری

۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۷ & -۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $A\times B$ چه‌قدر است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۴۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۵ ۴) ۵۱

۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۵\\ ۰ & ۱ & -۱\\ ۴ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ جزء سطر دوم در ستون سوم ماتریس $A^۲$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۶- ۲) ۳ ۳) ۴- ۴) ۲

۳. در ازای کدام مقدار $x\neq ۰$ حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱+x & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱+x\end{vmatrix}$ برابر صفر است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۴

۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۳ & ۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$ جزء مربوط به سطر سوم و ستون دوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) ۵ ۳) ۵- ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۵. دترمینان حاصل‌ضرب ماتریس $\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & ۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۳۳- ۲) ۲۷- ۳) ۳۳ ۴) ۲۷

۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر روی قطر ماتریس $A^۲$، کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۲۹ ۲) ۱۹ ۳) ۱۷ ۴) ۵

۷. به‌ازای کدام مقدار a دترمینان $\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & -۱ & ۰\\ ۳ & ۱ & a\end{vmatrix}$ صفر است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸. مرتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض است، در ماتریس $A^{-۱}$، عنصر $a_{۱۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۱۰. به‌ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{cases} x+y=۱ \\ ax+y=۲ \end{cases}$ فاقد جواب است؟ [۱۳۷۲]

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۱. در دستگاه $\begin{cases} x-y-z=۰ \\ ۲x+y+z=۰ \\ x+۲y+z=۰ \end{cases}$، مجموع ریشه‌ها کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۲. حاصل عبارت $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} [۱ \quad -۲ \quad ۱]$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

۱۳. از رابطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، مقدار $x+y$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۴. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، مقدار دترمینان $|A^۲|$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵. به‌ازای کدام مقدار k، دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & k \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$، برابر صفر است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) -۱

۱۶. رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۷. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر $A^{-۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۸. دستگاه $\begin{cases} x+my=۰ \\ x-y=۱ \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار m، فاقد جواب است؟ [۱۳۷۳]

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۹. دستگاه معادلات $\begin{cases} x+۲y=۰ \\ ۲x-ay=۰ \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a، بی‌نهایت جواب دارد؟ [۱۳۷۴]

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۴

۲۰. مقدار دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۲۱. اگر برای ماتریس‌های A و B و C داشته باشیم $A.B.C = I$، آنگاه: [۱۳۷۴]

۱) $|A| \neq ۰, |B| \neq ۰, |C| \neq ۰$ ۲) $|A| = ۰, |B| = ۱, |C| = ۱$

۳) $|A| = ۱, |B| \neq ۰, |C| = ۰$ ۴) $|A| \neq ۰, |B| \neq ۰, |C| = ۰$

۲۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۷\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $A^۲B^{۱۵}$ کدام است؟ ۱۳۷۴

۱) ۱۲ ۲) -۱۲ ۳) -۳۲ ۴) ۳۶

۲۳. ماتریس معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$ کدام است؟ ۱۳۷۴

۱) $\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ ۲) $\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$ ۳) $\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$ ۴) $\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$

۲۴. دستگاه $\begin{cases}ax+y=۰\\ ۲ax-y=۰\end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a بی‌شمار جواب دارد؟ ۱۳۷۴

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، مقدار λ در دترمینان $|A-\lambda I_۲|=۰$ کدام است؟ ۱۳۷۴

۱) ۰ و ۱ ۲) ۳ و ۲ ۳) ۰ و ۲ ۴) ۳ و ۱

۲۶. به‌ازای کدام مقدار k دترمینان $|A|=\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۲ & k\\ ۰ & ۱ & ۲\end{vmatrix}$ برابر صفر است؟ ۱۳۷۵

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۷. اگر $A\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۳\\ ۱ & ۲ & ۳\end{vmatrix}$ مفروض باشد، مجموع عناصر قطری $A^۲$ کدام است؟ ۱۳۷۵

۱) ۳۷ ۲) ۲۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۱

۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۲ & ۰\\ ۳ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ مفروض باشد، و معکوس آن $B=[b_{ij}]$ فرض شود، عنصر $b_{۲۲}$ کدام است؟ ۱۳۷۵

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۵}{۴}$

۲۹. دستگاه $\begin{cases}x+۲y+z=۰\\ x-y+۲z=۰\\ ۲x+y+kz=۰\end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار k، بی‌نهایت جواب دارد؟ ۱۳۷۵

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۳۰. به‌ازای کدام مقدار n ماتریس $A=\begin{bmatrix}n & ۲ & ۱\\ ۲ & n & ۰\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ معکوس ندارد؟ ۱۳۷۶

۱) $۲-$ و $۱-$ ۲) $۲-$ و ۱ ۳) ۲ و $۱-$ ۴) ۲ و ۱

۳۱. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۴\\ -۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ مفروض است، در ماتریس $A^{-۱}$ درایه $a_{۲۳}$ کدام است؟ ۱۳۷۶

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۳۲. در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$ مجموع مقادیر ویژه (خاص) کدام است؟ ۱۳۷۶

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۳۳. جواب معادله $\begin{vmatrix} x & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$، کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $|AA'|$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

۳۵. مرتبه (Rank) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۶. در معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، عنصر $a_{۲۲}$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۳۷. اگر $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ $[۱, ۲, ۳] \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} = A$ باشد مقدار A کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۳۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

۳۸. اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$، مجموع عناصر $A^{-۱}$ کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۹. به‌ازای کدام مقدار k دستگاه معادلات $\begin{cases} x + ۲y + kz = ۰ \\ x - y + z = ۰ \\ ۲x + y - z = ۰ \end{cases}$ جواب‌های غیرصفر دارد؟ [۱۳۷۸]

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۰. اگر داشته باشیم $\begin{vmatrix} a & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}$، مقدار a کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۴۱. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ مجموع عناصر روی قطر ماتریس $A^۲$ کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) ۳۳ ۲) ۲۹ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۴۲. می‌دانیم دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ برابر ۱− است مجموع عناصر سطر اول ماتریس معکوس آن کدام است؟

۱۳۷۹

۱) ۲ ۲) ۱− ۳) ۰ ۴) ۳−

۴۳. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۱- \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $|A|$ برابر است با: ۱۳۸۰

۱) ۸− ۲) ۶− ۳) ۴− ۴) ۲−

۴۴. در ماتریس A از مسأله‌ی قبل مجموع عناصر قطری ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۵. مقدار x از معادله‌ی $\begin{bmatrix} x \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۱- \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} [۳\ ۲\ ۱] = ۰$ برابر است با: ۱۳۸۰

۱) ۱− ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۶. دستگاه همگن $A_{n\times n}.X_{n\times ۱} = O$، در کدام حالت بی‌شمار جواب دارد؟ ۱۳۸۰

۱) $|A| \neq ۰$ ۲) $A = A'$ ۳) $|A| = ۰$ ۴) $A = A^{-۱}$

۴۷. از معادله‌ی $(x\ ۱\ ۱) \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۲ \end{pmatrix} = ۰$، مقدار x کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) ۱۷ ۲) ۱۷− ۳) $\frac{۱۷}{۳}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۳}$

۴۸. مقادیر ویژه (Eigen value) ماتریس، $B = \begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۳- & ۵ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۱۵- & ۹ & ۷- \end{bmatrix}$، کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) ۴, ۸, ۲ ۲) ۲−, ۸, ۴ ۳) ۴, ۸−, ۲ ۴) ۴, ۸−, ۲−

۴۹. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱- & ۲ & ۲- \\ ۰ & ۳ & ۱- & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۲- \end{bmatrix}$ مفروض است. مرتبه (Rank) ماتریس A، کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱- & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، درایه $a_{۳۱}$ در ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۲}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $-\frac{۵}{۸}$

۵۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$، ماتریس $A^{-۱}\cdot B^{۲}$ کدام است؟ ۱۳۸۲

۱) $\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۶ & ۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\frac{۹}{۲} & ۲\\ \frac{۷}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵}\\ \frac{۲}{۵} & \frac{۷}{۵}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}\frac{۴}{۵} & \frac{۸}{۵}\\ \frac{۸}{۵} & -\frac{۴}{۵}\end{bmatrix}$

۵۲. علامت ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ کدام است؟ ۱۳۸۲

۱) نامعین ۲) معین مثبت ۳) معین منفی ۴) شبه معین مثبت

۵۳. به‌ازای چه مقدار k دستگاه زیر سازگار است؟ ۱۳۸۲

$$\begin{cases}x+۲y=k\\ ۲x+y=۰\\ x-y=۱\end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۵۴. مقدار x از معادله $(۱\ ۱\ -۱)\begin{pmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ ۱\\ ۱\end{pmatrix}=۰$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۵. اگر داشته باشیم $A^{۲}=A$، آنگاه A کدام ماتریس است؟ ۱۳۸۳

۱) همقوه ۲) برگردان ۳) شبه‌متقارن ۴) بی‌اثر درجمع

۵۶. اگر داشته باشیم $AX=B$، $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$، مقدار $x-y$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) ۴

۵۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$، آنگاه مجموع عناصر قطری ماتریس $A^{۲}$ یعنی $Tr(A^{۲})$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۵۸. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۱\\ ۳ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ درآیه (عنصر) واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $-\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۵۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۴\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $A\cdot A^t$ کدام است؟ [۱۳۸۴]

۱) ۰ ۲) ۲۳۶ ۳) ۲۳۷ ۴) نشدنی

۶۰. به‌ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات $\begin{cases}x-۲y+z=۰\\ ۲x+y+az=۰\\ x-y+۲z=۰\end{cases}$ بیشمار جواب دارد؟ [۱۳۸۴]

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۴.

$$|A||B|=\begin{vmatrix}۲ & ۵\\ ۱ & ۴\end{vmatrix}\begin{vmatrix}۷ & -۱\\ ۳ & ۲\end{vmatrix}=(۸-۵)(۱۴+۳)=۳\times ۱۷=۵۱$$

۲. گزینه‌ی ۳.

$$c_{۲۳}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\ -۱\\ ۳\end{bmatrix}=۰-۱-۳=-۴$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{vmatrix}۱+x & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱+x & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱+x\end{vmatrix}=۰\Longrightarrow ۳x^۲+x^۳=۰\Longrightarrow x^۲(۳+x)=۰\Longrightarrow x=۰, x=-۳$$

۴. گزینه‌ی ۱.

$$|A|=۲+۳=۵\ ,\ A_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{vmatrix}=-۱\times -۱=۱\ ,\ A^{-۱}_{۳۲}=\frac{A'_{۳۲}}{|A|}=\frac{۱}{۵}$$

۵. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & ۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰+۰+۰ & ۰+۱+۰\\ -۵+۰+۸ & ۰+۱-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰ & ۱\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}۱۰ & ۱\\ ۳ & -۳\end{vmatrix}=-۳۳$$

۶. گزینه‌ی ۱.

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱۰\\ ۱۵ & ۲۲\end{bmatrix}\Longrightarrow \text{مجموع عناصر قطر اصلی } A^۲=۷+۲۲=۲۹$$

۷. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & -۱ & ۰\\ ۳ & ۱ & a\end{vmatrix}=۰\Longrightarrow(-a+۴+۰)-(-۶+۰+۴a)=۰\Longrightarrow a=۲$$

۸. گزینه‌ی ۲. در ماتریس‌های $A_{۳\times۳}$ و $A_{۲\times۲}$ سطرهای مساوی وجود دارند بنابراین $|A_{۳\times۳}| = ۰$ و $|A_{۲\times۲}| = ۰$، بنابراین مرتبه ماتریس ۳ و ۲ نیست. اما $|A_{۱\times۱}| = ۱$ در نتیجه ماتریس از مرتبه ۱ می‌باشد.

۹. گزینه‌ی ۳. داریم $|A| = ۲ - ۶ = -۴$. اگر $A_{۱۱}$ عنصر سطر اول و ستون اول ماتریس الحاقی A باشد، خواهیم داشت:

$$a_{۱۱} = \frac{۱}{|A|}.A_{۱۱} = \frac{۱}{-۴}.(-۱)^{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = \frac{۱}{-۴} \times ۲ = -\frac{۱}{۲}$$

۱۰. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Longrightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۱}{۱} \Longrightarrow a = ۱$$

۱۱. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = -۴ + ۱ = -۳ \neq ۰ \Longrightarrow x = y = z = ۰ \Longrightarrow x + y + z = ۰$$

۱۲. گزینه‌ی ۱.

$$[۱ \quad ۲ \quad -۱]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۲ + ۴ - ۱ = ۵$$

۱۳. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۱۰ \\ y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow x + y = ۱۱$$

۱۴. گزینه‌ی ۴.

$$|A^{۲}| = |A||A| = \begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = (-۲)(-۲) = ۴$$

۱۵. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & k \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۰ + ۲ + ۰) - (۰ + ۰ + k) = ۰ \Longrightarrow k = ۲$$

۱۶. گزینه‌ی ۳.

$$|A| = (۰ + ۴ + ۰) - (۰ + ۰ + ۱) = ۳ \neq ۰ \Longrightarrow r(A) = ۳$$

۱۷. گزینه‌ی ۲.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۱ - ۴}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{مجموع عناصر } A^{-۱} = -\frac{۱}{۳}(۱ - ۲ - ۲ + ۱) = \frac{۲}{۳}$$

۱۸. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Longrightarrow \frac{۱}{۱} = \frac{m}{-۱} \Longrightarrow m = -۱$$

۱۹. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{-a} \Longrightarrow a = -۴$$

۲۰. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = (۹ - ۲ + ۴) - (-۳ + ۴ + ۶) = ۱۱ - ۷ = ۴$$

۲۱. گزینه‌ی ۱. ماتریس $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = I$ بدین معنی است که AB ماتریس معکوس C می‌باشد و لذا $|C| \neq ۰$ است. به‌طور مشابه ماتریس $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = I$ بدین معنی است که BC ماتریس معکوس A می‌باشد و لذا $|A| \neq ۰$ است و به همین ترتیب:

$$|AB| = |A||B| \neq ۰ \qquad A \neq ۰, B \neq ۰, |AB| \neq ۰$$

۲۲. گزینه‌ی ۴.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ - ۱۰ = -۶, |B| = \begin{vmatrix} ۳ & ۷ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} = ۱۵ - ۱۴ = ۱$$

$$|A^۲B^{۱۵}| = |A^۲||B^{۱۵}| = |A|^۲|B|^{۱۵} = (-۶)^۲(۱)^{۱۵} = ۳۶$$

۲۳. گزینه‌ی ۲.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{-۴ - ۳}\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

۲۴. گزینه‌ی ۱. اگر دترمینان ماتریس ضرایب یک دستگاه همگن مساوی باشد دستگاه بی‌شمار جواب دارد:

$$\begin{vmatrix} a & ۱ \\ ۲a & -۱ \end{vmatrix} = -a - ۲a = ۰ \Longrightarrow a = ۰$$

۲۵. گزینه‌ی ۴.

$$|A - \lambda I_۲| = \begin{vmatrix} ۱ - \lambda & ۰ \\ ۲ & ۳ - \lambda \end{vmatrix} = (۱ - \lambda)(۳ - \lambda) = ۰ \Longrightarrow \lambda = ۱, \lambda = ۳$$

۲۶. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & k \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۴ + ۲ + ۰) - (۰ + ۴ + k) = ۰ \Longrightarrow k = ۲$$

۲۷. گزینه‌ی ۱.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+۴+۳ & ۲+۲+۶ & ۳+۶+۹ \\ ۲+۲+۳ & ۴+۱+۶ & ۶+۳+۹ \\ ۱+۴+۳ & ۲+۲+۶ & ۳+۶+۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۱۰ & ۱۸ \\ ۷ & ۱۱ & ۱۸ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۸ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^۲ \text{ مجموع عناصر قطری} = ۸ + ۱۱ + ۱۸ = ۳۷$$

۲۸. گزینه‌ی ۲. اگر عناصر ماتریس $adjA$ را به‌صورت A_{ij} نشان دهیم برای به‌دست آوردن $b_{۲۲}$ ماتریس معکوس A داریم:

$$b_{۲۲} = \frac{۱}{|A|} \cdot A_{۲۲}$$

ولی $A_{۲۲}$ با عنصر متناظر آن در ماتریس $cof.A$ که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید برابر است.

$$A_{۲۲} = (-۱)^{۴} \begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow b_{۲۲} = \frac{۱}{|A|} \times ۰ = ۰$$

۲۹. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & k \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (-k + ۱ + ۸) - (-۲ + ۲ + ۲k) = ۰ \Longrightarrow k = ۳$$

۳۰. گزینه‌ی ۳.

$$|A| = \begin{vmatrix} n & ۲ & ۱ \\ ۲ & n & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = (n^{۲} + ۲ + ۰) - (n + ۴ + ۰) = ۰ \Longrightarrow n^{۲} - n - ۲ = ۰ \Longrightarrow n = ۲, n = -۱$$

۳۱. گزینه‌ی ۴. داریم $|A| = ۴ - ۶ = -۲$. اگر $A'_{۲۳}$ عنصر ماتریس adj$A$ باشد، آنگاه $A'_{۲۳}$ برابر است با $A_{۳۲}$ عنصر متناظر در ماتریس $cof.A$ که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$A_{۳۲} = (-۱)^{۵} \begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۱ + ۴ = -۵ \Longrightarrow A'_{۲۳} = -۵$$

$$a_{۲۳} = \frac{۱}{|A|} \cdot A'_{۲۳} = \frac{۱}{-۲} \times (-۵) = \frac{۵}{۲}$$

۳۲. گزینه‌ی ۴. مجموع مقادیر ویژه‌ی هر ماتریس مربع A برابر است با trA یعنی $۲ + ۵ = ۷$.

۳۳. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{vmatrix} x & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۲x + ۰ + ۴) - (۴ + ۴ + ۰) = ۰ \Longrightarrow x = ۲$$

۳۴. گزینه‌ی ۲.

$$|AA'| = |A||A'| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = (۴ - ۱)(۴ - ۱) = ۹$$

۳۵. گزینه‌ی ۲. دترمینان‌های $|A_{۴\times۴}|$ و $|A_{۳\times۳}|$ و $|A_{۲\times۲}|$ همگی برابر صفر است ولی $|A_{۱\times۱}| = ۱$ است. پس رتبه ماتریس یک می‌باشد.

۳۶. گزینه‌ی ۴.

$$|A| = (-۲ \times ۱ \times ۱) = -۲ \ , \ A_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} \begin{vmatrix} -۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۲ \ , \ A^{-۱}_{۲۲} = \frac{A'_{۲۲}}{|A|} = \frac{-۲}{-۲} = ۱$$

۳۷. گزینه‌ی ۱.

$$A = [۸ \ ۰ \ ۱۰] \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۸ + ۰ + ۳۰ = ۳۸$$

۳۸. گزینه‌ی ۲.

$$\text{مجموع عناصر } A^{-۱} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۴ + ۲ + ۱}{۴} = \frac{۷}{۴}$$

۳۹. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & k \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۱ + k + ۴) - (-۲k - ۲ + ۱) = ۰ \Longrightarrow k = -۲$$

۴۰. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۶a + ۰ + ۱) - (۴ + ۰ - a) = ۰ \Longrightarrow a = \frac{۳}{۷}$$

۴۱. گزینه‌ی ۱.

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ + ۶ + ۳ & & \\ & ۶ + ۴ + ۳ & \\ & & ۳ + ۳ + ۴ \end{bmatrix}$$

کافی است فقط سطر اول را در ستون اول، سطر دوم را در ستون دوم و سطر سوم را در ستون سوم ضرب کنیم تا عناصر قطری ماتریس $A^۲$ به‌دست آید. پس:

$$\text{مجموع عناصر قطر ماتریس } A^۲ = ۱۰ + ۱۳ + ۱۰ = ۳۳$$

۴۲. گزینه‌ی ۳.

$$A_{۱۱} = (-۱)^۲ \begin{vmatrix} ۴ & ۵ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix} = -۱ \ , \ A_{۲۱} = (-۱)^۳ \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix} = ۳ \ , \ A_{۳۱} = (-۱)^۴ \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix} = -۲$$

$$A^{-۱}_{۱۱} = \frac{A'_{۱۱}}{|A|} = \frac{-۱}{-۱} = ۱ \ , \ A^{-۱}_{۱۲} = \frac{A'_{۱۲}}{|A|} = \frac{۳}{-۱} = -۳ \ , \ A^{-۱}_{۱۳} = \frac{A'_{۱۳}}{|A|} = \frac{-۲}{-۱} = ۲$$

$$A^{-۱}_{۱۱} + A^{-۱}_{۱۲} + A^{-۱}_{۱۳} = ۱ - ۳ + ۲ = ۰$$

۴۳. گزینه‌ی ۱.

$$|A| = (۱ + ۰ - ۲) - (۳ + ۴ + ۰) = -۱ - ۷ = -۸$$

۴۴. گزینه‌ی ۲.

$$A_{۱۱} = (-۱)^۲ \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱ \ , \ A_{۲۲} = (-۱)^۴ \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۲ \ , \ A_{۳۳} = (-۱)^۶ \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = -۳$$

مجموع عناصر قطری ماتریس A^{-1} با توجه به فرمول $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}A$ برابر است با:

$$-\frac{1}{8}(1-2-3)=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{4}$$

۴۵. گزینه‌ی ۱.

$$[1\ 2\ 3]\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\\1\end{bmatrix}=0\Longrightarrow[8\ 4\ 4]\begin{bmatrix}x\\1\\1\end{bmatrix}=0\Longrightarrow 8x+4+4=0\Longrightarrow x=-1$$

۴۶. گزینه‌ی ۳.

۴۷. گزینه‌ی ۴.

$$(1\ \ 1\ \ x)\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=0\Longrightarrow(1+x\ \ 3\ \ 2+x)\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow 1+x+12+4+2x=0\Longrightarrow x=-\frac{17}{3}$$

۴۸. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{bmatrix}13-k&-13&5\\0&4-k&0\\-15&9&-7-k\end{bmatrix}=0\Longrightarrow(13-k)(4-k)(-7-k)+75(4-k)=0$$

$$\Longrightarrow(4-k)[(13-k)(-7-k)+75]=0$$

$$\Longrightarrow(4-k)(k^2-6k-16)=0\Longrightarrow k=4\ ,\ 8\ ,\ -2$$

۴۹. گزینه‌ی ۲. سطر سوم برابر است با ۲ برابر سطر اول به اضافه سطر دوم:

$$(2\ \ 1\ \ 3\ \ -2)=2(1\ \ -1\ \ 2\ \ -2)+(0\ \ 3\ \ -1\ \ 2)$$

۵۰. گزینه‌ی ۴.

$$|A|=(0-2+6)-(8+0-12)=8$$

a_{31} عنصر مربوط به سطر سوم و ستون اول، ماتریس الحاقی A می‌باشد، بنابراین a_{31} برابر است با a_{13} عنصر متناظر در ماتریس همسازه که به صورت زیر است می‌آید.

$$a_{13}=(-1)^{1+3}\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}=-1-4=-5\Longrightarrow A^{-1}_{31}=\frac{-5}{8}$$

۵۱. گزینه‌ی ۴.

$$A^{-1}=\frac{1}{1-6}\begin{bmatrix}1&-2\\-3&1\end{bmatrix}=\frac{-1}{5}\begin{bmatrix}1&-2\\-3&1\end{bmatrix}$$

$$B^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}B^۲ = \frac{-۱}{۵}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix} = \frac{-۱}{۵}\begin{bmatrix} -۴ & -۸ \\ -۸ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۵} & \frac{۸}{۵} \\ \frac{۸}{۵} & -\frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$$

۵۲. گزینه‌ی ۱. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$:

$$|H_۱| = ۱ > ۰\ ,\ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = -۴ < ۰\ ,\ |H_۳| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۵۳. گزینه‌ی ۳. در دستگاه $AX = B$ اگر تعداد معادلات بیش از تعداد مجهولات باشد $(m > n)$ مجهولی n معادله و m آنگاه یک بردار $B = (b_۱, \ldots, b_m)'$ وجود دارد که به‌ازای آن دستگاه جواب ندارد. مثلاً در حالت سه معادله و دو مجهول دستگاه به صورت

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ = b_۲ \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ = b_۳ \end{cases}$$

می‌باشد. هر یک از معادلات نشان‌دهنده‌ی یک خط راست در صفحه است که جواب دستگاه نقطه مشترک (تقاطع) هر سه خط می‌باشد. بسته به حالت‌های خطوط، دستگاه یا جواب ندارد و یا فقط یک جواب دارد و تنها در حالتی که هر سه خط بر هم منطبق باشند (در واقع هر سه معادله یکی باشند) دستگاه بیشمار جواب دارد.

در دستگاه داده شده مقادیر x و y را از معادله‌های دوم و سوم به دست آورده و در معادله اول قرار می‌دهیم تا مقدار k به دست آید.

$$\begin{cases} ۲x + y = ۵ \\ x - y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow x = ۲\ ,\ y = ۱$$

$$x + ۲y = k \Longrightarrow ۲ + ۲ = k \Longrightarrow k = ۴$$

۵۴. گزینه‌ی ۲.

$$(۱\ \ -۱\ \ ۱)\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۱\ \ ۲\ \ -۱)\begin{pmatrix} x \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = ۰$$

$$\Longrightarrow x + ۲ - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -۱$$

۵۵. گزینه‌ی ۱.

۵۶. گزینه‌ی ۲.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\Longrightarrow A=\frac{1}{3-4}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$AX=B\Longrightarrow\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}-3x+2y=2\\ 2x-y=1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}-3x+2y=2\\ 4x-2y=2\end{cases}\quad\Longrightarrow x=4\ ,\ y=7\Longrightarrow x-y=-3$$

۵۷. گزینه‌ی ۳.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & - & -\\ - & 6 & -\\ - & - & 6\end{bmatrix}\Longrightarrow 6+6+6=18$$

$a_{11}=$ ستون اول × سطر اول ، $a_{22}=$ ستون دوم × سطر دوم ، $a_{33}=$ ستون سوم × سطر سوم

۵۸. گزینه‌ی ۳.

$$|A|=(16+0+0)-(0)=16$$

می‌دانیم a_{23} عنصر مربوط به سطر دوم و ستون سوم ماتریس الحاقی A می‌باشد، بنابراین a_{32} برابر است با عنصر متناظر در ماتریس همسازه که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$a_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-(0-3)=3\Longrightarrow A^{-1}_{23}=\frac{3}{16}$$

۵۹. گزینه‌ی ۳.

$$A\cdot A^t=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+9+1 & 0-3+4\\ 0-3+4 & 0+1+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 1\\ 1 & 17\end{bmatrix}$$

$$|A\cdot A^t|=(14\times 17)-(1)=237$$

۶۰. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow(2-2-2a)-(1-8-a)=0\Longrightarrow a=7$$

فصل ۹

توابع چندمتغیره

توابع چندمتغیره

۹ـ۱ تابع f که دامنه‌ی آن زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ و بُرد آن زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، یک تابع n متغیره است.

۹ـ۲ تابع f که ضابطه یا معادله‌ی آن به‌صورت $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ می‌باشد، یک تابع n متغیره است. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را متغیرهای مستقل و z را متغیر تابع گویند.

۹ـ۳ اگر f تابعی از دو متغیر مستقل باشد، معمولاً متغیرهای مستقل را x و y نامیده و دامنه تعریف f را به‌صورت ناحیه‌ای در صفحه‌ی دکارتی ($\mathbb{R}^2$) رسم می‌کنیم. اگر f تابعی از سه متغیر مستقل باشد. متغیرهای مستقل را x، y و z نامیده و دامنه تعریف f را به‌صورت ناحیه‌ای در فضا ($\mathbb{R}^3$) رسم می‌کنیم.

مثال تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x, y) = xy - \frac{x}{y}$ یک تابع دو متغیره است.

مثال تابع $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = e^{x+y-z}$ یک تابع سه‌متغیره است.

۹ـ۴ طبق معمول، مقادیر توابعی که با فرمول تعریف می‌شوند را با قراردادن مقادیر مشخصی به‌جای متغیرهای مستقل و محاسبه مقدار متناظر متغیر وابسته به‌دست می‌آوریم.

مثال مقدار هریک از توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید.

$$۱)\ f(x, y) = e^x + e^{-y} \quad , \quad (۰, ۰)$$
$$۲)\ f(x, y, z) = xy + \ln z \quad , \quad (۱, ۲, ۱)$$

حل

$$۱)\quad f(۰, ۰) = e^۰ + e^۰ = ۱ + ۱ = ۲$$
$$۲)\quad f(۱, ۲, ۱) = (۱)(۲) + \ln ۱ = ۲ + ۰ = ۲$$

دامنه و برد توابع چند متغیره

۹ـ۵ بزرگترین زیر مجموعه که در آن $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تعریف شده باشد را دامنه تابع f و مجموعه تمام مقادیر ممکن z را بُرد تابع f می‌نامیم. به بیان دیگر، دامنه‌ی یک تابع n متغیره مجموعه نقاطی واقع در $\mathbb{R}^n$ و بُرد آن مجموعه نقاطی در $\mathbb{R}$ است. دامنه و بُرد توابع چند متغیره را مانند توابع یک متغیره می‌توان به‌دست آورد.

مثال توابع دو متغیره

تابع	دامنه	بُرد
$z = \sqrt{x-y}$	$x \geqslant y$	$[0, +\infty)$
$z = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$z = \sin(xy)$	$\mathbb{R}^2$	$[-1, 1]$

مثال توابع سه متغیره

تابع	دامنه	بُرد
$w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\mathbb{R}^3$	$[0, +\infty)$
$w = \frac{1}{\lvert x\rvert + \lvert y\rvert + \lvert z\rvert}$	$(x,y,z) \neq (0,0,0)$	$(0, +\infty)$
$w = xy \ln z$	$z > 0$	$(-\infty, +\infty)$

مثال دامنه‌ی تعریف هریک از توابع زیر را بیابید.

۱) $z = xy - 2$

۲) $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$

۳) $z = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

۴) $z = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

۵) $z = \frac{x^2-y^2}{1-\ln(x+y)}$

۶) $w = \frac{xyz}{\ln(1-x^2-y^2-z^2)}$

حل

۱) دامنه‌ی z برابر با $\mathbb{R}^2$ است

۲)

$$x^2+y^2-1 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2+y^2 \geqslant 1 \Longrightarrow D = \{(x,y) | x^2+y^2 \geqslant 1\}$$

بنابراین دامنه‌ی z نقاط خارج و روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است.

۳)

$$16-x^2-y^2 > 0 \Longrightarrow x^2+y^2 < 16 \Longrightarrow D = \{(x,y) | x^2+y^2 < 16\}$$

بنابراین دامنه‌ی z نقاط داخل دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۴ است.

۴) دامنه‌ی z برابر است با مجموعه‌ی تمام نقاط (x,y) از صفحه که $x \neq 0$ است.

۵)

$$\begin{cases} x+y>۰ \\ ۱-\ln(x+y)\neq ۰ \Longrightarrow \ln(x+y)\neq ۱ \Longrightarrow x+y\neq e \end{cases}$$

$$D=\{(x,y)|x+y>۰, x+y\neq e\}$$

۶)

$$\begin{cases} ۱-x^۲-y^۲-z^۲>۰ \Longrightarrow x^۲+y^۲+z^۲<۱ \\ \ln(۱-x^۲-y^۲-z^۲)\neq ۰ \Longrightarrow ۱-x^۲-y^۲-z^۲\neq e^۰ \end{cases}$$

$$D=\{(x,y,z)|x^۲+y^۲+z^۲<۱,\ \ x^۲+y^۲+z^۲\neq ۰\}$$

بنابراین دامنه‌ی w تمام نقاط داخل کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ به‌جز مبدأ است.

تست دامنه‌ی تابع $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^۲$ ۲) ربع اول ۳) ربع سوم ۴) $\mathbb{R}^۲-\{۰,۰\}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$x\geqslant ۰\ ,\ \ y\geqslant ۰ \Longrightarrow \text{ربع اول}$$

تست دامنه‌ی تابع $f(x,y)=\sqrt{۴x^۲+۹y^۲-۳۶}$ کدام است؟

۱) نقاط خارج و روی هذلولی به مرکز مبدأ
۲) نقاط خارج و روی بیضی به مرکز مبدأ
۳) نقاط خارج و روی دایره به شعاع ۶
۴) نقاط خارج و روی سهمی به مرکز مبدأ

حل گزینه‌ی ۲.

$$۴x^۲+۹y^۲-۳۶\geqslant ۰ \Longrightarrow ۴x^۲+۹y^۲\geqslant ۳۶ \Longrightarrow \frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}\geqslant ۱$$

بنابراین دامنه‌ی f نقاط خارج و روی بیضی به مرکز مبدأ است.

مثال بُرد هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $z=۲\sin(xy)+۱$
۲) $z=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$
۳) $z=\dfrac{|x|}{|x|+|y|}$
۴) $z=\sqrt{\dfrac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}}$

حل

۱)

$$-۱\leqslant \sin(xy)\leqslant ۱ \Longrightarrow -۲\leqslant ۲\sin(xy)\leqslant ۲ \Longrightarrow$$
$$-۱\leqslant ۲\sin(xy)+۱\leqslant ۳ \Longrightarrow -۱\leqslant z\leqslant ۳ \Longrightarrow R_z=[-۱,۳]$$

۲) از ضابطه‌ی تابع نتیجه می‌شود:

(۱) $z \geqslant 0$، از طرف دیگر:

(۲) $x^2 + y^2 \geqslant 0 \Longrightarrow -x^2 - y^2 \leqslant 0 \Longrightarrow 9 - x^2 - y^2 \leqslant 9 \Longrightarrow -3 \leqslant z \leqslant 3$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $R_z = [0, 3]$

(۳) $|x| + |y| \geqslant |x| \geqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{|x|}{|x| + |y|} \leqslant 1 \Longrightarrow R_z = [0, 1]$

(۴) $x^2 \geqslant 0, y^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 \geqslant x^2 - y^2 \Longrightarrow 1 \geqslant \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Longrightarrow R_z = [0, 1]$

تست بُرد تابع با ضابطه‌ی $w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \{0\}$ ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $(0, 1)$ ۴) $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \Longrightarrow R_z = (0, +\infty)$$

حد توابع چند متغیره

۹ـ۶ مفهوم حد یک تابع چند متغیره شبیه مفهوم آن برای توابع یک متغیره است. برای روشن شدن مطلب، تعریف را فقط برای توابع دو متغیره ارائه می‌دهیم. حالت کلی نیز شبیه همین خواهد بود.

۹ـ۷ فرض می‌کنیم f یک تابع دو متغیره باشد، می‌گوییم حد تابع f در نقطه (a, b) برابر با l است، اگر هنگامی که نقطه (x, y) به نقطه (a, b) نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، مقدار $f(x, y)$ به عدد حقیقی l نزدیک و نزدیک‌تر شود، و می‌نویسند:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

می‌توان نشان داد که عدد حقیقی L در صورت وجود منحصر به فرد است.

۹ـ۸ دقت کنید که هنگام محاسبه‌ی حد تابع $f(x, y)$ در نقطه‌ی (a, b)، این تابع در یک همسایگی به مرکز (a, b) به جز احتمالاً در خود (a, b) باید تعریف شده باشد. همسایگی در توابع دو متغیره به معنی یک گوی باز (دایره باز) به مرکز (a, b) است.

مثال حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{y + 3}$ ۲) $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},0)} \sin(\frac{1}{x + y})$ ۳) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{\ln x} \cdot e^{\ln(-y)}$

حل

(۱) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{y + 3} = \frac{\sqrt{9 - 0}}{0 + 3} = \frac{3}{3} = 1$

(۲) $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},0)} \sin(\frac{1}{x + y}) = \sin(\frac{1}{\frac{\pi}{4} + 0}) = \sin(\frac{4}{\pi})$

(۳) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{\ln x} \cdot e^{\ln(-y)} = e^{\ln 1} \cdot e^{\ln 1} = e^0 \times e^0 = 1$

۹ـ۹ حد توابع چند متغیره در صورت وجود منحصر به فرد است. یعنی اگر حد تابع وجود داشته باشد، (x,y) از هر جهت و مسیر که به نقطه‌ی (a,b) نزدیک شود (مسیرهای متفاوت خطی و منحنی و...) مقدار f به عدد l نزدیک می‌شود.

۹ـ۱۰ اگر حد تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ در نقطه (a,b) برابر L باشد، آنگاه

$$\lim_{(a,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \ , \quad \lim_{(x,b)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

این قضیه می‌گوید که اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$، آنگاه حد تابع f وقتی که نقطه (x,y) در مسیرهای $x=a$ و $y=b$ به نقطه (a,b) میل کند، برابر L است.

۹ـ۱۱ نکته: از این قضیه برای اثبات عدم وجود حد یک تابع می‌توان استفاده کرد.

مثال نشان دهید تابع $z=\dfrac{x^۲-xy+۱}{x+y^۲}$ در نقطه‌ی $(۱,۰)$ حد دارد.

حل

$$\lim_{(x,۰)\to(۱,۰)} \frac{x^۲-xy+۱}{x+y^۲}=\lim_{(x,۰)\to(۱,۰)} \frac{x^۲+۱}{x}=\frac{۲}{۱}$$

$$\lim_{(۱,y)\to(۱,۰)} \frac{x^۲-xy+۱}{x+y^۲}=\lim_{(۱,y)\to(۱,۰)} \frac{۲-y}{۱+y^۲}=\frac{۲}{۱}=۲$$

در نتیجه:

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۰)} \frac{x^۲-xy+۱}{x+y^۲}=۲$$

مثال نشان دهید تابع $z=\dfrac{۲x^۲+y^۲}{x^۲-۲y^۲}$ در نقطه $(۰,۰)$ حد ندارد.

حل

$$\lim_{(x,۰)\to(۰,۰)} \frac{۲x^۲+y^۲}{x^۲-۲y^۲}=\lim_{(x,۰)\to(۰,۰)} \frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$$

$$\lim_{(۰,y)\to(۰,۰)} \frac{۲x^۲+y^۲}{x^۲-۲y^۲}=\lim_{(۰,y)\to(۰,۰)} \frac{y^۲}{-۲y^۲}=\frac{-۱}{۲}$$

در نتیجه $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \dfrac{۲x^۲+y^۲}{x^۲-۲y^۲}$ وجود ندارد.

تست مقدار $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \dfrac{۲x^۲-۳y^۲}{x^۲+y^۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۰ ۴) وجود ندارد

حل گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{(x,۰)\to(۰,۰)} \frac{۲x^۲-۰}{x^۲+۰}=۲, \quad \lim_{(۰,y)\to(۰,۰)} \frac{۰-۳y^۲}{y^۲}=-۳$$

تست مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(۱,۱)} \tan^{-۱} \frac{x-y}{x+y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) وجود ندارد ۴) π

حل گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{(x,۱)\to(۱,۱)} \tan^{-۱} \frac{۱-y}{۱+y} = \tan^{-۱} \frac{۱-۱}{۱+۱} = \tan^{-۱}(۰) = ۰$$

$$\lim_{(۱,y)\to(۱,۱)} \tan^{-۱} \frac{x-۱}{x+۱} = \tan^{-۱} \frac{۱-۱}{۱+۱} = \tan^{-۱}(۰) = ۰$$

تست مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y(x^۲+۱)}{x}$ در امتداد مسیر نیمساز ناحیه‌ی دوم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱− ۴) وجود ندارد

حل گزینه‌ی ۳. خط $y = -x$ نیمساز ناحیه‌ی دوم است، لذا:

$$\lim_{x\to۰} \frac{(-x)(x^۲+۱)}{x} = \lim_{x\to۰} -(x^۲+۱) = -۱$$

۹ـ۱۲ چون در مسیرهای مختلفی نقطه‌ی (x,y) می‌تواند به نقطه (a,b) میل کند، لذا قضیه‌ی کلی‌تر زیر را می‌آوریم:

قضیه: اگر حد تابع دو متغیره f هنگامی‌که (x,y) بر روی دو مسیر متمایز به نقطه‌ی (a,b) نزدیک می‌شود متفاوت باشد، آنگاه حد تابع f در این نقطه وجود ندارد.

۹ـ۱۳ نتیجه قضیه: اگر

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) \neq \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$$

آنگاه تابع f در نقطه (a,b) حد ندارد.

تبصره: در $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y))$، ابتدا x را ثابت فرض کرد، $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ را درصورت وجود، محاسبه کنیم. سپس حد عبارت به‌دست آمده را که تابعی از x است وقتی‌که $x \to a$ پیدا می‌کنیم.

تبصره: در $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))$، ابتدا y را ثابت فرض کرده، $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ را در صورت وجود،محاسبه کنیم. سپس حد عبارت به‌دست آمده را که تابعی از y است وقتی که $y \to b$ پیدا می‌کنیم.

مثال آیا تابع $f(x,y) = \frac{x^۲-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ در نقطه $(۰,۰)$ حد دارد.

حل

$$\lim_{x\to۰}(\lim_{y\to۰} \frac{x^۲-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}) = \lim_{x\to۰} \frac{x^۲}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to۰} \frac{x^۲\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to۰} x\sqrt{x} = ۰$$

$$\lim_{y\to۰}(\lim_{x\to۰} \frac{x^۲-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}) = \lim_{y\to۰} \frac{۰}{-\sqrt{y}} = ۰$$

بنابراین تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ حدی برابر ۰ دارد.

تست مقدار $\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{xy}\cos(\pi xy)$ کدام است؟

۱) وجود ندارد ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 1} e^{xy}\cos(\pi xy) = \lim_{x\to 0}(e^{x}\cos(\pi x)) = e^{0}\times\cos 0 = 1$$

$$\lim_{y\to 1}(\lim_{x\to 0} e^{xy}\cos(\pi xy)) = \lim_{y\to 1}(e^{y}\cos(0)) = 1\times\cos 0 = 1$$

مثال نشان دهید که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2}$ وجود ندارد.

حل برای این‌که حد در نقطه‌ای موجود باشد، حد باید در امتداد هر مسیری که به آن نقطه نزدیک می‌شویم یکسان باشد. بنابراین، اگر روی مسیرها حدود متفاوت به‌دست آید، در می‌یابیم که تابع در نقطه‌ی موردنظر حد ندارد. به‌ازای هر مقدار m، تابع f دارای مقدار ثابتی روی خط $y=mx$ $x\neq 0$ می‌باشد، زیرا

$$f(x,y)\big|_{y=mx} = \frac{x(mx)}{x^2-(mx)^2} = \frac{mx^2}{x^2(1-m^2)} = \frac{m}{1-m^2}$$

بنابراین وقتی‌که (x,y) به سمت $(0,0)$ در امتداد خط $y=mx$ میل می‌کند f دارای همین حد خواهد بود:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (f(x,y)\big|_{y=mx}) = \frac{m}{1-m^2}$$

مقدار حد با تغییر m، تغییر می‌کند. بنابراین عدد منحصر به‌فردی وجود ندارد که وقتی‌که (x,y) به $(0,0)$ میل می‌کند بتوانیم آن عدد را حد f بنامیم. بنابراین حد وجود ندارد.

تست مقدار $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xye^{xy}}{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) وجود ندارد

حل گزینه‌ی ۴. حد داده شده را روی مسیر $y=mx$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xye^{xy}}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2e^{mx^2}}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{me^{mx^2}}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

چون حد حاصل به m وابسته است، پس حد وجود ندارد.

پیوستگی

۹ـ۱۴ پیوستگی توابع دو متغیره شبیه توابع یک متغیره با استفاده از حد تعریف می‌گردد.

۹ـ۱۵ $f(x,y)$ را در نقطه‌ی (a,b) پیوسته می‌نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱) f در (a,b) تعریف شده باشد، یعنی $f(a,b)$ معین باشد.

۲) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجود باشد.

۳) $f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

اگر یکی از این شرایط برقرار نباشد، تابع f را در نقطه‌ی (a,b) ناپیوسته می‌نامیم.

مثال نشان دهید تابع $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{y}}$ در نقطه‌ی $(۰,۴)$ پیوسته است.

حل

$$f(۰,۴)=\frac{۰}{\sqrt{۴}}=\frac{۰}{۲}=۰,\quad \lim_{(x,y)\to(۰,۴)}=\frac{x}{\sqrt{۴}}=\frac{۰}{۲}=\frac{۰}{۲}=۰$$

چون $\lim_{(x,y)\to(۰,۴)} f(x,y)=f(۰,۴)$، در نتیجه تابع f در نقطه‌ی $(۰,۴)$ پیوسته است.

مثال نشان دهید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy+y^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در نقطه‌ی $(۰,۰)$ ناپیوسته است.

حل

$$f(۰,۰)=۰\ ,\ \lim_{x\to۰}(\lim_{y\to۰}\frac{xy+y^۲}{x^۲+y^۲})=\lim_{x\to۰}\frac{۰}{x^۲}=۰\ ,\ \lim_{y\to۰}(\lim_{x\to۰}\frac{xy+y^۲}{x^۲+y^۲})=\lim_{y\to۰}\frac{y^۲}{y^۲}=۱$$

پس $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ وجود ندارد، در نتیجه تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ ناپیوسته است.

مثال تابع $f(x,y)=\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$, $(x,y)=(۰,۰)$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توان $f(۰,۰)$ را چنان تعریف کرد که f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ پیوسته باشد.

حل حد $f(x,y)$ را روی مسیر $y=mx$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲-m^۲x^۲}{x^۲+m^۲x^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲(۱-m^۲)}{x^۲(۱+m^۲)}=\frac{۱-m^۲}{۱+m^۲}$$

چون حد حاصل به m وابسته است، پس $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ وجود ندارد، در نتیجه $f(۰,۰)$ به هر شکل معرفی شود در نقطه $(۰,۰)$ نمی‌تواند دارای پیوستگی باشد.

تست تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در نقطه‌ی $(۰,۰)$ از لحاظ پیوستگی کدام است؟

۱) پیوسته است
۲) ناپیوسته است
۳) فقط پیوستگی چپ دارد
۴) فقط پیوستگی راست دارد

حل گزینه‌ی ۲. حد $f(x,y)$ را روی مسیر $y=mx$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{\sin xy}{x^۲+y^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{\sin(mx^۲)}{x^۲+m^۲x^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{m}{۱+m^۲}\frac{\sin(mx^۲)}{mx^۲}=\frac{m}{۱+m^۲}$$

چون حد حاصل به m وابسته است، پس $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ وجود ندارد. درنتیجه تابع در $(۰,۰)$ دارای ناپیوستگی است و در بقیه نقاط دارای پیوستگی است.

تست اگر

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ a & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

بر $\mathbb{R}^۲$ پیوسته باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ϕ

حل گزینه‌ی ۳.

$$f(۰,۰)=a\ ,\ \lim_{x\to ۰}(\lim_{y\to ۰}\frac{xy}{|x|+|y|})=\lim_{x\to ۰}(۰)=۰\ \ ,\ \ \lim_{y\to ۰}(\lim_{x\to ۰}\frac{xy}{|x|+|y|})=\lim_{y\to ۰}(۰)=۰$$

پس $a=۰$.

۹ـ۱۶ ترکیب توابع پیوسته در هر نقطه‌ای که توابع پیوسته باشد، پیوسته است. به عبارت دیگر مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب، مضارب ثابت، خارج قسمت‌ها و توان‌های پیوسته در دامنه تعریفشان پیوسته می‌باشند. به ویژه توابع چند جمله‌ای و گویای دو متغیره درکلیه نقاط دامنه تعریفشان پیوسته هستند. بنابراین توابع زیر

$$x^۲-y^۲\ ,\ e^{x-y}\ \ ,\ \ \sin\frac{xy}{x^۲+۱}\ \ ,\ \ \ln(۱+x^۲y^۲)$$

در هر نقطه (x,y) پیوسته می‌باشند.

مثال فاصله‌ی پیوستگی تابع f را تعیین کنید.

۱) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^۲-y^۲}$ ، ۲) $f(x,y)=\dfrac{x^۲+y^۲}{x^۲+y^۲-۱}$ ، ۳) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲y^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$

حل

۱)

$$x^۲-y^۲\neq ۰\Longrightarrow y^۲\neq x^۲\Longrightarrow y\neq\pm x$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{\text{تمام نقاط روی نیمساز ربع اول و دوم}\}$$

۲) $x^۲+y^۲-۱\neq ۰\Longrightarrow x^۲+y^۲\neq ۱\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\text{محیط دایره‌ای به شعاع ۱}\}$

۳)

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{x^۲y^۲}{x^۲+y^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{m^۲x^۴}{x^۲+m^۲x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{m^۲x^۲}{۱+m^۲}=۰$$

$y=mx$

تابع f در تمام نقاط حتی در $(۰,۰)$ دارای پیوستگی است.

مشتقات جزئی (نسبی)

۹ـ۱۷ وقتی که تمام متغیرهای یک تابع به جز یک متغیر را ثابت نگه‌داریم و نسبت به این متغیر مشتق بگیریم آنگاه مشتق جزئی به دست آورده‌ایم.

۹ـ۱۸ تابع z به معادله‌ی $z = f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم:

۱) اگر y ثابت نگه‌داشته شود، z تنها تابعی از x خواهد بود و مشتق آن نسبت به متغیر x عبارت است از:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

درصورت وجود حد، مشتق حاصل مشتق جزئی نسبت به x است.

۲) اگر x ثابت نگه‌داشته شود، z تنها تابعی از y خواهد بود و مشتق آن نسبت به متغیر y عبارت است از:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

درصورت وجود حد، مشتق حاصل جزئی نسبت به y است.

۹ـ۱۹ درحالت‌کلی این تابع، $z = f(x, y)$، دارای دو مشتق جزیی مرتبه‌ی اول است که به‌صورت‌های زیر نشان می‌دهند:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z_x,\ f'_x,\ f_x(x, y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y},\ z_y,\ f'_y,\ f_y(x, y)$$

مثال فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^۳ + y^۳}{x^۲ + y^۲} & (x, y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x, y) = (۰, ۰) \end{cases}$ ، مشتق‌های جزیی مرتبه‌ی اول را در $(۰, ۰)$ بیابید.

حل

$$f_x(۰, ۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(h, ۰) - f(۰, ۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{\frac{h^۳ + ۰}{h^۲ + ۰} - ۰}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{h}{h} = ۱$$

$$f_y(۰, ۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۰, h) - f(۰, ۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{\frac{۰ + h^۳}{۰ + h^۲} - ۰}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{h}{h} = ۱$$

مثال مشتق‌های جزیی مرتبه‌ی اول توابع داده شده را بنویسید.

۱) $f(x, y) = e^{xy} - \ln(xy)$

۲) $f(x, y) = x \sin y + y \cos x$

۳) $f(x, y) = \tan^{-۱} \frac{x}{y}$

۴) $f(x, y) = x^y$

حل

۱) $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - \frac{y}{xy}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - \frac{x}{xy}$

۲) $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y - y\sin x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y + \cos x$

۳) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{-x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2}$

۴) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$

مثال اگر $z = e^{xy}\sin(x+y)$ باشد، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه‌ی $(0,0)$ چقدر است؟

حل

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}\sin(x+y) + e^{xy}\cos(x+y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)} = 0 + e^0\cos(0) = 0 + 1 = 1$$

تست اگر $z = x^5 f(\frac{y}{x^2})$، حاصل عبارت $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - 5z$ کدام است؟

۱) $-z$ ۲) 0 ۳) $\frac{-y}{x^3} + f'(\frac{y}{x^3})$ ۴) $\frac{y}{x}\times f'^{1}(\frac{y}{x^2})$

حل گزینه‌ی ۲.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 f(\frac{y}{x^2}) - \frac{2xy}{x^4}f'(\frac{y}{x^2})\cdot x^5 = 5x^4 f(\frac{y}{x^2}) - 2x^2 y f'(\frac{y}{x^2})$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2}f'(\frac{y}{x^2})\cdot x^5 = x^3 f'(\frac{y}{x^2})$$
$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - 5z = 5x^5 f(\frac{y}{x^2}) - 2x^3 y f'(\frac{y}{x^2}) + 2yx^3 f'(\frac{y}{x^2}) - 5z = 0$$

تست اگر $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$، حاصل عبارت $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) $\sqrt{2}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

۹ـ۲۰ تعریف (۹ـ۱۸) قابل تعمیم است، یعنی مشتقات جزیی مرتبه اول تابع n متغیره که ضابطه آن به‌صورت $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ است، به‌قرار زیر است:

$$\frac{\partial z}{\partial X} = (\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n})$$

مثال مشتق‌های جزیی مرتبه اول تابع $f(x,y,z)=xe^z-ye^x+ze^{-y}$ را بیابید.

حل

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^z-ye^x\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=-e^x-ze^{-y}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial z}=xe^z+e^{-y}$$

رابطه‌ی بین پیوستگی و مشتقات جزیی

۹ـ۲۱ تابع $z=f(x,y)$ بدون این‌که در نقطه‌ای پیوسته باشد می‌تواند در آن نقطه نسبت به هر دو متغیر x و y دارای مشتقات جزیی باشد. این خاصیتی است مغایر با توابع یک متغیره، زیرا در مورد توابع یک متغیره مشتق پذیری تابع، پیوستگی آن را ایجاب می‌نماید. با این وجود اگر مشتقات جزیی $f(x,y)$ موجود بوده و در سراسر دایره‌ای به مرکز (a,b) پیوسته باشند آنگاه f در (a,b) پیوسته خواهد بود.

مثال تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در $(0,0)$ پیوسته نیست. ولی مشتقات جزیی f_x و f_y هر دو در $(0,0)$ موجوداند.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

مشتقات جزیی مراتب بالاتر

۹ـ۲۲ وقتی‌که از تابع $z=f(x,y)$ دوبار مشتق می‌گیریم، در حقیقت مشتق مرتبه‌ی دوم آن را به‌دست آورده‌ایم. مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم تابع $z=f(x,y)$ مشتقات جزیی مرتبه‌ی اول آن هستند و به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}=f_{xx}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}=f_{xy}\end{cases}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}=f_{yy}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}=f_{yx}\end{cases}$$

به‌طور مشابه مشتقات مرتبه‌ی سوم و بالاتر تعریف می‌شود.

۹ـ۲۳ فرض کنیم f تابعی با متغیرهای x,y باشد، اگر z_{xy} و z_{yx} در نقطه (a,b) پیوسته باشد، آنگاه

$$z_{xy}=z_{yx}$$

مثال مشتق‌های جزیی مرتبه دوم توابع زیر را بیابید.

$$۱)\ f(x,y)=x^۲y+y\sin x+e^{xy} \qquad ۲)\ f(x,y)=\frac{x}{y}+y\ln x$$

حل

۱)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲xy+y\cos x+ye^{xy}$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=۲y-y\sin x+y^۲e^{xy}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial x\partial y}=۲x+\cos x+e^{xy}+xye^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^۲+\sin x+xe^{xy}$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=x^۲e^{xy}\ ;\ \frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}=۲x+\cos x+xye^{xy}+e^{xy}$$

۲)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۱}{y}+\frac{y}{x}$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=\frac{-y}{x^۲}\ ;\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}=\frac{-۱}{y^۲}+\frac{۱}{x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-x}{y^۲}+\ln x$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=\frac{۲yx}{y^۴}=\frac{۲x}{y^۳}\ ;\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}=\frac{-۱}{y^۲}+\frac{۱}{x}$$

تست اگر $f(x,y)=\frac{x^۲}{y}+\frac{y^۲}{x}$، مقدار $\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}$ در نقطه $(۱,۱)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

حل گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۲x}{y}-\frac{y^۲}{x^۲}\Longrightarrow\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}=\frac{-۲x}{y^۲}-\frac{۲y}{x^۲}$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}\Big|_{(۱,۱)}=-۲-۲=-۴$$

دیفرانسیل کامل

۹ـ۲۴ تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ را در نظر می‌گیریم،

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$$

یعنی دیفرانسیل z برابر است با مجموع تمام دیفرانسیل‌های جزیی.

مثال دیفرانسیل کامل توابع زیر را بیابید.

$$۱)\ z = \sin^{-۱} x + \ln(xy) \quad ۲)\ z = xe^{y} - y\cos x$$

حل

۱)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy = (\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} + \frac{y}{xy})dx + (\frac{x}{xy})dy$$

۲)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy = (e^{y} + y\sin x)dx + (xe^{y} - \cos x)dy$$

تست اگر $z = xe^{xy}$ باشد، dz به ازای $x = y = ۱$ و $dx = ۰/۱$ و $dy = ۰/۲$ کدام است؟

۱) $۰/۱e$ ۲) $۰/۴e$ ۳) $۰/۳e$ ۴) $۰/۲e$

حل گزینه‌ی ۲.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy = (e^{xy} + xye^{xy})dx + (x^{۲}e^{xy})dy$$

به‌ازای $x = y = ۱, dx = ۰/۱, dy = ۰/۲$، داریم:

$$dz = (e+e)(۰/۱) + (e)(۰/۲) = ۰/۲e + ۰/۲e = ۰/۴e$$

۹ـ۲۵ تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ را در نظر می‌گیریم، اگر x و y توابع یک متغیره‌ی مشتق‌پذیری از متغیر دیگری مانند t باشند، آنگاه:

$$dx = \frac{dx}{dt}\cdot dt \ , \ dy = \frac{dy}{dt}\cdot dt$$

مثال فرض کنید $z = xy - \frac{y}{x}$ که در آن $x = ۱ - ۲t, y = t^{۲}$، آنگاه dz را بیابید.

حل

$$dx = -۲dt \quad , \quad dy = ۲tdt$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy = (y + \frac{y}{x^{۲}})(-۲dt) + (x - \frac{۱}{x})(۲tdt)$$

۹ـ۲۶ تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. اگر x و y توابعی قابل دیفرانسیل‌گیری از دو متغیره مانند r و t باشند، آنگاه:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial r}dr$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial r}dr$$

مثال دیفرانسیل کامل $z = x^۲ + y^۲$ که در آن $x = \frac{r}{t}$ و $y = \frac{t}{r}$، را بیابید.

حل

$$dx = \frac{-r}{t^۲}dt + \frac{۱}{t}dr \;\; ; \;\; dy = \frac{۱}{r}dt - \frac{t}{r^۲}dr$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy = (۲x)(-\frac{r}{t^۲}dt + \frac{۱}{t}dr) + (۲y)(\frac{۱}{r}dt - \frac{t}{r^۲}dr)$$

تست اگر $z = \sqrt{xy}, x = e^{rt}, y = rt$، آنگاه dz به ازای $t = ۱, r = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{e}{۲}(dt + dr)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(dt + dr)$ ۳) $(۱ + e)(dt + dr)$ ۴) $\frac{۱}{۲}(e^{\frac{۱}{۲}})(dt + dr)$

حل گزینه‌ی ۴.

$$dx = re^{rt}dt + te^{rt}dr \;\; ; \;\; dy = rdt + tdr$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy = \frac{y}{۲\sqrt{xy}}(re^{rt}dt + te^{rt}dr) + \frac{x}{۲\sqrt{xy}}(rdt + tdr)$$
$$r = ۱, t = ۱ \Longrightarrow x = e \;\; ; \;\; y = ۱ \times ۱ = ۱$$
$$dz = \frac{e}{۲\sqrt{e}}(dt + dr) + \frac{e}{۲\sqrt{e}}(dt + dr) = \frac{۱}{۲}e^{\frac{۱}{۲}}(dt + dr)$$

۹ـ۲۷ در حالت کلی دیفرانسیل کامل $z = f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ برابر مجموع تمام دیفرانسیل‌های جزیی است. یعنی:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_۱}dx_۱ + \frac{\partial z}{\partial x_۲}dx_۲ + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n$$

مثال اگر $w = z\cos(xy)$، آنگاه dw را در نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$ بیابید.

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$
$$dw = -yz\sin(xy)\cdot dx - xz\sin(xy)\cdot dy + \cos(xy)\cdot dz$$
$$dw|_{(۰,۰,۱)} = ۰ \times dx - ۰ \times dy + \cos(۰) \times dz = dz$$

دیفرانسیل مراتب بالاتر

۹ـ۲۸ دیفرانسیل مرتبه اول تابع $z = f(x, y)$ به‌صورت زیر است:

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

از رابطه فوق باتوجه به اینکه dx و dy نمو ثابتی هستند، دیفرانسیل می‌گیریم:

$$d(dz) = d^۲z = z_{xx}dx^۲ + ۲z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^۲$$

رابطه فوق را می‌توان به‌صورت ماتریس نوشت:

$$[d^2z] = [dx \quad dy] \begin{bmatrix} z_{x^2} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

و برای تابع $z = f(x, y, t)$ خواهیم داشت:

$$[d^2z] = [dx \quad dy \quad dt] \begin{bmatrix} z_{x^2} & z_{xy} & z_{xt} \\ z_{yx} & z_{y^2} & z_{yt} \\ z_{tx} & z_{ty} & z_{t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های فوق را ماتریس هشین نامند و با H نشان داده می‌شود.

مثال تابع $z = xy + x^4 + y^3$ مفروض است. دیفرانسیل مرتبه دوم z را به‌دست آورید و آن را به‌صورت ماتریس نشان دهید.

حل

$$z_x = y + 4x^3 \Longrightarrow z_{xx} = 12x^2 \;\; ; \;\; z_{xy} = 1 \;\; ; \;\; z_y = x + 3y^2 \Longrightarrow z_{yy} = 6y$$

$$d^2z = (12x^2)dx^2 + 2dxdy + (6y)dy^2 \;\; ; \;\; [d^2z] = [dx \quad dy] \begin{bmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

تست دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم تابع $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ در ازای $x = y = 1$ و $dx = dy = 0/1$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۰/۰۴ ۳) ۰/۰۶ ۴) ۰/۰۱

حل گزینه‌ی ۱.

$$z_x = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \Longrightarrow z_{xx} = \frac{-2yx}{x^4} = \frac{-2y}{x^3} \; ; z_{xy} = \frac{-1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$z_y = \frac{-x}{y^2} - \frac{1}{x} \Longrightarrow z_{yy} = \frac{2xy}{y^4} = \frac{2x}{y^3}$$

$$d^2z = (\frac{-2y}{x^3})dx^2 + 2(\frac{-1}{y^2} + \frac{1}{x^2})dxdy + (\frac{2x}{y^3})dy^2$$

به ازای $x = y = 1$ و $dx = dy = 0/1$ داریم:

$$d^2z = (-2)(0/01) + 2(-1+1)(0/01) + (2)(0/01) = 0$$

۲۹ـ۹ به‌طورکلی، دیفرانسیل مرتبه‌ی nام تابع $z = f(x, y)$ به‌صورت زیر است:

$$d_z^n = (z_x dx + z_y dy)^n$$

در رابطه‌ی فوق توان n برای z_x و z_y به مفهوم مشتقات جزیی بوده و برای dxو dy به مفهوم توان جبری است.

مشتق کامل

۹ـ۳۰ اگر $z = f(x,y)$ و x و y توابعی قابل دیفرانسیل‌گیری نسبت به t باشند، آنگاه z تابعی مشتق‌پذیر از t است و:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

۹ـ۳۱ به‌طور مشابه اگر $w = f(x,y,z)$ و x و y و z توابعی قابل دیفرانسیل‌گیری نسبت به t باشند، آنگاه w تابعی مشتق‌پذیر از t است و:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

مثال اگر $z = xy^۲ + ۲y$ و $x = \frac{۱}{۲}e^{۲t}$ و $y = t^۲$ باشد، مطلوب است $\frac{dz}{dt}$.

حل

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = (y^۲)(e^{۲t}) + (۲xy + ۲)(۲t)$$

$$\frac{dz}{dt} = t^۴e^{۲t} + (t^۲e^{۲t} + ۲)(۲t) = t^۴e^{۲t} + ۲t^۳e^{۲t} + ۴t$$

مثال اگر $z = x^۲ + y^۲$، $x = \sin t$ و $y = e^t$، مقدار $\frac{dz}{dt}$ در $t = ۰$ چقدر است؟

حل

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = (۲x)(\cos t) + (۲y)(e^t)$$

$$t = ۰ \Longrightarrow x = \sin ۰ = ۰ \ , \ y = e^{۰} = ۱$$

$$\frac{dz}{dt}\Big|_{t=۰} = (۲ \times ۰)(\cos ۰) + (۲ \times ۱)(e^{۰}) = ۰ + ۲ = ۲$$

تست اگر $w = xy + z$، $x = \cos t$، $y = \sin t$ و $z = t$ باشد، $\frac{dw}{dt}$ کدام است؟

۱) $۱ + \cos ۲t$ ۲) $\cos ۲t$ ۳) $\sin ۲t$ ۴) $۱ - \sin ۲t$

حل گزینه‌ی ۱.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (۱)(۱) = (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + ۱$$

$$\frac{dw}{dt} = \cos^۲ t - \sin^۲ t = \cos ۲t + ۱$$

۹ـ۳۲ اگر $z = f(x,y)$ و x و y توابعی قابل دیفرانسیل‌گیری نسبت به r و t باشند. آنگاه z تابعی مشتق‌پذیر از r و t است و:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

مثال اگر $z = e^x + \ln y$ و $x = rt$ و $y = \frac{r}{t}$، مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial t}$ و $\frac{\partial z}{\partial r}$.

حل

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (e^x)(r) + (\frac{1}{y})(\frac{-r}{t^2}) = re^{rt} - (\frac{t}{r})(\frac{r}{t^2}) = re^{rt} - \frac{1}{t}$$
$$\frac{\partial z}{\partial r} = (e^x)(t) + (\frac{1}{y})(\frac{1}{t}) = te^{rt} + \frac{1}{r}$$

مثال اگر $z = x^2 + xy$، $x = r^2 + s^2$ و $y = 3r - 2s$، حاصل $\frac{\partial z}{\partial s}$ در نقطه‌ی $r = s = 1$ چقدر است؟

حل

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} = (2x + y)(2s) + (x)(-2)$$
$$r = s = 1 \Longrightarrow x = 1 + 1 = 2 \ , \ y = 3 - 2 = 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial s}|_{r=s=1} = (4 + 1)(2) + (2)(-2) = 10 - 4 = 6$$

تست اگر $u = x^2 + y^2$، $x = 4s - 3t$ و $y = st^2$ ، مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ در نقطه $s = 0$ و $t = 0$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

حل گزینه‌ی ۴.

از قاعده‌ی مشتق کامل می‌توان استفاده کرد ولی جایگزینی و محاسبه مستقیم ساده‌تر است:

$$u = (4s - 3t)^2 + (st^2)^2 = 16s^2 + 9t^2 - 24st + s^2t^4$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 18t - 24s + 4s^2t^3 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 18 + 12s^2t^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{s=t=0} = 18 + 0 = 18$$

تست اگر $z = f(x - y^2 \text{ و } x^2y^2)$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ به ازای $x = 1$ و $y = 1$ کدام است؟

۱) $f_1' + f_2'$ ۲) $f_1' + 2f_2'$ ۳) $2f_1' + f_2'$ ۴) $2f_2'$

حل گزینه‌ی ۲.

$$z = f(\underbrace{x - y^2}_{f_1}, \underbrace{x^2y^2}_{f_2})$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial f_1}.\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial f_2}.\frac{\partial f_2}{\partial x} = f_1'(1) + f_2'(2xy^2) \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)} = f_1' + 2f_2'$$

مشتق تابع ضمنی

۹ـ۳۳ تابع ضمنی $F(x,y,z)=0$ مفروض است که $z=f(x,y)$ در آن صدق می‌نماید، این تابع دارای دو مشتق ضمنی به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$$

مثال اگر $xe^{yz}-y\ln(xz)=0$ مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

حل

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{e^{yz}-y.\frac{z}{xz}}{xye^{yz}-y.\frac{x}{xz}}=-\frac{e^{yz}-\frac{y}{x}}{xye^{yz}-\frac{y}{z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{xze^{yz}-\ln(xz)}{xye^{yz}-y.\frac{x}{xz}}=-\frac{xze^{yz}-\ln(xz)}{xye^{yz}-\frac{y}{z}}$$

مثال اگر $\sin x\cdot e^{\cos y}=-e^{x+y+z}+1$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه‌ی $(0,0,0)$ چقدر است؟

حل

$$\sin x\cdot e^{\cos y}+e^{x+y+z}-1=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\cos x\cdot e^{\cos y}+e^{x+y+z}}{e^{x+y+z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0,0)}=-\frac{e+e^{0}}{e^{0}}=-\frac{e+1}{1}=-e-1$$

تست اگر $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1=0$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(2,3,6)$ کدام است؟

۱) -9 ۲) 4 ۳) -4 ۴) 9

حل گزینه‌ی ۳.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{-\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{z^2}}=-\frac{z^2}{y^2}=-(\frac{z}{y})^2\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,3,6)}=-(\frac{6}{3})^2=-4$$

توابع همگن و قضیه‌ی اویلر

۹ـ۳۴ اگر تابع $z = f(x,y)$ دارای این خاصیت باشد که به ازای هر مقدار ثابت λ، داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

در این‌صورت تابع z را یک تابع همگن یا متجانس خوانند و n را درجه‌ی همگنی تابع f نامند.

مثال درجه‌ی همگنی هر یک از توابع زیر را (در صورت همگن بودن) تعیین کنید.

۱) $f(x,y) = x^۲ - xy + y^۲$

۲) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^۳ + y^۳}$

۳) $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y} - \ln(\dfrac{y}{x})$

۴) $f(x,y) = e^{xy} + ۲xy$

حل

۱) $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^۲ - (\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^۲ = \lambda^۲(x^۲ - xy + y^۲) = \lambda^۲ f(x,y)$

پس تابع f همگن از درجه‌ی ۲ است.

۲) $f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^۳ + (\lambda y)^۳} = \dfrac{\lambda^۲(xy)}{\lambda^۳(x^۳ + y^۳)} = \lambda^{-۱} f(x,y)$

پس تابع f همگن از درجه‌ی -۱ است.

۳)
$$f(\lambda x, \lambda y) = \sin\frac{\lambda x}{\lambda y} - \ln(\frac{\lambda y}{\lambda x}) = \lambda^۰ f(x,y)$$

پس تابع f همگن از درجه‌ی ۰ است.

۴) $f(\lambda x, \lambda y) = e^{(\lambda x)(\lambda y)} + ۲(\lambda x)(\lambda y) = e^{\lambda^۲ xy} + ۲\lambda^۲(xy)$ پس تابع f همگن نیست.

تست کدام تابع غیر همگن است؟

۱) $z = \ln\dfrac{x^۲ + y^۲}{xy}$

۲) $z = xe^y + ye^x$

۳) $z = \sqrt{\dfrac{x^۲ + y^۲}{xy}}$

۴) $z = x^۳ \sin\dfrac{y}{x} + y^۲ x\cos\dfrac{y}{x}$

حل گزینه‌ی ۲.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \ln\frac{\lambda^۲x^۲ + \lambda^۲y^۲}{\lambda x \lambda y} = \ln\frac{\lambda^۲(x^۲ + y^۲)}{\lambda^۲(xy)} = \lambda^۰ \ln\frac{x^۲ + y^۲}{xy}$$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x e^{\lambda y} + \lambda y e^{\lambda x} \rightarrow$ غیر همگن

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\frac{\lambda^۲x^۲ + \lambda^۲y^۲}{\lambda x \lambda y}} = \sqrt{\frac{\lambda^۲(x^۲ + y^۲)}{\lambda^۲(xy)}} = \lambda^۰\sqrt{\frac{x^۲ + y^۲}{xy}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^۳ \sin\frac{\lambda y}{\lambda x} + (\lambda^۲ y^۲)(\lambda x)\cos\frac{\lambda y}{\lambda x}\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda^۳(x^۳\sin\frac{y}{x} + y^۲ x\cos\frac{y}{x})$$

تست تابع $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{y}{x}}+\log x-\log y$، همگن از چه درجه‌ای است؟

۱) همگن نیست ۲) صفر ۳) یک ۴) دو

حل گزینه‌ی ۲.

$$\begin{aligned}f(\lambda x,\lambda y)&=e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}+e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}+\log(\lambda x)-\log(\lambda y)\\&=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{y}{x}}+\log\lambda+\log x-\log\lambda-\log y\\&=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{y}{x}}+\log x-\log y=\lambda^{\circ}f(x,y)\end{aligned}$$

۹ـ۳۵ قضیه‌ی اویلر: اگر تابع $z=f(x,y)$ همگن از درجه‌ی n و مشتقات جزیی مرتبه‌ی اول آن نیز وجود داشته باشد، آنگاه:

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=n\cdot z$$

مثال اگر $z=\sqrt{xy+x^{۲}+y^{۲}}$، آنگاه مقدار $x\cdot z_x+y\cdot z_y$ را بیابید.

حل

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{(\lambda x)(\lambda y)+(\lambda x)^{۲}+(\lambda y)^{۲}}=\sqrt{\lambda^{۲}(xy+x^{۲}+y^{۲})}=\lambda\sqrt{xy+x^{۲}+y^{۲}}$$

پس $n=۱$، در نتیجه:

$$x\cdot z_x+y\cdot z_y=۱\times z=z=\sqrt{xy+x^{۲}+y^{۲}}$$

تست اگر $z=\frac{x^{۳}}{۲y^{۳}}-\frac{۲y^{۳}}{x^{۳}}$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-z$ ۳) z ۴) $۳z$

حل گزینه‌ی ۱.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^{۳}}{۲(\lambda y)^{۳}}-\frac{۲(\lambda y)^{۳}}{(\lambda x)^{۳}}=\lambda^{\circ}(\frac{x^{۳}}{۲y^{۳}}-\frac{۲y^{۳}}{x^{۳}})\Longrightarrow n=۰$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y=۰\times z=۰$$

۹ـ۳۶ هرگاه $z=f(x,y)$ تابعی همگن از درجه‌ی n باشد، آنگاه همواره روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&x\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+y\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}=(n-۱)\frac{\partial z}{\partial x}\\&y\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}+x\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}=(n-۱)\frac{\partial z}{\partial y}\\&x^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+۲xy\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}+y^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=n(n-۱)z\end{aligned}$$

تست اگر $z = x^۲ e^{\frac{x}{y}} - xy$، آنگاه $A = x^۲ \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + ۲xy \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} + y^۲ \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}$ کدام است؟

۱) $۶z$ ۲) z ۳) $۳z$ ۴) $۲z$

حل گزینه‌ی ۴.

$$z(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^۲ e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}} - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^۲ (x^۲ e^{\frac{x}{y}} - xy) \Longrightarrow n = ۲$$

$$A = n(n-۱)z = ۲ \times ۱ \times z = ۲z$$

ژاکوبین

۹ـ۳۷ دستگاه معادلات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f(x, y, u, v) = ۰ \\ g(x, y, u, v) = ۰ \end{cases}$$

فرض می‌کنیم u و v توابعی از متغیرهای مستقل x و y بوده، یعنی $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ و f و g را توابعی دیفرانسیل‌پذیر می‌گیریم. طبق قانون تابع مرکب از f و g نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} f_x + f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = ۰ \\ g_x + g_u \cdot u_x + g_v \cdot v_x = ۰ \end{cases}$$

اگر از f و g نسبت به y مشتق بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} f_y + f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y = ۰ \\ g_y + g_u \cdot u_y + g_v \cdot v_y = ۰ \end{cases}$$

از حل دستگاه‌های فوق u_x، v_x، u_y و v_y به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_v \\ g_y & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_x \\ g_u & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_y \\ g_u & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}$$

این مشتقات را از دستگاه‌های فوق با استفاده از دستور کرامر نوشته‌ایم.

۹ـ۳۸ دترمینان‌هایی همانند آن‌چه که در روابط زیر مشاهده می‌کنید، ژاکوبین نام دارد و آن‌را با نمادهای زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \frac{D(f,g)}{D(u,v)}$$

در این‌صورت داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

مثال اگر داشته باشیم $u^2 + v = x - y$ و $u + v^2 = x + y$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

حل

$$\begin{cases} f(x,y,u,v) = u^2 + v - x + y = 0 \\ g(x,y,u,v) = u + v^2 - x - y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}} = \frac{2v-1}{4uv-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_y \\ g_u & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}} = \frac{2u+1}{4uv-1}$$

تست اگر داشته باشیم $\begin{cases} u = xe^y \\ v = y\ln x \end{cases}$ آنگاه ژاکوبین $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ در نقطه‌ی $(1,1)$ کدام است؟

۱) e ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $-e$

حل گزینه‌ی ۴.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^y & xe^y \\ \dfrac{y}{x} & \ln x \end{vmatrix} \xrightarrow{(1,1)} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} e & e \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -e$$

ماکزیمم و مینیمم توابع چند متغیره

۹ـ۳۹ فرض می‌کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد، در این‌صورت:

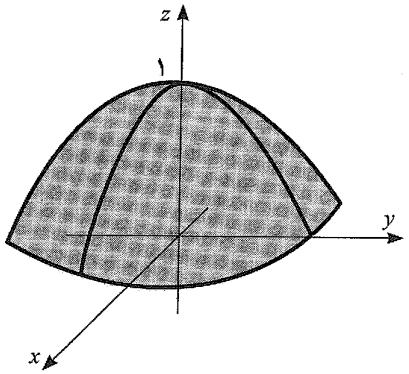
۱) $f(a,b)$ را مقدار ماکزیمم (مطلق) f می‌نامیم، اگر برای هر (x,y) از دامنه‌ی f داشته باشیم:

$$f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

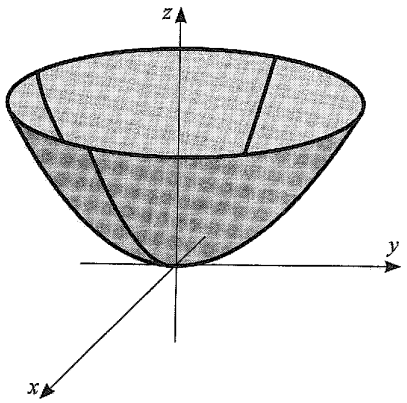
۲) $f(a,b)$ را مقدار مینیمم (مطلق) f می‌نامیم، اگر برای هر (x,y) از دامنه‌ی f داشته باشیم:

$$f(x,y) \geqslant f(a,b)$$

مثال تابع $f(x,y) = ۱ - x^۲ - y^۲$، که قسمتی از نمودار آن در شکل زیر نشان داده می‌شود، دارای ماکزیمم مقدار ۱ است، این مقدار درمبدأ، $(۰,۰)$، اتفاق می‌افتد.



مثال تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲$، که قسمتی از نمودار آن در شکل مقابل نشان داده می‌شود، دارای مینیمم مقدار صفر است، این مقدار در مبدأ، $(۰,۰)$ اتفاق می‌افتد.



۹ـ۴۰ فرض می‌کنیم f تابعی از دو متغیره x و y باشد، در این‌صورت:

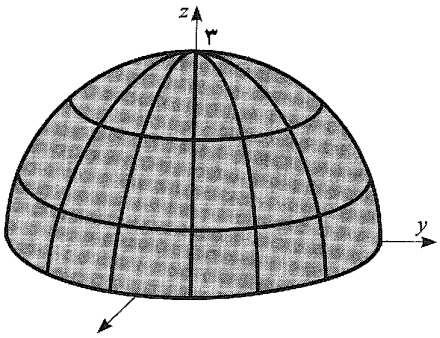
۱) می‌گوییم تابع f در (a,b) دارای ماکزیمم نسبی است، اگر دایره‌ای به مرکز (a,b) در دامنه‌ی f وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر (x,y) در درون این دایره داشته باشیم:

$$f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

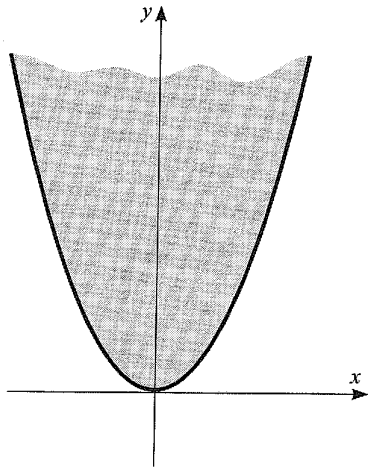
۲) می‌گوییم تابع f در (a,b) دارای مینیمم نسبی است، اگر دایره‌ای به مرکز (a,b) در دامنه‌ی f وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر (x,y) در درون این دایره داشته باشیم:

$$f(x,y) \geqslant f(a,b)$$

مثال تابع $f(x,y)=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ که قسمتی از نمودار آن در شکل زیر نشان داده می‌شود، در $(۰,۰)$ ماکزیمم نسبی است. و مقدار آن برابر $f(۰,۰)=۳$.

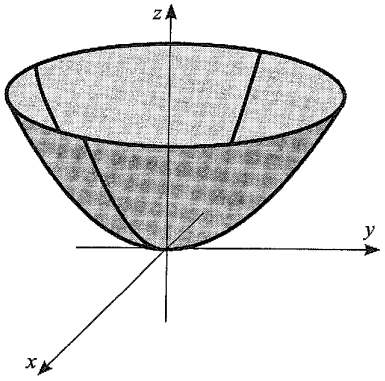


مثال تابع $f(x,y)=\sqrt{y-x^۲}$ که قسمتی از نمودار آن در شکل زیر نشان داده می‌شود، در $(۰,۰)$ مینیمم نسبی است و مقدار آن برابر $f(۰,۰)=۰$.



۹ـ۴۱ به‌طورکلی اگر تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی $P(a,b)$ و مجاور آن پیوسته باشد و در نقطه‌ی P ماکزیمم مطلق (مینیمم مطلق) باشد نقطه‌ی $p_۰$، ماکزیمم (مینیمم) نسبی نیز هست.

مثال تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ و مجاور آن پیوسته است، این نقطه در شکل علاوه برآن که مینیمم مطلق است مینیمم نسبی هم می‌باشد.



۹ـ۴۲ اگر $f(x,y)$ در یک نقطه‌ی درونی (a,b) از دامنه‌ی تعریف تابع دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد و اگر مشتقات جزیی مرتبه‌ی اول تابع در این نقطه موجود باشند، آنگاه $f_x(a,b)=۰$ و $f_y(a,b)=۰$.

مثال مشاهده کردیم که تابع $f(x,y)=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ دارای ماکزیمم نسبی است، از طرفی

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{۹-x^۲-y^۲}} \quad , \quad f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{۹-x^۲-y^۲}}$$

و ملاحظه می‌کنیم که

$$f_x(۰,۰)=\frac{۰}{\sqrt{۹}}=۰ \quad , \quad f_y(۰,۰)=\frac{۰}{\sqrt{۹}}=۰$$

نقطه‌ی بحرانی

۹ـ۴۳ یک نقطه‌ی درونی از دامنه‌ی تابع $f(x,y)$ که در آن‌ها $f_x=f_y=۰$ یا در آن‌ها f_x یا f_y یا هردوی آن‌ها موجود نباشند را نقطه‌ی بحرانی f می‌نامند.

۹ـ۴۴ شبیه حالت یک متغیره، تنها نقاطی که تابع $f(x,y)$ در آن نقاط احتمالاً مقادیر اکسترمم دارد نقاط بحرانی و نقاط مرزی می‌باشند.

۹ـ۴۵ تابع $z=f(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. هر جواب دستگاه زیر را (نظیر توابع یک متغیره) یک نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌نامیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=z_x=۰ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=z_y=۰ \end{cases}$$

بنابراین از حل دستگاه فوق ممکن است مختصات نقاطی مانند(a,b) به‌دست آید که در تابع قرار داده و مقدار z متناظر به‌دست می‌آید. مثلاً نقطه‌ی $(a,b,f(a,b))$ تعیین می‌گردد، این نقطه، نقطه‌ی بحرانی است.

مثال نقاط بحرانی هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x,y)=x^۲+y^۴+۱$ ۲) $f(x,y)=e^{xy}-۱$

۳) $f(x,y)=y^۳-۳yx^۲-۳y^۲-۳x^۲+۱$ ۴) $f(x,y)=\sin x+\sin y \quad ۰\leqslant x,y\leqslant ۲\pi$

حل

۱) $$\begin{cases} z_x=۰ \\ z_y=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x=۰ \\ ۴y^۳=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=۰ \\ y=۰ \end{cases} \Longrightarrow f(۰,۰)=۰+۰+۱=۱$$

در نتیجه $(۰,۰,۱)$ نقطه‌ی بحرانی f است.

۲) $$\begin{cases} z_x=۰ \\ z_y=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ye^{xy}=۰ \\ xe^{xy}=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=۰ \\ x=۰ \end{cases} \Longrightarrow f(۰,۰)=e^۰-۱=۰$$

در نتیجه $(۰,۰,۰)$ نقطه‌ی بحرانی f است.

۳)
$$\begin{cases} z_x = ۰ \\ z_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۶yx - ۶x = ۰ \Longrightarrow -۶x(y+۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰, y = -۱ \\ ۳y^۲ - ۳x^۲ - ۶y = ۰ \end{cases}$$

لذا دو دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = ۰ \\ ۳y^۲ - ۳x^۲ - ۶y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow ۳y^۲ - ۶y = ۰ \Longrightarrow ۳y(y-۲) = ۰ \Longrightarrow y = ۰, y = ۲$$

در نتیجه $(۰,۰)$ و $(۰,۲)$ دو نقطه‌ی بحرانی f هستند. و:

$$\begin{cases} y = -۱ \\ ۳y^۲ - ۳x^۲ - ۶y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow ۳ - x^۲ = ۰ \Longrightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

بنابراین $(-۱,\sqrt{۳})$ و $(-۱,-\sqrt{۳})$ نیز دو نقطه‌ی بحرانی f هستند.

۴)
$$\begin{cases} z_x = ۰ \\ z_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲} \\ \cos y = ۰ \Longrightarrow y = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

در نتیجه $(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$، $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$، $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ چهار نقطه‌ی بحرانی f هستند.

تست در نقطه‌ی بحرانی، مقدار تابع $f(x,y) = ۱ - (x-y)^۲ - (x+y)^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) -۱

حل گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} f_x = ۰ \\ f_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۲(x-y) - ۲(x+y) = -۴x = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \\ ۲(x-y) - ۲(x+y) = -۴y = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \end{cases}$$

$$f(۰,) = ۱ - ۰ - ۰ = ۱$$

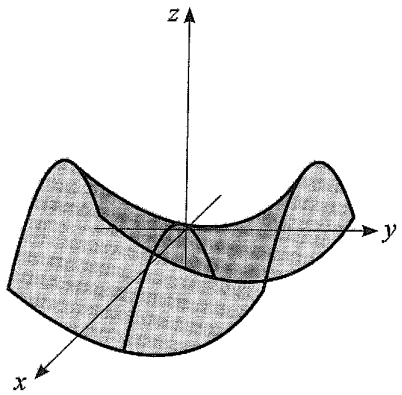
نقطه‌ی زینی

۹ـ۴۶ تابع مشتق‌پذیر $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی بحرانی (a,b) دارای نقطه‌ی زینی است اگر در هر دایره‌ی باز به مرکز (a,b) نقاطی چون (x,y) از دامنه باشند که در آن $f(x,y) > f(a,b)$ و نقاطی چون (x,y) از دامنه باشد که در آن $f(x,y) < f(a,b)$. نقطه $(a,b,f(a,b))$ واقع بر تابع $z = f(x,y)$ را نقطه‌ی زینی تابع می‌نامند.

مثال فرض کنید $f(x,y) = y^۲ - x^۲$، مطلوب است مقدار ماکزیمم یا مینیمم نسبی تابع f در صورت وجود.

حل دستگاه $\begin{cases} f_x = -۲x = ۰ \\ f_y = ۲y = ۰ \end{cases}$ را داریم. تنها جواب این دستگاه $(۰,۰)$ است، پس $f(۰,۰)$ تنها مقدار ماکزیمم یا مینیمم نسبی احتمالی f است. ولی اگر $x \neq ۰$، آنگاه $f(x,۰) = -x^۲ < ۰$ و اگر $y \neq ۰$، آنگاه $f(۰,y) = y^۲ > ۰$. در نتیجه درون هر دایره‌ای به مرکز $(۰,۰)$ نقطه‌ای وجود دارد به‌طوری که مقدار f در آن کوچکتر

از $f(۰,۰)$ است. همچنین در درون این دایره نقطه‌ای وجود دارد به‌طوری که مقدار f در آن نقطه بزرگتر از $f(۰,۰)$ است. بنابراین با این‌که $(۰,۰)$ یک نقطه‌ی بحرانی f است ولی نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم نسبی f نیست. در نتیجه تابع f ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد و در مبدأ دارای نقطه‌ی زینی است. توجه شود که این نقطه‌ی زینی طوری است که اگر در امتداد محور yها مشاهده شود نقطه‌ی مینیمم و در امتداد محور xها نقطه‌ی ماکزیمم به‌نظر می‌رسد.



۴۷ـ۹ اگر $f_x(a,b) = f_y(a,b) = ۰$ ولی تابع f در (a,b) ماکزیمم یا مینیمم نسبی نداشته باشد، می‌گوییم تابع f در (a,b) دارای یک نقطه‌ی زینی است. نقاط زینی برای توابع دو متغیره، مشابه نقاط عطف برای توابع یک متغیره است.

نحوه‌ی تعیین نقاط اکسترمم نسبی و زینی

۴۸ـ۹ اگر تابع به معادله‌ی $z = f(x,y)$ در (a,b) و همسایگی آن معین و پیوسته بوده و در (a,b) ماکزیمم یا مینیمم نسبی بوده و در این نقطه‌ی $f_x(a,b)$ و $f_y(a,b)$ وجود داشته باشد در این‌صورت این مشتقات جزیی در این نقطه برابر صفر است، یعنی:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(a,b) = ۰ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'_y(a,b) = ۰ \end{cases}$$

قضیه‌ی فوق، شرط لازم، ماکزیمم یا مینیمم بوده و عکس آن برقرار نیست. بدین مفهوم اگر مشتقات جزیی در نقطه‌ای برابر صفر باشد ممکن است تابع در آن نقطه‌ی ماکزیمم و یا مینیمم نباشد.

مثال تابع $z = x^۲ - y^۲$ مفروض است، مشتقات جزیی این تابع در نقطه $(۰,۰)$ برابر صفر است:

$$f'_x = ۲x \Longrightarrow f_x(۰,۰) = ۰ \quad , \quad f'_y = -۲y \Longrightarrow f_y(۰,۰) = ۰$$

ولی این تابع در این نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم نیست.

۴۹ـ۹ تابع $z = f(x,y)$ را در نظر می‌گیریم با استفاده از شرط لازم مختصات نقاطی را پیدا می‌کنیم که مشتقات جزیی مرتبه‌ی اول تابع را صفر کند، یعنی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) = ۰ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y) = ۰ \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق ممکن است مختصات نقاطی مانند (a,b) به‌دست آید که در تابع قرار داده مقدار z متناظر به‌دست می‌آید مثلاً نقطه‌ی (a,b,c) مشخص می‌گردد این نقطه، نقطه‌ی بحرانی تابع $z=f(x,y)$ است. شرط کافی را به‌صورت‌های مختلف بیان می‌کنند. در زیر به سه صورت آن خواهیم پرداخت.

۹ـ۵۰ آزمون مشتق دوم: فرض می‌کنیم $z=f(x,y)$ تابع دو متغیره بوده، به‌طوری که این تابع در $M(a,b,f(a,b))$ بحرانی باشد، در این صورت:

۱) اگر $(d^۲z)_M < ۰$، آنگاه نقطه‌ی M ماکزیمم است.

۲) اگر $(d^۲z)_M > ۰$، آنگاه نقطه‌ی M مینیمم است.

۳) اگر $(d^۲z)_M \gtrless ۰$، آنگاه نقطه‌ی M زینی است.

۴) اگر $(d^۲z)_M = ۰$، آنگاه برای تعیین نوع نقطه باید از تعریف استفاده کرد.

شرایط فوق برای تابع nمتغیره قابل تعمیم است.

۹ـ۵۱ آزمون Δ_M: فرض کنید$M(a,b,f(a,b))$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع $z=f(x,y)$ بوده و تمام مشتقات جزیی مرتبه‌ی اول و دوم f در یک همسایگی از M باشند، عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta_M = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^۲$$

۱) اگر $\Delta_M > ۰, (f_{xx})_M < ۰$، آنگاه نقطه‌ی M ماکزیمم است.

۲) اگر $\Delta_M > ۰, (f_{xx})_M > ۰$، آنگاه نقطه‌ی M مینیمم است.

۳) اگر $\Delta_M < ۰$، آنگاه نقطه‌ی M زینی است.

۴) اگر $\Delta_M = ۰$، از این روش نتیجه‌ای به‌دست نمی‌آید.

شرایط فوق تنها برای توابع دو متغیره برقرار است.

مثال نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و زینی تابع $f(x,y)=۱+x^۲-y^۲$ را درصورت وجود بیابید.

حل شرط لازم:

$$\begin{cases} f_x = ۲x = ۰ \\ f_y = -۲y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۰ \end{cases}$$

تنها جواب دستگاه $(۰,۰)$ است. پس $(۰,۰,۱)$ تنها نقطه‌ی بحرانی تابع f است. چون

$$f_{xx} = ۲, \quad f_{xy} = ۰, \quad f_{yy} = -۲$$

و:

$$\Delta_{(x,y)} = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^۲ = (۲)(-۲) - ۰ = -۴$$

پس:

$$\Delta_{(۰,۰)} = -۴ < ۰$$

بنابراین f در نقطه‌ی $(۰,۰,۱)$ یک نقطه‌ی زینی دارد.

۹ـ۵۲| آزمون دترمینان‌های هشین:

فرض می‌کنیم $z = f(x, y)$ تابع دو متغیره بوده، به‌طوری که این تابع در $M(a, b, f(a, b))$ بحرانی باشد. اگر ماتریس هشین d^2z را در نظر می‌گیریم:

$$H_M = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}$$

مینورهای اصلی آن عبارتند از:

$$|H_1| = z_{xx} \quad , \quad |H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

۱) اگر $|H_1| < 0, |H_2| > 0$، آنگاه نقطه‌ی M ماکزیمم است.

۲) اگر $|H_1| > 0, |H_2| > 0$، آنگاه نقطه‌ی M مینیمم است.

۳) اگر علامت‌ها غیر از صورت‌های فوق باشند، آنگاه نقطه‌ی M زینی است.

شرایط فوق برای تابع $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ قابل تعمیم است.

۱) اگر $|H_1| < 0, |H_2| > 0, \cdots, |H_n| \lesseqgtr 0$، آنگاه نقطه‌ی M ماکزیمم است.

۲) اگر $|H_1| > 0, |H_2| > 0, \ldots, |H_n| > 0$، آنگاه نقطه‌ی M مینیمم است.

۳) اگر علامت‌ها غیر از صورت‌های فوق باشد، آنگاه نقطه‌ی M زینی است.

در حالت (۱) علامت‌ها متناوباً منفی و مثبت است. اگر nزوج باشد، $|H_n| > 0$ و اگر nفرد باشد، $|H_n| < 0$ است.

مثال نقاط بحرانی توابع زیر را تعیین نموده و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

۱) $z = x^3 + y^3 - 18xy$

۲) $z = \sin x + \sin y \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

۳) $z = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$

حل

۱)

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 18y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 18x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 6, y = 6 \end{cases}$$

نقاط بحرانی تابع عبارتند از $(0, 0, 0), (6, 6, -216)$.

$$z_{xx} = 6x \quad , \quad z_{xy} = z_{yx} = -18 \quad , \quad z_{yy} = 6y$$

و:

$$|H_1| = ۶x \ , \ |H_2| = \begin{vmatrix} ۶x & -۱۸ \\ -۱۸ & ۶y \end{vmatrix}$$

در نقطه‌ی $(۰,۰)$ داریم:

$$|H_1| = ۰ \ , \ |H_2| = \begin{vmatrix} ۰ & -۱۸ \\ -۱۸ & ۰ \end{vmatrix} = -۱۸^۲ < ۰ \Longrightarrow (۰,۰,۰) \text{زینی}$$

در نقطه‌ی $(۶,۶)$ داریم:

$$|H_1| = ۳۶ > ۰ \ , \ |H_2| = \begin{vmatrix} ۳۶ & -۱۸ \\ -۱۸ & ۳۶ \end{vmatrix} = ۳۶^۲ - ۱۸^۲ > ۰ \Longrightarrow \min(۶,۶,-۲۱۶)$$

۲) نقاط بحرانی تابع عبارتند از $\begin{cases} z_x = \cos x = ۰ \\ z_y = \cos y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲} \\ y = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$

$$(\tfrac{۳\pi}{۲}, \tfrac{۳\pi}{۲}), (\tfrac{۳\pi}{۲}, \tfrac{\pi}{۲}), (\tfrac{\pi}{۲}, \tfrac{۳\pi}{۲}), (\tfrac{\pi}{۲}, \tfrac{\pi}{۲})$$

و:

$$z_{xx} = -\sin x, z_{xy} = z_{yx} = ۰, z_{yy} = -\sin y$$

$$|H_1| = -\sin x \ , |H_2| = \begin{vmatrix} -\sin x & ۰ \\ ۰ & -\sin y \end{vmatrix}$$

در نقطه‌ی $(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ داریم:

$$|H_1| = -\sin \frac{\pi}{۲} = -۱ < ۰, |H_2| = \begin{vmatrix} -\sin \frac{\pi}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\sin \frac{\pi}{۲} \end{vmatrix} = (-۱)(-۱) - ۰ = ۱ > ۰ \Rightarrow \max(\tfrac{\pi}{۲}, \tfrac{\pi}{۲})$$

در نقطه‌ی $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ داریم:

$$|H_1| = -\sin \frac{\pi}{۲} = -۱ < ۰, |H_2| = \begin{vmatrix} -\sin \frac{\pi}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\sin \frac{۳\pi}{۲} \end{vmatrix} = (-۱)(۱) - ۰ = -۱ < ۰ \Rightarrow (\tfrac{\pi}{۲}, \tfrac{۳\pi}{۲}) \text{زینی}$$

در نقطه‌ی $(\frac{۳\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ داریم:

$$|H_1| = -\sin \frac{۳\pi}{۲} = ۱ > ۰, |H_2| = \begin{vmatrix} -\sin \frac{۳\pi}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\sin \frac{۳\pi}{۲} \end{vmatrix} = (۱)(-۱) - ۰ = -۱ < ۰ \Rightarrow (\tfrac{۳\pi}{۲}, \tfrac{\pi}{۲}) \text{ زینی}$$

در نقطه‌ی $(\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ داریم:

$$|H_۱| = -\sin\frac{۳\pi}{۲} = ۱ > ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} -\sin\frac{۳\pi}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\sin\frac{۳\pi}{۲} \end{vmatrix} = (۱)(۱) - ۰ = ۱ > ۰ \Rightarrow \min(\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$$

۳)

$$\begin{cases} z_{x_۱} = ۴x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \\ z_{x_۲} = x_۱ + ۸x_۲ = ۰ \\ z_{x_۳} = x_۱ + ۲x_۳ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۰$$

تنها جواب دستگاه $(۰, ۰, ۰)$ است. پس $(۰, ۰, ۰, ۲)$ تنها نقطه‌ی بحرانی تابع z است. و

$$z_{x_۱x_۱} = ۴ \ , \ z_{x_۱x_۲} = z_{x_۱x_۳} = ۱ \ , \ z_{x_۲x_۳} = ۰ \ , \ z_{x_۲x_۲} = ۸ \ , \ z_{x_۳x_۳} = ۲$$

در نقطه‌ی $(۰, ۰, ۰)$ داریم:

$$|H_۱| = ۴ > ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۱ & ۸ \end{vmatrix} = ۳۲ - ۱ > ۰, \ |H_۳| = \begin{vmatrix} ۴ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۸ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۵۴ > ۰ \Longrightarrow \min(۰, ۰, ۰, ۲)$$

مثال سه عدد مثبت به قسمی بیابید که مجموع آن‌ها ۲۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم باشد.

حل

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲۴ \ , \ z = x_۱x_۲x_۳$$

و:

$$x_۳ = ۲۴ - x_۱ - x_۲ \Longrightarrow z = x_۱x_۲(۲۴ - x_۱ - x_۲)$$

$$\begin{cases} z_{x_۱} = x_۲(۲۴ - x_۱ - x_۲) - x_۱x_۲ = ۰ \\ z_{x_۲} = x_۱(۲۴ - x_۱ - x_۲) - x_۱x_۲ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_۲(۲۴ - x_۲ - ۲x_۱) = ۰ \\ x_۱(۲۴ - ۲x_۲ - x_۱) = ۰ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_۱ = x_۲ = ۰ \\ ۲۴ - x_۲ - ۲x_۱ = ۰ \\ ۲۴ - ۲x_۲ - x_۱ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_۱ = x_۲ = ۰ \\ x_۱ = x_۲ = ۸ \end{cases}$$

نقاط بحرانی $(۸, ۸)$ و $(۰, ۰)$، که نقطه‌ی $(۰, ۰)$ غیرقابل قبول است.

$$z_{x_۱x_۱} = -۲x_۲ \ , \ z_{x_۲x_۲} = -۲x_۱ \ , \ z_{x_۱x_۲} = z_{x_۲x_۱} = (۲۴ - x_۲ - ۲x_۱) - x_۲$$

و در نقطه‌ی $(۸, ۸)$ داریم:

$$|H_۱| = -۱۶ < ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} -۱۶ & -۸ \\ -۸ & -۱۶ \end{vmatrix} = (-۱۶)^۲ - ۸^۲ > ۰ \Longrightarrow \max(۸, ۸)$$

$$\Longrightarrow ۸+۸+z=۲۴ \Longrightarrow z=۸ \Longrightarrow f(۸,۸,۸)=۸\times ۸\times ۸=۵۱۲$$

تست نوع نقطه‌ی بحرانی تابع به معادله‌ی $z=e^{xy}$ کدام است؟

۱) زینی ۲) عطف ۳) ماکزیمم ۴) مینیمم

حل گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} z_x=ye^{xy}=۰ \Longrightarrow y=۰ \\ z_y=xe^{xy}=۰ \Longrightarrow x=۰ \end{cases} \Longrightarrow (۰,۰,۱)\text{نقطه‌ی بحرانی}$$

$$z_{xx}=y^۲e^{xy}\ ,\ z_{xy}=z_{yx}=xye^{xy}+e^{xy}\ ,\ z_{yy}=x^۲e^{xy}$$

$$|H_۱|=۰\times e^{۰}=۰\ ,\ |H_۲|=\begin{vmatrix} ۰\times e^{۰} & e^{۰}+۰ \\ e^{۰}+۰ & ۰\times e^{۰} \end{vmatrix}=-۱<۰ \Longrightarrow (۰,۰,۱)\text{زینی}$$

تست به‌ازای چه مقداری از a، نقطه‌ی بحرانی تابع $z=x^۲+ay^۲$ یک نقطه‌ی زینی است؟

۱) $a>۰$ ۲) $a<۰$ ۳) $a>۱$ ۴) $a<۱$

حل گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z_x=۲x=۰ \\ z_y=۲ay=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=۰ \\ y=۰ \end{cases} \Longrightarrow (۰,۰)\text{نقطه‌ی بحرانی}$$

$$z_{xx}=۲\ ,\ z_{xy}=z_{yx}=۰\ ,\ z_{yy}=۲a$$

در نقطه‌ی $(۰,۰)$ چون $|H_۱|=z_{xx}=۲>۰$ است، نقطه بحرانی در صورتی زینی است که $|H_۲|<۰$ باشد:

$$|H_۲|=\begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲a \end{vmatrix}<۰ \Longrightarrow ۴a<۰ \Longrightarrow a<۰$$

محدب و مقعر بودن

۹ـ۵۳ توجه دارید که تابع مقعر دارای ماکزیمم و تابع محدب دارای مینیمم است. لذا یک راه برای تعیین مقعر و محدب بودن تابع همان استفاده از دترمینان‌های هشین است که قبلاً نیز از آن استفاده نمودیم:

شرط محدب $|H_۱|>۰\ ,\ |H_۲|>۰\ ,\ |H_۳|>۰,\ldots$
شرط مقعر $|H_۱|<۰\ ,\ |H_۲|>۰\ ,\ |H_۳|<۰,\ldots$

تست وضعیت تابع $z=x^۲+xy+y^۲$ از لحاظ تعقر و تحدب چگونه است؟

۱) اکیداً محدب ۲) اکیداً مقعر

۳) ابتدا محدب، سپس مقعر ۴) ابتدا مقعر، سپس محدب

حل گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} z_x = ۲x + y \Longrightarrow z_{xy} = ۱\ ,\ z_{xx} = ۲ \\ z_y = x + ۲y \Longrightarrow z_{yx} = ۱\ ,\ z_{yy} = ۲ \end{cases}$$

$$|H_۱| = ۱ > ۰\ ,\ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ - ۱ > ۰ \Longrightarrow \text{محدب}$$

ماکزیمم و مینیمم توابع مقید

۹ـ۵۴ می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ را با محدودیت $g(x, y) = c$ بیابیم. متغیر جدید λ موسوم به ضریب لاگرانژ را در نظر می‌گیریم با استفاده از متغیر λ، تابع جدیدی به نام لاگرانژ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L = f(x, y) + \lambda[c - g(x, y)]$$

می‌توان نشان داد که ماکزیمم یا مینیمم تابع $z = f(x, y)$ با توجه به محدودیت $g(x, y) = c$ در حقیقت ماکزیمم یا مینیمم تابع بدون محدودیت $f(x, y, \lambda)$ نسبت به سه متغیر x، y و λ برابر است. بنابراین اگر f در (a, b) ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد، آنگاه یک $\lambda = \lambda_۰$ وجود دارد به‌طوری که (a, b, λ) یک جواب دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر است:

$$\begin{cases} L_x = f_x - \lambda g_x = ۰ \\ L_y = f_y - \lambda g_y = ۰ \\ L_\lambda = c - g(x, y) = ۰ \end{cases}$$

توجه کنید که معادله‌ی سوم دستگاه، همان محدودیت است. نقطه‌ی (a, b) نقطه‌ی بحرانی تابع است، شرط کافی برای وجود

۱) ماکزیمم، این است که

$$\begin{vmatrix} ۰ & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} > ۰$$

۲) مینیمم، این است که

$$\begin{vmatrix} ۰ & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} < ۰$$

۹ـ۵۵ ضریب لاگرانژ (λ) حساسیت مقدار تابع هدف را به‌ازای جواب بهینه نسبت به تغییرات ثابت c به‌دست می دهد. برای مثال اگر λ در نقطه‌ی بهینه صفر باشد، در این صورت تغییر کوچکی در مقدار متناظر ثابت قید (c)، تأثیری در جواب بهینه تابع هدف ندارد.

مثال ماکزیمم یا مینیمم تابع $z = xy^۲$ را با توجه به قید $x + ۲y = ۱$ پیدا کنید.

حل

$$L = xy^۲ + \lambda(x + ۲y - ۱)$$

$$\begin{cases} L_x = y^۲ + \lambda = ۰ \implies \lambda = -y^۲ & (۱) \\ L_y = ۲xy + ۲\lambda = ۰ \implies \lambda = -xy & (۲) \\ L_\lambda = x + ۲y - ۱ = ۰ & (۳) \end{cases}$$

$$(۱), (۲) \implies xy = y^۲ \implies x = y \quad (y \neq ۰, x \neq ۰ \text{ چون})$$

$$(۳) \implies y + ۲y - ۱ = ۰ \implies y = \frac{۱}{۳}, x = \frac{۱}{۳} \implies \lambda = -\frac{۱}{۹}$$

پس $(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$، نقطه‌ی بحرانی تابع z است.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲y \\ ۲ & ۲y & ۲x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & \frac{۲}{۳} \\ ۲ & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{vmatrix} = (۰ + \frac{۴}{۳} + \frac{۴}{۳}) - (۰ + ۰ + \frac{۲}{۳}) = ۲ > ۰$$

پس $\max(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$ و ماکزیمم تابع برابر با $\frac{۱}{۲۷} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۹} = z$ است.

تست مینیمم تابع $z = ۴x^۲ + ۲y - ۴$ با توجه به‌شرط $۲x + \frac{۱}{۲}y = ۱۲$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۴۰

حل گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} L = ۴x^۲ + ۲y - ۴ + \lambda(۱۲ - ۲x - \frac{۱}{۲}y) \\ L_x = ۸x - ۲\lambda = ۰ & (۱) \\ L_y = ۲ - \frac{۱}{۲}\lambda = ۰ \implies \lambda = ۴ \\ L_\lambda = ۱۲ - ۲x - \frac{۱}{۲}y = ۰ & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \implies ۸x - ۲(۴) = ۰ \implies x = ۱$$

$$(۲) \implies ۱۲ - ۲ - \frac{۱}{۲}y = ۰ \implies y = ۲۰$$

پس $(۱, ۲۰)$، نقطه‌ی بحرانی تابع z است.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۲ & \frac{۱}{۲} \\ ۲ & ۸ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = (۰ + ۰ + ۰) - (۲ + ۰ + ۰) = -۲ < ۰$$

پس $\min(۱, ۲۰)$ و مینیمم تابع برابر $z = ۴ + ۴۰ - ۴ = ۴۰$ است. البته نیازی به بررسی شرط کافی در این تست نبود، زیرا در صورت سؤال نوع نقطه‌ی بحرانی گفته شده است.

۹ـ۵۶ روش جایگزینی: یکی از روش‌های به‌دست آوردن ماکزیمم و مینیمم توابع نسبت به شرایط داده شده از طریق جایگزین کردن تابع محدودیت (شرایط داده شده) در تابع هدف است. بدین ترتیب مسأله تبدیل به مسأله‌ی ماکزیمم یا مینیمم کردن یک تابع بدون محدودیت می‌شود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ماکزیمم یا مینیمم تابع $z = ۲x^۲ - xy + y^۲$ تحت محدویت $x + y = ۸$ را بیابید.

$$x + y = ۸ \Longrightarrow y = ۸ - x$$
$$z = ۲x^۲ - x(۸ - x) + (۸ - x)^۲ = ۲x^۲ - ۸x + x^۲ + ۶۴ - ۱۶x + x^۲$$
$$z = ۴x^۲ - ۲۴x + ۶۴$$
$$z'_x = ۰ \Longrightarrow ۸x - ۲۴ = ۰ \Longrightarrow x = ۳, y = ۸ - ۳ = ۵$$

پس $(۳, ۵)$، نقطه‌ی بحرانی تابع z است.

x		۳	
z'	$-$	۰	$+$
z	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\Longrightarrow \min : z = ۲(۹) - (۳)(۵) + ۲۵ = ۲۸$$

تست ماکزیمم تابع با ضابطه‌ی $z = x^۲y^۲$ نسبت به قید $x^۲ + y^۲ = ۱$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۳.

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Longrightarrow y^۲ = ۱ - x^۲$$
$$z = x^۲(۱ - x^۲) = x^۲ - x^۴$$
$$z' = ۰ \Longrightarrow ۲x - ۴x^۳ = ۰ \Longrightarrow ۲x(۱ - ۲x^۲) = ۰ \Longrightarrow x = ۰, x = \frac{۱}{\sqrt{۲}}, x = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

x		$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$		۰		$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	
z'	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$
z	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^۲ = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow y^۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} \Longrightarrow y^۲ = \frac{۱}{۲} \\ \max : z = (\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

تست ماکزیمم مقدار تابع $z = \ln(x^۳) + \ln(y^۲)$ تحت شرایط $۱ \leqslant x \leqslant e^۲$ و $xy = ۱$ کدام است؟

۱) $۲e$ ۲) ۰ ۳) $e^۲$ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۴.

$$z = \ln(x^۳ \cdot y^۲) = \ln(x^۲y^۲)x = \ln x$$

چون تابع $z = \ln x$، اکیداً صعودی است، پس نقطه‌ی اکسترمم در انتهای بازه‌ی $۱ \leqslant x \leqslant e^۲$ رخ می‌دهد.

x	۱	$e^۲$
z	۰	۲

$\Longrightarrow \quad \max : z = ۲$

۹ـ۵۷ تابع $z = f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ و قید $g(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = c$ را در نظر می‌گیریم، می‌خواهیم ماکزیمم و مینیمم این تابع را با توجه به قید آن پیدا کنیم. ابتدا تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$L = f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) + \lambda[c - g(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)]$$

سپس مشتق مرتبه‌ی اول L را نسبت به تمام متغیرها و λ به‌دست می‌آوریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} L_{x_۱} = f_{x_۱} - \lambda g_{x_۱} = ۰ \\ L_{x_۲} = f_{x_۲} - \lambda g_{x_۲} = ۰ \\ \vdots \\ L_{\lambda} = c - g(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = ۰ \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق مقادیر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ و λ به‌دست می‌آورید. در نتیجه نقطه‌ی بحرانی تابع مشخص می‌شود. برای تعیین نوع نقطه‌ی بحرانی ماتریس مرزی هشین را تشکیل می‌دهیم (شرط کافی):

$$H = \begin{vmatrix} ۰ & g_{x_۱} & g_{x_۲} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_۱} & L_{x_۱x_۱} & L_{x_۱x_۲} & \cdots & L_{x_۱x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_۱} & L_{x_nx_۲} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

در این ماتریس $|H_۱| = \begin{vmatrix} ۰ & g_{x_۱} \\ g_{x_۱} & L_{x_۱x_۱} \end{vmatrix}$ و $|H_۲|$ برابر دترمینان درجه‌ی ۳ و $|H_۳|$ برابر... می‌باشد.[۱]

۱) اگر $|H_۱| < ۰, |H_۲| < ۰, |H_۳| < ۰, \ldots, |H_n| < ۰$ آنگاه نقطه‌ی مینیمم است.

۲) اگر $|H_۱| < ۰, |H_۲| > ۰, |H_۳| < ۰, |H_۴| > ۰$ و... آنگاه نقطه‌ی ماکزیمم است.

مثال ماکزیمم و مینیمم تابع $w = xyz$ نسبت به شرط $x + y + z = ۲۴$ پیدا کنید.

---

۱. $|H_۱|$ همیشه کوچکتر از صفر است، و نیازی به محاسبه‌ی آن نیست.

حل

$$L = xyz + \lambda(۲۴ - x - y - z)$$

$$\begin{cases} L_x = yz - \lambda = ۰ \Longrightarrow \lambda = yz & (۱) \\ L_y = xz - \lambda = ۰ \Longrightarrow \lambda = xz & (۲) \\ L_z = xy - \lambda = ۰ \Longrightarrow \lambda = xy & (۳) \\ L_\lambda = ۲۴ - x - y - z = ۰ & (۴) \end{cases}$$

$$(۱),(۲) \Longrightarrow yz = xz \Longrightarrow y = x$$

$$(۱),(۳) \Longrightarrow yz = xy \Longrightarrow x = z$$

$$(۴) \Longrightarrow ۲۴ - x - x - x = ۰ \Longrightarrow x = ۸, y = z = ۸$$

نقطه‌ی بحرانی $(۸,۸,۸)$ است. شرط کافی:

$$|H| = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & z & y \\ ۱ & z & ۰ & y \\ ۱ & y & x & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۸ & ۸ \\ ۱ & ۸ & ۰ & ۸ \\ ۱ & ۸ & ۸ & ۰ \end{vmatrix}$$

و:

$$|H_۱| < ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۸ \\ ۱ & ۸ & ۰ \end{vmatrix} > ۰ \ , \ |H_۳| = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۸ & ۸ \\ ۱ & ۸ & ۰ & ۸ \\ ۱ & ۸ & ۸ & ۰ \end{vmatrix} < ۰$$

در نتیجه $\max(۸,۸,۸)$ و مقدار ماکزیمم تابع $w = ۸ \times ۸ \times ۸ = ۵۱۲$ است.

تست‌های فصل ۹

۱. فرض کنید $f(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{۲}$ و $g(x_۱,x_۲,x_۳)=\frac{x_۱x_۲}{x_۳}$، مقدار $(fog)(۰,۰,۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}e$ ۳) e ۴) $e^{-۱}$

۲. بُرد تابع $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ باضابطهٔ $f(x,y,z)=\frac{x}{|y|-|z|}$ کدام مجموعه است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$

۳) $\{x,y,z):y\neq z\}$ ۴) $\{x,y,z):|y|\neq|x|\}$

۳. دامنه تعریف تابع $f(x,y)=\frac{(x^۲+۲)(y^۲-۱)}{\sin(xy)}$ کدام است؟

۱) $\{(x,y)|x,y$ حقیقی هستند$\}$ ۲) $\{(x,y)|xy\neq k\frac{\pi}{۲},k\in Z\}$

۳) $\{(x,y)|xy\neq k\pi,k\in Z\}$ ۴) $\{(x,y)|x=y=۰\}$

۴. حوزه مقادیر تابع $z=\sqrt{x+y}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}^۲$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\{۰\}\cup\mathbb{R}^+$

۵. دامنه‌ی تعریف تابع $f(x,y)=e^{\frac{۱}{x+y}}$ کدام است؟

۱) همه‌ی نقاط صفحه به‌جز آن‌هایی که روی خط $y=x$ است.

۲) همه‌ی نقاط صفحه است.

۳) همه‌ی نقاط صفحه به‌جز آن‌هایی که روی خط $y=-x$ است.

۴) همه‌ی نقاط صفحه به‌جز مبدأ.

۶. برد تابع $u=(x-y)\sqrt{z-۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^۲$ ۳) $\{u|u\geqslant۲\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۲\}$

۷. دامنه تعریف تابع $f(x,y)=\begin{cases}۱ & x\neq y\\ ۰ & x=y\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^۲$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{\}$

۸. دامنه تابع $z=\sin\left(\frac{۱}{x+y}\right)$ کدام است؟

۱) $\{(x,y)|x\neq-y\}$ ۲) $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ ۳) $\{(x,y)|x=y\}$ ۴) $\{(x,y)|x=-y\}$

۹. دامنه تعریف تابع حقیقی f از دو متغیر (x,y) به معادله $z=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲-۹}}{y}$ کدام است؟

۱) خارج دایره و محیط دایره $x^۲ + y^۲ = ۹$ است.

۲) داخل دایره و محیط دایره $x^۲ + y^۲ = ۹$ است.

۳) خارج دایره و محیط دایره $x^۲ + y^۲ = ۹$ به‌جز نقاط واقع بر محور xها می‌باشد.

۴) خارج دایره و محیط دایره $x^۲ + y^۲ = ۹$ به‌جز نقاط واقع بر محور yها می‌باشد.

۱۰. دامنه تعریف تابع $z = f(x,y) = \frac{\sqrt{۹ - x^۲}}{y - ۳}$ کدام است؟

۱) $\{(x,y) | -۳ \leqslant x \leqslant ۳\}$

۲) $\{(x,y) | -۳ \leqslant x \leqslant ۳, y \neq ۳\}$

۳) $\{(x,y) | -۳ < x \leqslant ۳\}$

۴) $\{(x,y) | -۳ < x < ۳, y \neq ۳\}$

۱۱. دامنه تعریف تابع $f(x,y) = \sqrt{۱۶ - x^۲ - ۴y^۲}$ کدام است؟

۱) نقاط داخل و محیط هذلولی $x^۲ + ۴y^۲ = ۱۶$

۲) نقاط خارج و محیط بیضی $x^۲ + ۴y^۲ = ۱۶$

۳) نقاط خارج و محیط هذلولی $x^۲ + ۴y^۲ = ۱۶$

۴) نقاط داخل و محیط بیضی $x^۲ + ۴y^۲ = ۱۶$

۱۲. دامنه تعریف تابع $f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ کدام است؟

۱) $\{(x,y) | x \geqslant y, x > -y\} \cup \{(x,y) | x \leqslant y, x < -y\}$

۲) $\{(x,y) | x \geqslant y, x \geqslant -y\} \cup \{(x,y) | x \leqslant y, x < y\}$

۳) $\{(x,y) | x \geqslant y, x > -y\} \cup \{(x,y) | x \leqslant y, x \leqslant y\}$

۴) $\{\}$

۱۳. حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۴. حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۴}\right)} \frac{\sin x . \sin y}{\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۵. حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(۱,۰)} \frac{y^۲(x^۲ + ۱)}{x}$ در امتداد مسیر نیمساز ناحیه دوم کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۶. حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(۱,۲)} \frac{\text{Arctan}(xy - ۲)}{\text{Arcsin}(۳xy - ۶)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷. مقدار حد تابع $f(x,y)=\frac{y(x^۲+۱)}{x}$ در نقطه $(۰,۰)$ برابر است با:

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) حد ندارد

۱۸. مقدار حد تابع $f(x,y)=\frac{x^۲y}{x^۴+y^۲}$ در نقطه $(۰,۰)$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) حد ندارد

۱۹. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ در نقطه $(۰,۰)$ از لحاظ پیوستگی کدام است؟

۱) پیوسته است
۲) پیوسته نیست
۳) تنها پیوستگی چپ دارد
۴) تنها پیوستگی راست دارد

۲۰. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^۲y}{x^۴+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ در نقطه $(۰,۰)$ از لحاظ پیوستگی کدام است؟

۱) پیوسته نیست
۲) پیوسته است
۳) فقط پیوستگی چپ دارد
۴) فقط پیوستگی راست دارد

۲۱. در تابع $f(x,y)=\frac{x^۲+y^۲-x^۳}{x^۲+y^۲}$ اگر $f(۰,۰)=۰$ باشد، آنگاه تابع f در نقطه $(۰,۰)$:

۱) گسسته است
۲) پیوسته است
۳) فقط پیوستگی چپ دارد
۴) فقط پیوستگی راست دارد

۲۲. مکان نقاط پیوستگی تابع $f(x,y)=e^{-(x^۲+y^۲)}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^۲$
۲) $\{(x,y)|x^۲+y^۲\neq ۰\}$
۳) $\{(x,y)|x^۲+y^۲\neq ۱\}$
۴) $\mathbb{R}$

۲۳. مکان نقاط ناپیوستگی تابع $z=\frac{x^۲y^۲}{x^۲+y^۲-۴}$ کدام است؟

۱) نقاط واقع بر محیط دایره‌ای به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۴
۲) نقاط واقع بر محیط دایره‌ای به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۲
۳) نقاط واقع بر محیط بیضی به معادله $x^۲+y^۲=۱$
۴) نقاط واقع بر محیط هذلولی به معادله‌ی $x^۲-y^۲=۱$

۲۴. در تابع $z=e^x.\sin y+\ln xy$ حاصل $\frac{\partial^۴z}{\partial x^۲\partial y^۲}$ در نقطه $\left(۰,\frac{۳\pi}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) -۲

۲۵. حاصل $\frac{\partial^۳}{\partial x^۲\partial y}\{x^۳y^۲-\sin\sqrt{y-\ln y}\}$ کدام است؟

۱) $۶x^۲y$ ۲) $۴xy$ ۳) $۳xy-\sin\sqrt{y}$ ۴) $۱۲xy$

۲۶. اگر $w = x^۲y + y^۲z + z^۲x$ باشد، $w_x + w_y + w_z$ برابر است با:

۱) $(x+y+z)$ ۲) $۲(x+y+z)$ ۳) $(x+y+z)^۲$ ۴) $۲xyz$

۲۷. اگر $z = xy + y\ln xy$ باشد، عبارت $\frac{x.\partial^۲z}{\partial x^۲} + \frac{y.\partial^۲z}{\partial x \partial y}$ برابر است با:

۱) y ۲) x ۳) $\frac{۱}{y}$ ۴) ۱

۲۸. اگر $f(x,y) = e^{-x}.\sin(x+۲y)$ باشد، $f_x\left(۰, \frac{\pi}{۴}\right)$ کدام است؟

۱) $-e$ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) e

۲۹. اگر $f(x,y) = \frac{۲x}{x-y}$ باشد، $f_{xy}(۱, ۰)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۱

۳۰. اگر $z = y^x$ باشد، $\frac{\partial^۲z}{\partial x \partial y}$ به‌ازای $x = y = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۱. اگر $U = \ln(x+y+z)$ باشد، حاصل $\ln U_x + \ln U_y + \ln U_z$ کدام است؟

۱) $-۳U$ ۲) $۳U$ ۳) $\frac{۱}{۳}U$ ۴) $U^{-۳}$

۳۲. اگر $z = \ln\sqrt{x^۲+y^۲}$، آنگاه z_{xx} کدام است؟

۱) z_{yy} ۲) $\frac{۱}{۲}z_{yy}$ ۳) $-z_{yy}$ ۴) $\sqrt{z_{yy}}$

۳۳. اگر $w = f\left(\frac{xy}{x^۲+y^۲}\right)$ باشد، حاصل $\frac{\partial w}{\partial x}$ کدام است؟

۱) $w'.\left(\frac{xy}{x^۲+y^۲}\right)\left(\frac{y^۲-x^۲y}{(x^۲+y^۲)^۲}\right)$ ۲) $w'.\left(\frac{y^۲-x^۲y}{(x^۲+y^۲)^۲}\right)$

۳) $\left(\frac{xy}{x^۲+y^۲}\right)\left(\frac{y^۳-x^۲y}{(x^۲+y^۲)}\right)$ ۴) $w' \cdot w$

۳۴. اگر $z = (x+۲y)^{xy}$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(۱, ۱)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\ln ۳ + \frac{۱}{۳}$ ۳) $۳\ln ۳ + ۱$ ۴) $\ln ۳$

۳۵. دیفرانسیل کامل تابع $z = \ln\frac{x+y}{x-y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲(ydx - xdy)}{x^۲-y^۲}$ ۲) $\frac{۲(xdx + ydy)}{x^۲-y^۲}$ ۳) $\frac{۲(xdy - ydx)}{x^۲-y^۲}$ ۴) $\frac{۲(ydx + xdy)}{x^۲-y^۲}$

۳۶. دیفرانسیل کامل تابع $z = \ln\sin(\frac{x}{y})$ برابر است با:

۱) $\cot\frac{x}{y}\left(\frac{ydx - xdy}{y^۲}\right)$ ۲) $\tan\frac{x}{y}\left(\frac{ydx - xdy}{y^۲}\right)$

۳) $\cot\frac{x}{y}\left(\frac{xdy - ydx}{y^۲}\right)$ ۴) $\tan\frac{y}{x}\left(\frac{xdy - ydx}{y^۲}\right)$

۳۷. هرگاه $z = F(x^۲ - y^۲)$، حاصل $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۲(y^۲ - x^۲)$ ۳) z ۴) $۲(x^۲ - y^۲)$

۳۸. اگر $e^{xyz} = e^x + e^y + e^z$ باشد، dz به‌ازای $x = y = z = ۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $dx + dy$ ۳) $-(dx + dy)$ ۴) $dx - dy$

۳۹. اگر $z = x \sin y + y^۲ \cos xy$ باشد، دیفرانسیل مرتبه اول z در نقطه $(۰, ۴)$ برابر است با:

۱) $۴dx$ ۲) $۴dy$ ۳) $-۴dy$ ۴) $-۴dx$

۴۰. اگر $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = ۰$، آنگاه $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) z ۴) -۱

۴۱. اگر $(xy)^۳ + z^۳ = \cos z$ باشد، دیفرانسیل کامل z کدام است؟

۱) $\frac{۳x^۲y^۳dx + ۳x^۳y^۲dy}{(۳z^۲ + \sin z)}$

۲) $\frac{۳x^۲y^۳dx - ۳x^۳y^۲dy}{(۳z^۲ + \sin z)}$

۳) $-\frac{x^۲y^۳dx - x^۳y^۲dy}{(۳z^۲ + \sin z)}$

۴) $-\frac{۳x^۲y^۳dx + ۳x^۳y^۲dy}{(۳z^۲ + \sin z)}$

۴۲. شیب خط مماس بر رویه $z = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۴ - ۲x^۲ - ۲y^۲}$، در صفحه $y = ۲$، در نقطه‌ای به‌طول ۲ واقع بر رویه کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۴۳. اگر $z = f(x, y) = x^۲ + ۲xy - y^۲$ باشد و $\Delta x = ۰/۰۲$، $\Delta y = -۰/۰۱$ فرض شود، نمو کامل f در نقطه $(۱, ۲)$ کدام است؟

۱) ۱/۷۱۸۰ ۲) ۴/۰۵۹۶ ۳) ۲/۰۸۰۸ ۴) ۰/۱۳۹۹

۴۴. در تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^۲ - y^۲)}{x^۲ + y^۲} & (x, y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x, y) = (۰, ۰) \end{cases}$ حاصل $f_x(۰, y)$ کدام است؟

۱) $-y$ ۲) y ۳) $\frac{۱}{y}$ ۴) $y^۲$

۴۵. دیفرانسیل مرتبه دوم $z = x \ln(\frac{y}{x})$ در نقطه $(۱, ۱)$ کدام است؟

۱) $d^۲z = dx^۲ - ۲dxdy + dy^۲$

۲) $d^۲z = -dx^۲ - ۲dxdy + dy^۲$

۳) $d^۲z = -dx^۲ + ۲dxdy - dy^۲$

۴) $d^۲z = dx^۲ + ۲dxdy + dy^۲$

۴۶. دیفرانسیل مرتبه دهم تابع $z = e^{x+۲y}$ کدام است؟

۱) $e^{x+۲y}(dx + ۲dy)^{۱۰}$

۲) $e^{x+۲y}(dx + dy)^{۱۰}$

۳) $e^{x+۲y}(۲dx + dy)^{۱۰}$

۴) $e^{x+۲y}(dx - dy)^{۱۰}$

۴۷. در تابع $z = e^{\frac{x}{y}} \cdot \ln(\frac{x^۲}{y})$ مقدار $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial x}$ در نقطه $(۱, ۱)$ کدام است؟

۱) $۲e$ ۲) ۰ ۳) $-e$ ۴) ۱

۴۸. در تابع $U = x^۲ + y^۲ + z^۲$ در صورتی که $x = e^t \cos t$ و $y = e^t \sin t$ و $z = e^t$ باشد، $\frac{dU}{dt}$ کدام است؟

۱) $e^{۲t}$ ۲) $\sin^۲ t + ۲e^{۲t}$ ۳) $۴e^{۲t}$ ۴) $\cos t + ۲e^{۲t}$

۴۹. در تابع $w = xy + yz$ در صورتی که $x = \frac{e^t}{t}$ و $y = \frac{e^{-t}}{t}$ و $z = t^۲$ باشد، $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ به‌ازای $t = ۱$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) $e^{-۱}$

۵۰. اگر $z = z(x, y)$ به‌صورت $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$ بیان شده باشد، داریم:

۱) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = ۱$ ۲) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ ۳) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ۱$ ۴) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = ۰$

۵۱. اگر $U = \ln(x^۲ + y^۲ + ۲t)$ باشد که در آن $y = r - s$ و $x = r + s$ و $t = ۲rs$ است، مشتق تابع U نسبت به s کدام است؟

۱) $r - s$ ۲) $\frac{۱}{r+s}$ ۳) $\frac{۲}{r+s}$ ۴) $۲(r + s)$

۵۲. اگر $x \ln yz - y \ln xz = ۰$ باشد، z_x برابر است با:

۱) $\frac{zy(۱ - \ln yz)}{x(x-y)}$ ۲) $-\frac{z(x \ln yz - y)}{x(x-y)}$ ۳) $\frac{۱ - \ln yz}{x-y}$ ۴) $\frac{zy(۱ - \ln xy)}{x(x-y)}$

۵۳. اگر $z = x^۲ \cdot \sin(\frac{x}{y}) + y^۲ \cdot \cos(\frac{x}{y})$ باشد، $x \cdot z_x + y \cdot z_y$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۲z$ ۳) z ۴) $-۲z$

۵۴. اگر $z = \sqrt{xy + xt + yt}$ باشد، عبارت $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + t\frac{\partial z}{\partial t}$ برابر است با:

۱) z ۲) ۰ ۳) $-z$ ۴) $۲z$

۵۵. اگر $z = \ln(x^۲ + xy + y^۲)$ باشد، $x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $۲z$ ۳) z ۴) ۲

۵۶. اگر $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - x^۲ - y^۲$ باشد، عبارت $x.z_x + y.z_y$ برابر است با:

۱) $z - x^۲ - y^۲$ ۲) $-z$ ۳) z ۴) $x^۲ + y^۲$

۵۷. در تابع $z = ۲x + ۲y + y^۲ + ۳x^۲ + ۵$ مقادیر (x, y) که به‌طور هم‌زمان در هر دو شرط $\frac{\partial z}{\partial x} = ۰$ و $\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ صدق کند، کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳}, ۱)$ ۲) $(-\frac{۱}{۳}, -۱)$ ۳) $(\frac{۱}{۳}, -۱)$ ۴) $(-\frac{۱}{۳}, ۱)$

۵۸. در تابع $z = e^{\ln x} e^{\ln y}$، حاصل $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) e ۳) ۱ ۴) $\ln xy$

۵۹. اگر $z = (xyt)^۲$ باشد و $dx = dy = dt = ۰/۱$ و $dx^۲ = dy^۲ = dt^۲ = ۰/۰۱$، آنگاه $d^۲z$ در نقطه $(۱, ۱, ۱)$ کدام است؟

۱) ۰/۳۳ ۲) ۳/۳ ۳) ۰/۰۹ ۴) ۰/۳۰

۶۰. اگر $z = \sin^۲(xy) + \cos^۲(xy)$ باشد، dz کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $dx + dy$ ۴) $dx - dy$

۶۱. اگر $f(x,y) = ax^۲ + ۲bxy + cy^۲$، شرط لازم و کافی برای آنکه $f(۰,۰)$ ماکزیمم باشد، کدام است؟

۱) $ac - b^۲, a < ۰$ ۲) $ac - b^۲ < ۰, a < ۰$

۳) $ac - b^۲ > ۰, a > ۰$ ۴) $ac - b^۲ < b^۲, a > ۰$

۶۲. تابع $z = x^۳ + y^۳ - ۳xy$ مفروض است، نوع نقاط $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ کدام است؟

۱) ماکزیمم نسبی در $(۰,۰)$ و نقطه زینی در $(۱,۱)$

۲) نقطه زینی در $(۰,۰)$ و ماکزیمم نسبی در $(۱,۱)$

۳) نقطه زینی در $(۰,۰)$ و مینیمم نسبی در $(۱,۱)$

۴) مینیمم نسبی در $(۰,۰)$ و ماکزیمم نسبی در $(۱,۱)$

۶۳. نقطه بحرانی تابع $z = ۲xy - ۵y^۲ - ۲x^۲ + ۴x + ۴y - ۴$ در چه وضعیتی است؟

۱) زینی ۲) مینیمم ۳) عطف ۴) ماکزیمم

۶۴. تابع $z = f(x,y) = ۲x^۴ - x^۲ + ۳y^۲$ دارای:

۱) دو نقطه مینیمم و یک نقطه زینی است.

۲) یک نقطه مینیمم، یک نقطه زینی و یک نقطه ماکزیمم است.

۳) دو نقطه ماکزیمم و یک نقطه زینی است.

۴) یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه زینی است.

۶۵. اگر در تابع دومتغیره $z = f(x,y)$ داشته باشیم $\frac{\partial f}{\partial x} = ۲x$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = -۲y$، نقطه بحرانی کدام است؟

۱) ماکزیمم ۲) زینی ۳) مینیمم ۴) عطف

۶۶. به‌ازای کدام‌مقدار m، طول نقطه‌ی بحرانی تابع $z = x^۲ + y^۲ + mx - ۴y + ۸$ برابر ۱ است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۶۷. نوع نقطه بحرانی تابع $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ کدام است؟ (x و y زاویای حاده‌اند)

۱) مینیمم ۲) عطف ۳) زینی ۴) ماکزیمم

۶۸. به‌ازای کدام مقدار a و b، نقطه بحرانی تابع $z = ax^۲ + xy + by^۲ - ۴x + ۸y + ۵$ یک نقطه مینیمم است؟ $(a, b > ۰)$

۱) $ab < \frac{۱}{۴}$ ۲) $ab > \frac{۱}{۲}$ ۳) $ab < \frac{۱}{۲}$ ۴) $ab > \frac{۱}{۴}$

۶۹. به‌ازای چه مقادیری از a نقطه بحرانی تابع $z = x^۲ + ۴ay^۲ - ۴x$ مینیمم است؟

۱) $a > ۰$ ۲) $a < ۰$ ۳) $\{\}$ ۴) $-۱ < a < ۱$

۷۰. ماکزیمم یا مینیمم تابع $z = xy$ با شرط $۲x + y = ۴$ کدام است؟

۱) $\max z = ۱$ ۲) $\max z = ۲$ ۳) $\min z = ۲$ ۴) $\min z = ۱$

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۹

۱. گزینه‌ی ۱.

$$(fog)(۰,۰,۱) = f(g(۰,۰,۱)), g(۰,۰,۱) = \frac{۰ \times ۰}{۱} = ۰ \Longrightarrow$$
$$f(۰) = \frac{e^{۰} + e^{۰}}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

۲. گزینه‌ی ۱. به‌ازای $y = ۱$ و $z = ۰$ تابع f به‌صورت $f(x,y,z) = x$ در می‌آید که بُرد آن $\mathbb{R}$ است.

۳. گزینه‌ی ۳.

$$\sin(xy) \neq ۰ \Longrightarrow xy \neq k\pi, k \in Z$$

۴. گزینه‌ی ۴.

$$x + y \geqslant ۰ \Longrightarrow D_z = \{(x,y) | x + y \geqslant ۰\}$$
$$R_z = \{z | z \geqslant ۰\} = \{۰\} \cup R^{+}$$

۵. گزینه‌ی ۳. $x + y \neq ۰$ یا $x \neq -y$.

۶. گزینه‌ی ۱.

$$D_u = \{(x,y,z) | z \geqslant ۲, x, y \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow R_u = \mathbb{R}$$

۷. گزینه‌ی ۲.

۸. گزینه‌ی ۱.

$$x + y \neq ۰ \Longrightarrow x \neq -y \Longrightarrow D_z = \{(x,y) | x \neq -y\}$$

برد این تابع برابر است با برد تابع سینوس یعنی: $R_z = \{z | -۱ \leqslant z \leqslant ۱\}$

۹. گزینه‌ی ۳.

$$x^{۲} + y^{۲} - ۹ \geqslant ۰ \Longrightarrow x^{۲} + y^{۲} \geqslant ۹, \quad y \neq ۰$$

۱۰. گزینه‌ی ۲.

$$۹ - x^{۲} \geqslant ۰ \Longrightarrow ۹ \geqslant x^{۲} \Longrightarrow -۳ \leqslant x \leqslant ۳, y + ۳ \neq ۰ \Longrightarrow y \neq -۳$$

۱۱. گزینه‌ی ۴.

$$۱۶ - x^{۲} - ۴y^{۲} \geqslant ۰ \Longrightarrow x^{۲} + ۴y^{۲} \leqslant ۱۶ \Longrightarrow \frac{x^{۲}}{۱۶} + \frac{y^{۲}}{۴} \leqslant ۱ \rightarrow$$ نقاط داخل و محیط بیضی

۱۲. گزینه‌ی ۱. در صورتی عبارت زیر رادیکال مثبت است که یا صورت و مخرج مثبت باشند و یا صورت و مخرج هر دو منفی باشند.

$$\begin{cases} x - y \geqslant ۰ \\ x + y > ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geqslant y \\ x > -y \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x - y \leqslant ۰ \\ x + y < ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leqslant y \\ x < -y \end{cases}$$

$$D_f = \{(x,y) | x \geqslant y, x > -y\} \cup \{(x,y) | x \leqslant y, x < -y\}$$

۱۳. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x} \times \frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{۱}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۴. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۴})} \frac{\sin x.\sin y}{\sqrt{۲}} = \frac{\sin\frac{\pi}{۲}.\sin\frac{\pi}{۴}}{\sqrt{۲}} = \frac{۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۵. گزینه‌ی ۲.

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۰)} \frac{y^۲(x^۲+۱)}{x} = \lim_{x\to۱} \frac{(-x)^۲(x^۲+۱)}{x} = \lim_{x\to۱} x(x^۲+۱) = ۲$$

۱۶. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۲)} \frac{\text{Arctan}(xy-۲)}{\text{Arcsin}(۳xy-۶)} = \lim_{(x,y)\to(۱,۲)} \frac{xy-۲}{۳xy-۶} = \frac{۱}{۳}$$

۱۷. گزینه‌ی ۴. معادله‌ی خطی که از نقطه $(۰,۰)$ می‌گذرد به‌صورت $y=mx$ است.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y(x^۲+۱)}{x} = \lim_{x\to۰} \frac{mx(x^۲+۱)}{x} = \lim_{x\to۰} m(x^۲+۱) = m$$

بنابراین مقدار حد بستگی به مقدار m دارد. لذا تابع در نقطه $(۰,۰)$ حد ندارد.

۱۸. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۲y}{x^۴+y^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{mx^۳}{x^۴+m^۲x^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{mx^۳}{x^۲(x^۲+m^۲)} = \lim_{x\to۰} \frac{mx}{x^۲+m} = ۰$$

۱۹. گزینه‌ی ۱. تابع در $(۰,۰)$ تعریف شده است

$$\lim_{x\to۰} \frac{۳mx^۳}{x^۲+m^۲x^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{۳mx^۳}{x^۲(۱+m^۲)} = \lim_{x\to۰} \frac{۳mx}{۱+m^۲} = ۰ \Longrightarrow \text{تابع در } (۰,۰) \text{ حد دارد}$$

$$f(۰,۰) = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = ۰ \Longrightarrow \text{پیوسته است}$$

۲۰. گزینه‌ی ۲. تابع در $(۰,۰)$ تعریف شده است. تابع در $(۰,۰)$ حد دارد و حد آن صفر است در نتیجه تابع در $(۰,۰)$ پیوسته است.

۲۱. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۲+y^۲-x^۳}{x^۲+y^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{x^۲+m^۲x^۲-x^۳}{x^۲+m^۲x^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{x^۲(۱+m^۲-x)}{x^۲(۱+m^۲)} =$$

$$\lim_{x\to۰} \frac{۱+m^۲-x}{۱+m^۲} = ۱ \ , \ f(۰,۰) \neq \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$$

۲۲. گزینه‌ی ۱.

$$f(x,y) = e^{-(x^۲+y^۲)} = \frac{۱}{e^{x^۲+y^۲}}, e^{x^۲+y^۲} \neq ۰$$

۲۳. گزینه‌ی ۲.

$$x^۲+y^۲-۴=۰ \Longrightarrow x^۲+y^۲=۴ \Longrightarrow \text{دایره‌ای به مرکز } (۰,۰) \text{ و شعاع } ۲$$

۲۴. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x.\sin y+\frac{۱}{x} \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}=e^x\sin y-\frac{۱}{x^۲} \Longrightarrow \frac{\partial^۳ z}{\partial^۲ x\partial y}=e^x\cos y \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial^۴ z}{\partial x^۲\partial y^۲}=-e^x\sin y \Longrightarrow \frac{\partial^۴ z}{\partial x^۲\partial y^۲}\Big|_{(۰,\frac{۳\pi}{۲})}=-e^۰\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)=(-۱)(-۱)=۱$$

۲۵. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{x^۳y^۲-\sin\sqrt{y-\ln y}\right\}=۳x^۲y^۲ \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^۲}\{۳x^۲y^۲\}=۶xy^۲ \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^۲\partial y}\{۶xy^۲\}=۱۲xy$$

۲۶. گزینه‌ی ۳.

$$w_x+w_y+w_z=(۲xy+z^۲)+(x^۲+۲yz)+(y^۲+۲zx)=(x+y+z)^۲$$

۲۷. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}=-\frac{y}{x^۲},\ \frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}=۱+\frac{۱}{x}$$
$$x.\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}+y.\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}=x\left(-\frac{y}{x^۲}\right)+y\left(۱+\frac{۱}{x}\right)=-\frac{y}{x}+y+\frac{y}{x}=y$$

۲۸. گزینه‌ی ۳.

$$f_x(x,y)=-e^{-x}.\sin(x+۲y)+e^{-x}\cos(x+۲y) \Longrightarrow f_x\left(۰,\frac{\pi}{۴}\right)=-۱+۰=-۱$$

۲۹. گزینه‌ی ۲.

$$f_x(x,y)=\frac{۲(x-y)-۲x}{(x-y)^۲}=\frac{-۲y}{(x-y)^۲}$$
$$f_{xy}(x,y)=\frac{-۲(x-y)^۲+۲(x-y)(-۲y)}{(x-y)^۴}$$
$$f_{xy}(x,y)=\frac{-۲x^۲+۲y^۲}{(x-y)^۴} \Longrightarrow f_{xy}(۱,۰)=\frac{-۲}{۱}=-۲$$

۳۰. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\cdot\ln y \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}=xy^{x-۱}\cdot\ln y+\frac{۱}{y}\cdot y^x \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}\Big|_{(۱,۱)}=۰+۱=۱$$

۳۱. گزینه‌ی ۱.

$$\ln U_x+\ln U_y+\ln U_z=\ln\frac{۱}{x+y+z}+\ln\frac{۱}{x+y+z}+\ln\frac{۱}{x+y+z}$$
$$=\ln\left(\frac{۱}{x+y+z}\right)^۳=\ln(x+y+z)^{-۳}=-۳\ln(x+y+z)=-۳U$$

۳۲. گزینه‌ی ۳. داریم $z \doteq \ln(\sqrt{x^۲+y^۲})$ یا $z = \frac{۱}{۲}\ln(x^۲+y^۲)$ بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} z_x &= \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲x}{x^۲+y^۲} = \frac{x}{x^۲+y^۲} \Longrightarrow z_{xx} = \frac{x^۲+y^۲-۲x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} \\ z_y &= \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲y}{x^۲+y^۲} = \frac{y}{x^۲+y^۲} \Longrightarrow z_{yy} = \frac{x^۲+y^۲-۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} = -\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow z_{xx} = -z_{yy}$$

۳۳. گزینه‌ی ۲.

$$w = f\left(\frac{xy}{x^۲+y^۲}\right) \text{ ، } u = \frac{xy}{x^۲+y^۲} \Longrightarrow w = f(u)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dw}{du}\cdot\frac{y(x^۲+y^۲)-۲x^۲y}{(x^۲+y^۳)^۲} = w'\cdot\frac{y^۳-x^۲y}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

۳۴. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x+۲y)^{xy}\left[y\ln(x+۲y) + xy\cdot\frac{۱}{x+۲y}\right] \Longrightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(۱,۱)} = ۳\ln ۳ + ۱$$

۳۵. گزینه‌ی ۳.

$$z = \ln\frac{x+y}{x-y} = \ln(x+y) - \ln(x-y)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz = \left(\frac{۱}{x+y} - \frac{۱}{x-y}\right)dx + \left(\frac{۱}{x+y} + \frac{۱}{x-y}\right)dy = \frac{-۲ydx}{x^۲-y^۲} + \frac{۲xdy}{x^۲-y^۲}$$

$$dz = \frac{۲}{x^۲-y^۲}(xdy - ydx)$$

۳۶. گزینه‌ی ۱.

$$dz = \frac{\frac{۱}{y}\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot dx + \frac{-\frac{x}{y^۲}\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot dy = \frac{۱}{y}\cot\frac{x}{y}\cdot dx - \frac{x}{y^۲}\cot\frac{x}{y}dy$$

$$dz = \cot\frac{x}{y}\left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^۲}\right) = \cot\frac{x}{y}\left(\frac{ydx - xdy}{y^۲}\right)$$

۳۷. گزینه‌ی ۱.

$$z = F(x^۲-y^۲), u = x^۲-y^۲ \Longrightarrow z = F(u)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = ۲x\frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = -۲y\frac{\partial F}{\partial u} \end{cases} \Longrightarrow y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

۳۸. گزینه‌ی ۳.

$$yze^{xyz}\cdot dx+xze^{xyz}dy+xye^{xyz}\cdot dz=e^{x}\cdot dx+e^{y}\cdot dy+e^{z}\cdot dz$$
$$(x=y=z=۰)\Longrightarrow ۰+۰+۰=dx+dy+dz\Longrightarrow dz=-(dx+dy)$$

۳۹. گزینه‌ی ۲.

$$dz=(\sin y-y^{۳}\sin xy)dx+(x\cos y+۲y\cos xy-xy^{۲}\sin xy)dy$$
$$(۴,۰)\Longrightarrow dz=۴dy$$

۴۰. گزینه‌ی ۳. فرض می‌کنیم $z=z(x,y)$ و $u=\frac{x}{z}$ و $v=\frac{y}{z}$ بنابراین $F(u,v)=۰$. از F یک‌بار نسبت به x و یک‌بار نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases}F_u u_x+F_v v_x=۰\\ F_u u_y+F_v v_y=۰\end{cases}$$

چون F تابعی از u و v است، دستگاه فوق دارای جواب بدیهی $F_u=F_v=۰$ نیست و داریم:

$$\begin{vmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{vmatrix}=۰\Longrightarrow u_xv_y=v_xu_y\qquad(۱)$$

از طرف دیگر:

$$u_x=\frac{z-xz_x}{z^{۲}},v_x=\frac{-yz_x}{z^{۲}},u_y=\frac{-xz_y}{z^{۲}},v_y=\frac{z-yz_y}{z^{۲}}$$

با جایگذاری در تساوی (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{z-xz_x}{z^{۲}}\times\frac{z-yz_y}{z^{۲}}=\frac{-yz_x}{z^{۲}}\times\frac{-xz_y}{z^{۲}}\Longrightarrow xz_x+yz_y=z$$

۴۱. گزینه‌ی ۴.

$$۳x^{۲}y^{۳}\cdot dx+۳x^{۳}y^{۲}\cdot dy+۳z^{۲}\cdot dz=-\sin z\cdot dz$$
$$(۳z^{۲}+\sin z)dz=-(۳x^{۲}y^{۳}\cdot dx+۳x^{۳}y^{۲}dy)\Longrightarrow dz=-\frac{۳x^{۲}y^{۳}\cdot dx+۳x^{۳}y^{۲}dy}{۳z^{۲}+\sin z}$$

۴۲. گزینه‌ی ۱.

$$x=y=۲\Longrightarrow z=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۴-۸-۸}=\sqrt{۲}\Longrightarrow \text{نقطه تماس بر رویه } (۲,۲,\sqrt{۲})$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۱}{۲}\times\frac{-۴x}{۲\sqrt{۲۴-۲x^{۲}-۲y^{۲}}}=\frac{-x}{\sqrt{۲۴-۲x^{۲}-۲y^{۲}}}\Longrightarrow\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=۲\\y=۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۳. گزینه‌ی ۴.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f(۱+۰/۰۲, ۲-۰/۰۱) - f(۱,۲)$$
$$= f(۱/۰۲, ۱/۹۹) - f(۱,۲)$$
$$= (۱/۰۲)^۲ + ۲(۱/۰۲)(۱/۹۹) - (۱/۹۹)^۲ - (۱+۴-۴) = ۰/۱۳۹۹$$

۴۴. گزینه‌ی ۱.

$$f_x(x,y) = \frac{[y(x^۲-y^۲)+۲x^۲y](x^۲+y^۲) - ۲x^۲y(x^۲-y^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲} \Longrightarrow f_x(۰,y) = -y$$

۴۵. گزینه‌ی ۳.

$$d^۲z = z_{x^۲}\cdot dx^۲ + ۲z_{xy}\cdot dxdy + z_{y^۲}\cdot dy^۲$$
$$z_x = \ln\frac{y}{x} + x\cdot\frac{-\frac{y}{x^۲}}{\frac{y}{x}} = \ln\frac{y}{x} - ۱ \Longrightarrow z_{x^۲} = \frac{-\frac{y}{x^۲}}{\frac{y}{x}} = -\frac{۱}{x}$$
$$z_y = x\cdot\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y} \Longrightarrow z_{y^۲} = -\frac{x}{y^۲}, z_{yx} = z_{xy} = \frac{\frac{۱}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{۱}{y}$$
$$d^۲z = -\frac{۱}{x}\cdot dx^۲ + \frac{۲}{y}\cdot dxdy - \frac{x}{y^۲}dy^۲ \xrightarrow{(۱,۱)} d^۲z = -dx^۲ + ۲dxdy - dy^۲$$

۴۶. گزینه‌ی ۱.

$$dz = e^{x+۲y}\cdot dx + ۲e^{x+۲y}\cdot dy \Longrightarrow d^۲z = e^{x+۲y}\cdot dx^۲ + ۴e^{x+۲y}\cdot dxdy + ۴e^{x+۲y}\cdot dy^۲$$
$$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow d^nz = e^{x+۲y}(dx+۲dy)^n \Longrightarrow d^{۱۰}z = e^{x+۲y}(dx+۲dy)^{۱۰}$$

۴۷. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۱}{y}e^{\frac{x}{y}}\cdot\ln\frac{x^۲}{y} + \frac{\frac{۲x}{y}}{\frac{x^۲}{y}}\cdot e^{\frac{x}{y}} = \frac{۱}{y}e^{\frac{x}{y}}\cdot\ln\frac{x^۲}{y} + \frac{۲}{x}\cdot e^{\frac{x}{y}}$$
$$\frac{\partial^۲z}{\partial x\partial x} = \frac{۱}{y^۲}e^{\frac{x}{y}}\cdot\ln\frac{x^۲}{y} + \frac{\frac{۲x}{y}}{\frac{x^۲}{y}}\cdot\frac{۱}{y}e^{\frac{x}{y}} - \frac{۲}{x^۲}e^{\frac{x}{y}} + \frac{۱}{y}e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{۲}{x}$$
$$(۱,۱) \Longrightarrow \frac{\partial^۲z}{\partial x\partial x} = ۰ + ۲e - ۲e + ۲e = ۲e$$

۴۸. گزینه‌ی ۳.

$$U = x^۲+y^۲+z^۲ = (e^t\cos t)^۲ + (e^t\sin t)^۲ + (e^t)^۲ = e^{۲t}\cos^۲t + e^{۲t}\sin^۲t + e^{۲t}$$
$$U = e^{۲t}(\sin^۲t + \cos^۲t + ۱) = e^{۲t}(۱+۱) \Longrightarrow U = ۲e^{۲t}\ ،\ \frac{dU}{dt} = ۴e^{۲t}$$

۴۹. گزینه‌ی ۳.

$$w = xy + yz = \left(\frac{e^t}{t}\right)\left(\frac{e^{-t}}{t}\right) + \left(\frac{e^{-t}}{t}\right)(t^۲) = \frac{۱}{t^۲} + te^{-t}$$
$$\frac{dw}{dt} = -\frac{۲t}{t^۴} + e^{-t} - te^{-t} = -\frac{۲}{t^۳} + e^{-t}(۱-t) \Longrightarrow \left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=۱} = -۲$$

۵۰. گزینه‌ی ۴.

$$F(x,y,z) = x+y+z-e^{-(x+y+z)} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1+e^{-(x+y+z)}}{1+e^{-(x+y+z)}} = -1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1+e^{-(x+y+z)}}{1+e^{-(x+y+z)}} = -1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

۵۱. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial s}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+2t}\right)(1) + \left(\frac{2y}{x^2+y^2+2t}\right)(-1) + \left(\frac{2}{x^2+y^2+2t}\right)(2r)$$

$$= \frac{2(x-y+2r)}{x^2+y^2+2t} = \frac{2(r+s-r+2r)}{(r+s)^2+(r-s)^2+4rs} = \frac{4(r+s)}{2(r+s)^2} = \frac{2}{r+s}$$

۵۲. گزینه‌ی ۲.

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\ln yz - y\cdot\frac{z}{xz}}{x\cdot\frac{y}{yz} - y\cdot\frac{x}{xz}} = -\frac{\ln yz - \frac{y}{x}}{\frac{x}{z}-\frac{y}{z}} = -\frac{\frac{x\ln yz - y}{x}}{\frac{x-y}{z}} = -\frac{z(x\ln yz - y)}{x(x-y)}$$

۵۳. گزینه‌ی ۱.

$$f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2 x^2.\sin\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) + \lambda^2 y^2\cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)$$

$$= \lambda^2\left(x^2\cdot\sin(\frac{x}{y}) + y^2\cdot\cos(\frac{x}{y})\right) \to n=2,\ x\cdot z_x + y\cdot z_y = nz = 2z$$

۵۴. گزینه‌ی ۱.

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda t) = \sqrt{\lambda^2 xy+\lambda^2 xt+\lambda^2 yt} = \lambda\sqrt{xy+xt+yt} \Longrightarrow n=1$$

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + t\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = nz = z$$

۵۵. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y+x}{x^2+xy+y^2}$$

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2+xy}{x^2+xy+y^2} + \frac{2y^2+xy}{x^2+xy+y^2} = \frac{2x^2+2xy+2y^2}{x^2+xy+y^2} = 2$$

۵۶. گزینه‌ی ۱.

$$z_x = f + x\cdot\frac{-y}{x^2}f' - 2x,\ z_y = x\cdot\frac{1}{x}f' - 2y$$

$$x.z_x + y\cdot z_y = x\left(f - \frac{y}{x}f' - 2x\right) + y(f'-2y) = xf - yf' - 2x^2 + yf' - 2y^2$$

$$= xf - y^2 - x^2 - x^2 - y^2 = z - x^2 - y^2$$

۵۷. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = ۰ \Longrightarrow ۲ + ۶x = ۰ \Longrightarrow x = -\frac{۱}{۳} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow ۲ + ۲y = ۰ \Longrightarrow y = -۱ \end{cases}$$

۵۸. گزینه‌ی ۱.

$$z = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۱}{x} e^{\ln xy} \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = -\frac{۱}{x^۲} e^{\ln xy} + \frac{۱}{x^۲} e^{\ln xy} = ۰$$

راه حل دوم:

$$z = e^{\ln xy} = xy \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = ۰$$

۵۹. گزینه‌ی ۴.

$$d^۲z = z_{x^۲} dx^۲ + z_{y^۲} dy^۲ + z_{t^۲} dt^۲ + ۲z_{xy} dxdy + ۲z_{xt} dxdt + ۲z_{yt} dydt$$

$$d^۲z = ۲y^t t^۲ dx^۲ + ۲x^۲ t^۲ dy^۲ + ۲x^۲ y^۲ dt^۲ + ۸xyt^۲ dxdy + ۸xy^۲ t dxdt + ۸x^۲ y dydt$$

$$d^۲z = ۲(۰/۰۳) + ۸(۰/۰۳) = ۰/۰۶ + ۰/۲۴ = ۰/۳۰$$

۶۰. گزینه‌ی ۱. اگر $\alpha = xy$ باشد، می‌دانیم $\sin^۲ \alpha + \cos^۲ \alpha = ۱$ بنابراین:

$$z = \sin^۲(xy) + \cos^۲(xy) = ۱ \Longrightarrow dz = ۰ \times dx + ۰ \times dy = ۰$$

۶۱. گزینه‌ی ۱.

$$f_x = ۲ax + ۲by \ , \ f_y = ۲bx + ۲cy \ , \ f_{xx} = ۲a, f_{yy} = ۲c, f_{xy} = ۲b$$

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^۲ = ۲a \cdot ۲c - ۴b^۲ = ۴(ac - b^۲)$$

برای ماکزیمم بودن نقطه‌ی بحرانی لازم است:

$$\begin{cases} f_{xx} < ۰ \\ \Delta > ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲a < ۰ \Longrightarrow a < ۰ \\ ac - b^۲ > ۰ \end{cases}$$

۶۲. گزینه‌ی ۳.

$$z_{xx} = ۶x, z_{xy} = z_{yx} = -۳, z_{yy} = ۶y$$

$$(۰,۰) : |H_۱| = ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} ۰ & -۳ \\ -۳ & ۰ \end{vmatrix} = -۹ < ۰ \Longrightarrow (۰,۰) \text{ زینی است}$$

$$(۱,۱) : |H_۱| = ۶ > ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} ۶ & -۳ \\ -۳ & ۶ \end{vmatrix} = ۲۵ > ۰ \Longrightarrow (۱,۱) \text{ مینیمم نسبی است}$$

۶۳. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} z_x = ۲y - ۴x + ۴ = ۰ \\ z_y = ۲x - ۱۰y + ۴ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲y - ۴x = -۴ \\ ۴x - ۲۰y = -۸ \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{۴}{۳}, y = \frac{۲}{۳}$$

$$z_{xx} = -۴, z_{yy} = -۱۰, z_{xy} = z_{yx} = ۲$$

$$|H_۱| = -۴ < ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} -۴ & ۲ \\ ۲ & -۱۰ \end{vmatrix} = ۴۰ - ۴ = ۳۶ > ۰ \Longrightarrow \text{نقطه ماکزیمم است}$$

۶۴. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} z_x = ۸x^۳ - ۲x = ۰ \Longrightarrow ۲x(۴x^۲ - ۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰, x = \frac{۱}{۲}, x = -\frac{۱}{۲} \\ z_y = ۶y = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \end{cases}$$

نقاط بحرانی عبارتند از $M_۱(۰,۰)$ و $M_۲\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right)$ و $M_۳\left(\frac{-۱}{۲}, ۰\right)$.

$$z_{xx} = ۲۴x^۲ - ۲, z_{yy} = ۶, z_{xy} = z_{yx} = ۰$$

$$M_۱ : |H_۱| = -۲ < ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{vmatrix} = -۱۲ < ۰ \Longrightarrow M_۱ \text{ نقطه زینی است}$$

$$M_۲ : |H_۱| = ۴ > ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{vmatrix} = ۳۶ > ۰ \Longrightarrow M_۲ \text{ نقطه مینیمم است}$$

$$M_۳ : |H_۱| = ۴ > ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{vmatrix} = ۳۶ > ۰ \Longrightarrow M_۳ \text{ نقطه مینیمم است}$$

۶۵. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = ۲x = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \\ z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -۲y = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow M(۰,۰)$$

$$z_{xx} = ۲, z_{yy} = -۲, z_{xy} = z_{yx} = ۰$$

$$|H_۱| = ۲ > ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{vmatrix} = -۴ < ۰ \Longrightarrow M \text{ نقطه زینی است}$$

۶۶. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} z_x = ۲x + m = ۰ \Longrightarrow x = -\frac{m}{۲} \xrightarrow{x=۱} m = -۲ \\ z_y = ۲y - ۴ = ۰ \Longrightarrow y = ۲ \end{cases}$$

۶۷. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} z_x = \cos x + \cos(x+y) = ۰ \\ z_y = \cos y + \cos(x+y) = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \cos x = \cos y \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۳}, y = \frac{\pi}{۳}$$

$$z_{xx} = -\sin x - \sin(x+y), z_{yy} = -\sin y - \sin(x+y), z_{xy} = z_{yx} = -\sin(x+y)$$

$$\left(\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}\right) : z_{xx} = -\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) - \sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) = -\sqrt{۳}, z_{yy} = -\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) - \sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)$$

$$= -\sqrt{۳}, z_{xy} = z_{yx} = -\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$|H_۱| = -\sqrt{۳} < ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} -\sqrt{۳} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\sqrt{۳} \end{vmatrix} = ۳ - \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۴} > ۰ \Longrightarrow$$ نوع نقطه ماکزیمم است

۶۸. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} z_x = ۲ax + y - ۴ = ۰ \Longrightarrow z_{xx} = ۲a, z_{xy} = ۱ \\ z_y = x + ۲by + ۸ = ۰ \Longrightarrow z_{yy} = ۲b, z_{yx} = ۱ \end{cases}$$

$$|H_۱| = ۲a > ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲a & ۱ \\ ۱ & ۲b \end{vmatrix} = ۴ab - ۱ > ۰ \Longrightarrow ab > \frac{۱}{۴}$$

۶۹. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} z_x = ۲x - ۴ = ۰ \Longrightarrow z_{xx} = ۲, z_{xy} = ۰ \\ z_y = ۸ay = ۰ \Longrightarrow z_{yy} = ۸a, z_{yx} = ۰ \end{cases}$$

$$|H_۱| = ۲ > ۰, \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۸a \end{vmatrix} = ۱۶a > ۰ \Longrightarrow a > ۰$$

۷۰. گزینه‌ی ۲.

$$۲x + y = ۴ \Longrightarrow y = ۴ - ۲x \Longrightarrow z = x(۴ - ۲x) \Longrightarrow z = ۴x - ۲x^۲$$

$$z_x = ۴ - ۴x = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \Longrightarrow y = ۲ \Longrightarrow z = ۲$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
z_x		$+$	۰	$-$	
			max		

مدیریت

۱. اگر تابع $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ مفروض باشد، حاصل عبارت $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ در $x = y = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۲. مختصات مینیمم تابع $z = x^۲ - ۲x + y^۲ - ۴y + ۱۰$ کدام است؟ [۱۳۷۰]

۱) $(۰, ۰, ۱۰)$ ۲) $(۱, ۲, ۵)$ ۳) $(۱, ۱, ۲)$ ۴) $(۲, ۱, ۹)$

۳. در تابع $z = e^{xy} + xy$، $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ در نقطه $x = y = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) ۱

۴. دیفرانسیل کامل تابع $z = x^۲ + y^۲ + ۲xy$ در نقطه $x = y = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $dx + dy$ ۲) $۴dx + ۴dy$ ۳) $۲dx + dy$ ۴) $۲dx + ۲dy$

۵. نقطه بحرانی تابع $z = x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y + ۱۲$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $(۱, ۱, ۱۰)$ مینیمم ۲) $(۱, ۱, ۱۰)$ ماکزیمم ۳) $(۰, ۰, ۸)$ مینیمم ۴) $(۰, ۰, ۸)$ ماکزیمم

۶. در تابع $z = x^۲ + y^۲$ با فرض $x + y = ۲$ نقطه بحرانی کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $(۱, ۱, ۲)$ مینیمم ۲) $(۱, ۱, ۲)$ ماکزیمم ۳) $(۰, ۲, ۴)$ ماکزیمم ۴) $(۲, ۰, ۴)$ ماکزیمم

۷. در تابع $z = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y}$ حاصل $x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $-z$ ۲) z ۳) $۲z$ ۴) $۳z$

۸. در عبارت $-۳xyz + x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $x = y = z = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۹. اگر $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + ۵$ باشد، حاصل عبارت $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱ ۲) $-z$ ۳) z ۴) صفر

۱۰. ماکزیمم تابع $z = xy$ در صورتی که $۲x + y = ۸$ باشد، کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۱. در تابع $z = ۸ - x^۲ + ۲x - ۲y^۲ + ۴y$ مقدار z در نقطه ماکزیمم کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۲. اگر $u = \ln \sqrt{x^۲ + y^۲}$ باشد، مقدار $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ به‌ازای $y = ۱$ و $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳}{۲۵}$ ۳) $\frac{۴}{۲۵}$ ۴) $\frac{۵}{۲۵}$

۱۳. اگر داشته باشیم $e^{۲x+y+۳z} = xyz + ۱$ مقدار z_x به‌ازای $x = y = z = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۴. در تابع $z = x^۲ + y^۲ - xy$ مقدار dz به‌ازای $x = y = ۱$ و $dx = dy = ۰/۱$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۱/۲ ۴) ۲/۲

۱۵. مقدار ماکزیمم تابع $z = -۲x^۲ + ۳y^۲ + ۶$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶. نقطه بحرانی تابع $z = ۲x^۲ - ۲xy + y^۲ + ۵x - ۳y$ چگونه است؟ [۱۳۷۳]

۱) مینیمم ۲) ماکزیمم ۳) زینی ۴) عطف

۱۷. برد تابع $z = \sqrt{۴ - ۲x^۲ - y^۲}$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $[۰, ۳]$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $[۰, ۲]$ ۴) $[۰, ۴]$

۱۸. در تابع دومتغیره $u = \ln \sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲}$ مقدار $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $x - a$ ۴) $y - b$

۱۹. نقطه بحرانی تابع $z = ۴ - x^۲ - y^۲$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $(۰, ۰, ۴)$ مینیمم ۲) $(۱, ۱, ۲)$ ماکزیمم ۳) $(۱, ۱, ۲)$ مینیمم ۴) $(۰, ۰, ۴)$ ماکزیمم

۲۰. مقدار ماکزیمم تابع $z = -x^۲ - y^۲ + ۱$ با شرط $x - y = ۰$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) ۲

۲۱. طول نقطه ماکزیمم تابع $z = ۴ - x^۲ - y^۲$، با شرط $x + y = ۲$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۲. در تابع دو متغیره‌ی $z = xe^y + ye^x$ حاصل عبارت $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ye^x ۲) $e^x + e^y$ ۳) z ۴) xe^y

۲۳. اگر $z = xy$ باشد، مقدار dz در نقطه $x = y = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) صفر ۲) $dxdy$ ۳) $dx + dy$ ۴) $dx + dy + dxdy$

۲۴. مقدار ماکزیمم تابع $z = ۲۰ - x^۲ - ۴y^۲ + ۸y + ۲x$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۲۵. حداکثر تابع $z = xy$ اگر $x + y = ۱۶$ باشد، کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

۲۶. اگر $Z = U^۲ + V^۲ - ۲UV$ و $U = r\cos\theta$ و $V = r\sin\theta$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $(۲U - ۲V)(-r\sin\theta)$ ۲) $(۲V - ۲U)(r\cos\theta)$

۳) $-۲r^۲\cos ۲\theta$ ۴) $-۲r^۲\sin ۲\theta$

۲۷. اگر داشته باشیم $z = \frac{x^۲}{۲y^۲} + \frac{y^۲}{۲x^۲}$ مقدار $x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) z ۲) صفر ۳) $۲z$ ۴) $\frac{x^۲}{y^۲}$

۲۸. از تابع ضمنی $x^۲ - y^۲ + xyz - xy = ۰$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(۱, ۱, ۱)$ برابر کدام است؟ ۱۳۷۶

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۹. مختصات نقطه بحرانی تابع $z = x^۲ + ۲y^۲ + ۲x - ۴y$ کدام است؟ ۱۳۷۶

۱) $(۰, ۰, ۰)$ ۲) $(۱, ۱, ۱)$ ۳) $(۱, -۱, ۱)$ ۴) $(-۱, ۱, -۳)$

۳۰. در تابع دومتغیری $z = \frac{x^۲}{y^۲} + \frac{y}{x}$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه $x = ۱$ و $y = ۲$ کدام است؟ ۱۳۷۷

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۳۱. دامنه‌ی حوزه‌ی مقادیر حقیقی f با ضابطه $f(x, y) = \frac{xy}{x^۲ + y^۲}$ کدام است؟ ۱۳۷۷

۱) $\mathbb{R}^۲$ ۲) $\mathbb{R} - \{۰\}$ ۳) $\mathbb{R}^+ - \{(۰, ۰)\}$ ۴) $\mathbb{R}^۲ - \{(۰, ۰)\}$

۳۲. در نقطه بحرانی تابع دومتغیر حقیقی به معادله $z = ۲x^۲ + y^۲ - ۲xy + ۲x$ مقدار $x + z$، کدام است؟ ۱۳۷۷

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۲

۳۳. نوع نقطه بحرانی تابع f در سؤال قبل، کدام است؟ ۱۳۷۷

۱) ماکزیمم ۲) مینیمم ۳) عطف ۴) زینی

۳۴. در تابع $z = \ln(u^۲ + v^۲)$، $u = xy$ و $v = \frac{x}{y}$، مقدار z'_x در $x = ۱$ و $y = ۱$ کدام است؟ ۱۳۷۷

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\ln ۲$

۳۵. اگر داشته باشیم $\begin{cases} z = x^۲ - y^۲ \\ x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$، $\frac{dz}{dt}$ در نقطه $t = \frac{\pi}{۴}$، کدام است؟ ۱۳۷۸

۱) $-\frac{\pi^۲}{۸}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) π

۳۶. در تابع دومتغیری $z = x^۲ + ۴xy + ۲y^۲$، مقدار $d^۲z$ کدام است؟ ۱۳۷۸

۱) $۱۲dxdy$ ۲) $۲dx^۲ + ۲dy^۲$

۳) $۲d^۲x + ۲d^۲y$ ۴) $۲dx^۲ + ۸dydx + ۴dy^۲$

۳۷. برد (Range) تابع حقیقی $z = \frac{x^۲}{x^۲ + y^۲}$، کدام است؟ ۱۳۷۸

۱) R ۲) R^+ ۳) $[۰, ۱]$ ۴) $R^+ \cup \{۰\}$

۳۸. ارتفاع نقطه بحرانی تابع $z = ۲x^۲ - xy + y^۲ + ۱۰$، کدام است؟ ۱۳۷۸

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱۰

۳۹. در تابع f به معادله‌ی $z = \frac{xy - ۱}{\ln(x + y) - ۱}$، دامنه‌ی تابع کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) $D_f = \mathbb{R}^{+۲}$

۲) $D_f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x + y \neq e\}$

۳) $D_f = \{(x, y) | y + x > ۰, x + y \neq e\}$

۴) $D_f = \mathbb{R}^۲ - \{۰, ۰\}$

۴۰. اگر داشته باشیم $Z = U^۲ + V^۲ - ۲UV$ و $U = \frac{x}{y}$ و $V = y^۲ - x^۲$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ اگر $z = y = ۱$ باشد، کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۱. اگر $z = \frac{x + ۲y}{x - y + ۳}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه‌ی بحرانی کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۲. اگر f تابعی حقیقی به معادله‌ی $z = \frac{x^۲ + y^۲}{x^۲ + y^۲ + ۱}$ باشد، دامنه‌ی (Domain) این تابع برابر است با: ۱۳۸۰

۱) $\mathbb{R}^۲$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}^۲ - \{(۰, ۰)\}$ ۴) $\mathbb{R} - \{۰\}$

۴۳. در تابع f به معادله‌ی $x^۲ + ye^{xy} - xy + z - xyz = ۰$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(۱, ۰, -۱)$ برابر است با: ۱۳۸۰

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) صفر

۴۴. اگر f تابعی حقیقی به معادله‌ی $z = x^۲ + xy + ۴y^۲$ فرض شود، مقدار dz در نقطه‌ی $(۱, ۱)$ به‌ازای $dx = dy = ۰/۱$ برابر است با: ۱۳۸۰

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۹ ۳) ۱/۲ ۴) ۲/۲

۴۵. نقطه‌ی بحرانی تابع حقیقی f با ضابطه‌ی $z = xy - x^۲ - ۲y^۲ + ۷y$ کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) $(۱, ۲, ۷)$ ۲) $(۰, ۱, ۱)$ ۳) $(-۱, -۲, ۱)$ ۴) $(-۱, ۱, ۳)$

۴۶. در سؤال شماره‌ی ۴۵، نوع نقطه‌ی بحرانی کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) زینی ۲) مینیمم مطلق ۳) مینیمم نسبی ۴) ماکزیمم مطلق

۴۷. تابع f به معادله‌ی $Z = \sqrt{\frac{x - y}{x^۲ + y^۲}}$ مفروض است، دامنه (Range)[۱] این تابع کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) $\mathbb{R}^۲$ ۲) $\mathbb{R}^+$

۳) $\mathbb{R} - \{x | x < y\}$ ۴) $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x \geqslant y\}$

۴۸. در تابع دو متغیره $U = \ln(x^۲ + y^۲)$، حاصل $x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial U}{\partial y}$ کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) ۲ ۲) $x + y$ ۳) $\ln(x + y)$ ۴) $۲(x^۲ + y^۲)$

۴۹. در تابع دو متغیره $F(x, y) = x^{xy}$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}$ به ازای $x = y = ۱$ کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) تعریف نشده

۵۰. در تابع $z = ax^۲ + bxy + ay + ۴y + ۵$: اگر $(۱, ۱)$ نقطه اکسترمم باشد، a و b کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) $a = ۱$, $b = ۲$ ۲) $a = ۰$, $b = ۴$

۳) $a = ۴$, $b = -۸$ ۴) $a = ۴$, $b = -۴$

۵۱. نقطه بحرانی تابع f به معادله $Z = x^۲ + xy + y^۲ - ۳x - ۶y$ به کدام صورت است؟ ۱۳۸۱

۱) $(۰, ۳)$، زینی ۲) $(۰, ۳)$، مینیمم

۳) $(۳, ۰)$، ماکزیمم نسبی ۴) $(۳, ۰)$، ماکزیمم مطلق

۵۲. اگر داشته باشیم $Z = x^۲ + ۲xy + ۴y + ۱۰$ و $x + y = ۳$ باشد، نقطه بحرانی این تابع کدام است؟ ۱۳۸۱

۱) $(۱, ۲)$ ۲) $(۲, ۱)$ ۳) $(-۱, ۴)$ ۴) $(۴, -۱)$

---

۱. Range: بُرد، مجموعه‌ی مقادیر ـ Domain: دامنه، حوزه، قلمرو

۵۳. در سؤال قبلی، نوع نقطه کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) زینی ۲) ماکزیمم ۳) مینیمم نسبی ۴) مینیمم مطلق

۵۴. مینیمم تابع $Z = ۴x^۲ + ۲y - ۴$ با توجه به شرط $۲x + \frac{۱}{۲}y = ۱۲$ کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۴۰

۵۵. اگر $w = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}$ باشد، آنگاه $\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial z^۲}$ برابر است با: [۱۳۸۲]

۱) ۰ ۲) $x + y + z$

۳) $(x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲$ ۴) $xyz(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۳}{۲}}$

۵۶. اگر تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ به معادله $z = \frac{e^x - e^y}{e^x + e^y}$ باشد، برد این تابع کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-۱, ۱)$ ۳) $[-۱, ۱]$ ۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$

۵۷. اگر داشته باشیم، $z = \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲}$، $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ در نقطه $(۱, ۲)$، کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $\frac{۱۶}{۱۲۵}$ ۲) $\frac{۲۴}{۱۲۵}$ ۳) $\frac{۳۲}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۴۸}{۱۲۵}$

۵۸. اگر تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$، به معادله $z = \sqrt{۱ - x^۲ - ۲y^۲}$ فرض شود دامنه این تابع کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}^۲$

۳) $-\infty < x, y < +\infty$ ۴) $x^۲ + ۲y^۲ \leqslant ۱$

۵۹. اگر داشته باشیم $\begin{cases} z = u^۲ + v^۲ \\ u = x^۲ - y^۲ \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ در این صورت $\frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $\frac{۴ux}{y}$ ۲) $۴ux + \frac{۲v}{y}$

۳) $۴ux - ۴vy$ ۴) $(۲u + ۲v)(۲x - \frac{۱}{y})$

۶۰. نقطه بحرانی تابع $z = x^۲ - ۶xy + ۶y^۲ + ۴x$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $x = ۴, y = ۲$ ۲) $x = ۱, y = ۲$

۳) $x = ۲, y = ۴$ ۴) $x = ۲, y = ۱$

۶۱. در تابع $z = x^۲ + ۴xy + ۲y^۲ - ۴x - ۶y$، وضعیت نقطه بحرانی چگونه است؟ [۱۳۸۳]

۱) ماکزیمم مطلق ۲) ماکزیمم نسبی ۳) مینیمم مطلق ۴) زینی

۶۲. در تابع $z = x^۲ - y^۲ - ۸xy$، حاصل $d^۲z$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $dx^۲ - ۱۶dxdy - ۲dy^۲$ ۲) $dx^۲ - ۸dxdy - dy^۲$

۳) $۲dx^۲ - ۱۶dxdy - ۲dy^۲$ ۴) $۲dx^۲ + ۸dx\,dy - ۲dy^۲$

۶۳. ماکسیمم مقدار تابع دو متغیری $Z = x^۲ + ۲xy$ با شرط $۲x + y = ۱۲$ کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۶۴. در تابع دو متغیری $Z = y \cdot f(x - ۲y)$ حاصل $۲\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) ۰ ۲) y ۳) Z ۴) $\frac{Z}{y}$

۶۵. کمترین مقدار تابع $Z = x^۲ - xy$ با شرط $۲x + y = ۶$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) -۵ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۶۶. دیفرانسیل کامل تابع $Z = \ln \frac{x+y}{x-y}$ در نقطه $x = ۲$ و $y = ۱$ به‌ازای $\Delta x = ۰/۰۱$ و $\Delta y = ۰/۰۲$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) ۰ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۰۳

۶۷. اگر $Z = x^۲ + y^۲ + ۳xy - ۵y$ و $x = st$ و $y = ۲s - ۳t$ باشد، مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ به‌ازای $t = ۲$ و $s = ۳$ چقدر است؟ ۱۳۸۴

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۴.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{\lambda y} - \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda^۰ \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = \lambda^۰ z \Longrightarrow n = ۰$$
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz = (۰)(z) = ۰$$

۲. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z_x = ۲x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \\ z_y = ۲y - ۴ = ۰ \Longrightarrow y = ۲ \end{cases} \Longrightarrow z = ۱ - ۲ + ۴ - ۸ + ۱۰ = ۵ \Longrightarrow (۱, ۲, ۵)$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + y \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = xye^{xy} + e^{xy} + ۱ \Longrightarrow \left.\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}\right|_{(۰,۰)} = ۲$$

۴. گزینه‌ی ۲.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (۲x + ۲y)dx + (۲y + ۲x)dy \Longrightarrow dz\Big|_{(۱,۱)} = ۴dx + ۴dy$$

۵. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} z_x = ۲x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \\ z_y = ۲y - ۲ = ۰ \Longrightarrow y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow z = ۱۰ \Longrightarrow (۱, ۱, ۱۰) \text{نقطه بحرانی}$$

$$z_{xx} = ۲, z_{yy} = ۲, z_{xy} = z_{yx} = ۰$$

$$|H_۱| = ۲ > ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ > ۰ \Longrightarrow (۱, ۱, ۱۰) \text{نقطه مینیمم است}$$

۶. گزینه‌ی ۱.

$$x+y=۲ \Longrightarrow y=۲-x \Longrightarrow z=x^۲+۴-۴x+x^۲=۲x^۲-۴x+۴$$
$$z_x=۴x-۴=۰ \Longrightarrow x=۱, ۱+y=۲ \Longrightarrow y=۱ \Longrightarrow (۱,۱,۲)$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
z_x		$-$	۰	$+$	

min

راه‌حل دوم: اگر مجموع دو متغیر مقداری ثابت باشد مجموع مربعات آن‌ها، مجموع عکس آن‌ها و مجموع مکعبات آن‌ها وقتی min است که متغیرها با هم برابر باشند. پس:

$$x=y=۱ \Longrightarrow z=۲$$

۷. گزینه‌ی ۱.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{۱}{\lambda x}+\frac{۱}{\lambda y}=\frac{۱}{\lambda}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\right)=\lambda^{-۱}z \Longrightarrow n=-۱$$
$$x.\frac{\partial z}{\partial x}+y.\frac{\partial z}{\partial y}=nz=-z$$

۸. گزینه‌ی ۳. اگر $F(x,y,z)=-۳xyz+x^۲+y^۲+z^۲=۰$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{۳yz-۲x}{-۳xy+۲z} \xrightarrow{x=y=z=۱} \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۳-۲}{-۳+۲}=-۱$$

۹. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۱}{y}+\frac{y}{x^۲} \Longrightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^۲}-\frac{۱}{x} \Longrightarrow y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\end{cases} \Longrightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=۰$$

۱۰. گزینه‌ی ۳.

$$۲x+y=۸ \Longrightarrow y=۸-۲x \Longrightarrow z=x(۸-۲x)=۸x-۲x^۲$$
$$z_x=۸-۴x=۰ \Longrightarrow x=۲, ۲(۲)+y=۸ \Longrightarrow y=۴ \Longrightarrow z=۲\times ۴=۸$$

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
z_x		$+$	۰	$-$	

min

۱۱. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases}z_x=-۲x+۲=۰ \Longrightarrow x=۱\\ z_y=-۴y+۴=۰ \Longrightarrow y=۱\end{cases} \Longrightarrow z=۸-۱+۲-۲+۴=۱۱$$

$$z_{xx}=-۲, z_{yy}=-۴, z_{xy}=z_{yx}=۰$$

$$|H_۱|=-۲<۰, |H_۲|=\begin{vmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & -۴\end{vmatrix}=۸>۰ \Longrightarrow \max(۱,۱,۱۱)$$

۱۲. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{۲x/۲\sqrt{x^۲+y^۲}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=\frac{x}{x^۲+y^۲}\Longrightarrow\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}=\frac{(x^۲+y^۲)-۲x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}=\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}\Longrightarrow\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}\Big|_{(۱,۲)}=\frac{۴-۱}{(۱+۴)^۲}=\frac{۳}{۲۵}$$

۱۳. گزینه‌ی ۳. اگر $F(x,y,z)=e^{۲x+y+۳z}-xyz-۱$ داریم:

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{-\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{yz-۲e^{۲x+y+z}}{۳e^{۲x+y+z}-xy}\xrightarrow{x=y=z=۰}z_x=\frac{۰-۲e^{۰}}{۳e^{۰}}=-\frac{۲}{۳}$$

۱۴. گزینه‌ی ۲.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(۲x-y)dx+(۲y-x)dy$$

$$x=y=۱,dx=dy=۰/۱\Longrightarrow dz=(۲-۱)(۰/۱)+(۲-۱)(۰/۱)=۰/۲$$

۱۵. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases}z_x=-۴x=۰\Longrightarrow x=۰\\ z_y=-۶y=۰\Longrightarrow y=۰\end{cases}\Longrightarrow z=۰-۰+۶=۶$$

۱۶. گزینه‌ی ۱.

$$z_x=۴x-۲y+۵\Longrightarrow z_{xx}=۴,z_y=-۲x+۲y-۳\Longrightarrow z_{yy}=۲,z_{xy}=z_{yx}=-۲$$

$$|H_۱|=z_{xx}=۴>۰,|H_۲|=\begin{vmatrix}۴ & -۲\\ -۲ & ۲\end{vmatrix}=۸-۴=۴>۰\Longrightarrow\min$$

۱۷. گزینه‌ی ۳.

$$۴-۲x^۲-y^۲\geqslant۰\Longrightarrow۲x^۲+y^۲\leqslant۴$$

می‌دانیم حداقل $۲x^۲+y^۲$ برابر صفر است، بنابراین $۴\leqslant۲x^۲+y^۲\leqslant۰$ یا $-۴\leqslant-۲x^۲-y^۲\leqslant۰$ یا $۴\leqslant۴-۲x^۲-y^۲\leqslant۰$ لذا $\sqrt{۴}\leqslant\sqrt{۴-۲x^۲-y^۲}\leqslant۰$ یا $۲\leqslant z\leqslant۰$.

۱۸. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{۲(x-a)/۲\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲}}{\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲}}=\frac{x-a}{(x-a)^۲+(y-b)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}=\frac{(x-a)^۲+(y-b)^۲-۲(x-a)^۲}{[(x-a)^۲+(y-b)^۲]^۲}=\frac{(y-b)^۲-(x-a)^۲}{[(x-a)^۲+(y-b)^۲]^۲}$$

به‌طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^۲u}{\partial y^۲}=\frac{(x-a)^۲-(y-b)^۲}{[(x-a)^۲+(y-b)^۲]^۲}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲u}{\partial y^۲}=۰$$

۱۹. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} z_x = -۲x = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \\ z_y = -۲y = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow z = ۴ - ۰ - ۰ \Longrightarrow z = ۴ \Longrightarrow (۰, ۰, ۴)$$

$$z_{xx} = -۲, z_{yy} = -۲, z_{xy} = z_{yx} = ۰$$

$$|H_۱| = -۲ < ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{vmatrix} = ۴ > ۰ \Longrightarrow \max(۰, ۰, ۴)$$

۲۰. گزینه‌ی ۱.

$$x - y = ۰ \Longrightarrow y = x, z = -x^۲ - x^۲ + ۱ \Longrightarrow z = -۲x^۲ + ۱$$

$$z_x = -۴x = ۰ \Longrightarrow x = ۰, ۰ - y = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \Longrightarrow z = -۰ - ۰ + ۱ = ۱$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
z_x		$+$	۰	$-$	
			max		

۲۱. گزینه‌ی ۳.

$$x + y = ۲ \Longrightarrow y = ۲ - x, z = ۴ - x^۲ - (۲ - x)^۲ = -۲x^۲ + ۴x$$

$$z_x = -۴x + ۴ = ۰ \Longrightarrow x = ۱$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
z_x		$+$	۰	$-$	
			max		

۲۲. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^y + ye^x \Longrightarrow \dfrac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = ye^x \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xe^y + e^x \Longrightarrow \dfrac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = xe^y \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲} = ye^x + xe^y = z$$

۲۳. گزینه‌ی ۳.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy \Longrightarrow dz\Big|_{(۱,۱)} = dx + dy$$

۲۴. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} z_x = -۲x + ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \\ z_y = -۸y + ۸ = ۰ \Longrightarrow y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow z = ۲۰ - ۱ - ۴ + ۸ + ۲ = ۲۵$$

۲۵. گزینه‌ی ۳. اگر مجموع دو متغیر مقداری ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که متغیرها با هم برابر باشند.

$$x = y = ۸ \Longrightarrow z = ۸ \times ۸ = ۶۴$$

۲۶. گزینه‌ی ۳.

$$z=(r\cos\theta)^۲+(r\sin\theta)^۲-۲r^۲\sin\theta\cos\theta=r^۲(\cos^۲\theta+\sin\theta)-r^۲\sin ۲\theta$$
$$z=r^۲-r^۲\sin ۲\theta,\frac{\partial z}{\partial\theta}=-۲r^۲\cos ۲\theta$$

۲۷. گزینه‌ی ۲.

$$f(\lambda x,\lambda y)\frac{\lambda^۲x^۲}{۲\lambda^۲y^۲}+\frac{\lambda^۲y^۲}{۲\lambda^۲x^۲}=\lambda^{\circ}\left(\frac{x^۲}{۲y^۲}+\frac{y^۲}{۲x^۲}\right)=\lambda^{\circ}z\Longrightarrow n=۰$$
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz=(۰)(z)=۰$$

۲۸. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{۲x+yz-y}{xy}\Longrightarrow\Big|_{(۱,۱,۱)}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{۲+۱-۱}{۱}=-۲$$

۲۹. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases}z_x=۲x+۲=۰\Longrightarrow x=-۱\\ z_y=۴y-۴=۰\Longrightarrow y=۱\end{cases}\Longrightarrow z=-۳\Longrightarrow(-۱,۱,۳)$$

۳۰. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x}{y^۲}-\frac{y}{x^۲}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-۲yx^۲}{y^۴}+\frac{۱}{x}=\frac{-۲x^۲}{y^۳}+\frac{۱}{x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(۱,۲)}=(\frac{۲}{۴}-\frac{۲}{۱})+(\frac{-۲}{۸}+۱)=-\frac{۳}{۴}$$

۳۱. گزینه‌ی ۴.

$$x^۲+y^۲=۰\Longrightarrow x=۰\ ,\ y=۰\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}^۲-\{(۰,۰)\}$$

۳۲. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases}z_x=۴x-۲y-۲=۰\\ z_y=۲y-۲x=۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}۴x-۲y=-۲\\ -۲x+۲y=۰\end{cases}\Longrightarrow ۲x=-۲\Longrightarrow x=-۱,y=-۱$$
$$z=۲+۱-۲-۲=-۱\Longrightarrow x+z=-۱+(-۱)=-۲$$

۳۳. گزینه‌ی ۲.

$$z_{xx}=۴\ ,\ z_{xy}=-۲\ ,\ z_{yy}=۲$$
$$|H_۱|=۴>۰\ ,\ |H_۲|=\begin{vmatrix}۴&-۲\\ -۲&۲\end{vmatrix}=۸-۴=۴>۰\Longrightarrow\min$$

۳۴. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{۲u}{u^۲+v^۲}\cdot y+\frac{۲v}{u^۲+v^۲}\cdot\frac{۱}{y}$$
$$(x=۱\ ,\ y=۱)\Longrightarrow u=۱\ ,\ v=۱$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(۱,۱)}=\frac{۲}{۱+۱}\times۱+\frac{۲}{۱+۱}\times۱=۱+۱=۲$$

۳۵. گزینه‌ی ۱.

$$z = x^۲ - y^۲ = (t\cos t)^۲ - (t\sin t)^۲ = t^۲\cos^۲ - t^۲\sin^۲ t = t^۲(\cos^۲ t - \sin^۲ t) \Longrightarrow z = t^۲\cos ۲t$$

$$\frac{dz}{dt} = (۲t)(\cos ۲t) + (-۲\sin ۲t)(t^۲)\frac{dz}{dt}\Big|_{t=\frac{\pi}{۴}} = ۰ - ۲ \times \frac{\pi^۲}{۱۶} = \frac{-\pi^۲}{۸}$$

از فرمول $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$ هم قابل حل است.

۳۶. گزینه‌ی ۴.

$$z_x = ۲x + ۴y \Longrightarrow z_{xx} = ۲, z_{xy} = ۴$$
$$z_y = ۴x + ۴y \Longrightarrow z_{yy} = ۴$$
$$d^۲z = z_{xx}dx^۲ + ۲z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^۲$$
$$d^۲z = ۲dx^۲ + ۸dxdy + ۴dy^۲$$

۳۷. گزینه‌ی ۳.

$$x^۲ + y^۲ \geqslant x^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow \frac{x^۲ + y^۲}{x^۲ + y^۲} \geqslant \frac{x^۲}{x^۲ + y^۲} \geqslant \frac{۰}{x^۲ + y^۲} \Longrightarrow$$
$$۱ \geqslant \frac{x^۲}{x^۲ + y^۲} \geqslant ۰ \Longrightarrow ۰ \leqslant z \leqslant ۱$$

۳۸. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = ۰ \\ \frac{\partial z}{\partial y} = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۴x - y = ۰ \\ -x + ۲y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۴x - y = ۰ \\ -۴x + xy = ۰ \end{cases}$$
$$y = ۰, x = ۰ \Longrightarrow z = ۱۰$$

۳۹. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases} x + y > ۰ \\ \ln(x + y) - ۱ \neq ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y > ۰ \\ \ln(x + y) \neq ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y > ۰ \\ x + y \neq e \end{cases}$$

۴۰. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = (۲U - ۲U)\left(\frac{۱}{y}\right) + (۲V - ۲U)(-۲x)$$
$$x = y = ۱ \Longrightarrow U = ۱\ ,\ V = ۰$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = (۲ - ۰)(۱) + (-۲)(-۲) = ۲ + ۴ = ۶$$

۴۱. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z_x = ۰ \\ z_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x - y + ۳ - x - ۲y}{(x - y + ۳)^۲} = ۰ \\ \frac{۲x - ۲y + ۶ + x + ۲y}{(x - y + ۳)^۲} = ۰ \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} ۳ - ۳y = ۰ \\ ۳x + ۶ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = ۱ \\ x = -۲ \end{cases} \Longrightarrow x + y = -۱$$

۴۲. گزینه‌ی ۱.

$$x^۲ + y^۲ + ۱ \neq ۰ \Longrightarrow D_f = \mathbb{R}^۲$$

۴۳. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{۲x + y^۲e^{xy} - y - yz}{۱ - xy} \xrightarrow{(۱,۰,-۱)} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{۲}{۱} = -۲$$

۴۴. گزینه‌ی ۳.

$$dz = (۲x + y)dx + (x + ۸y)dy \xrightarrow[dx=dy=۰/۱]{(۱,۱)} dz = ۰/۳ + ۰/۹ = ۱/۲$$

۴۵. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} z_x = ۰ \\ z_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y - ۲x = ۰ \\ x - ۴y + ۷ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y - ۲x = ۰ \\ -۴y + x = -۷ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۴y - ۸x = ۰ \\ -۴y + x = -۷ \end{cases} \Longrightarrow x = ۱ \ , \ y = ۲$$

$$z = ۲ - ۱ - ۸ + ۱۴ \Longrightarrow z = ۷ \Longrightarrow (۱, ۲, ۷)$$

نیازی به یافتن مقادیر y و z نبود زیرا درگزینه‌ی (۱) مقدار x برابر ۱ است.

۴۶. گزینه‌ی ۴.

$$z_{xx} = -۲ \ , \ z_{xy} = z_{yx} = ۱ \ , \ z_{yy} = -۴$$

$$|H_۱| = z_{xx} = -۲ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & -۴ \end{vmatrix} = ۸ - ۱ = ۷$$

چون $|H_۱| < ۰$ و $|H_۲| > ۰$ پس نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ی ماکزیمم مطلق است.

۴۷. گزینه‌ی ؟.

۴۸. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{۲x}{x^۲ + y^۲} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{۲y}{x^۲ + y^۲}$$

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{۲x^۲}{x^۲ + y^۲} + \frac{۲y^۲}{x^۲ + y^۲} = ۲$$

۴۹. گزینه‌ی ۲.

$$z = x^{xy} \Longrightarrow \ln z = \ln x^{xy} \Longrightarrow \ln z = xy \cdot \ln x$$

$$\frac{z'}{z} = y \ln x + y \Longrightarrow z' = z(y \ln x + y)$$

به ازای $x = y = ۱$ داریم:

$$z' = ۱(\ln ۱ + ۱) = ۰ + ۱ = ۱$$

۵۰. گزینه‌ی ۳.

$$\begin{cases} z_x = ۲ax + by = ۰ \\ z_y = bx + a + ۴ = ۰ \end{cases} \xrightarrow{(۱,۱)} \begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ b + a = -۴ \end{cases} \Longrightarrow a = ۴\ ,\ b = -۸$$

۵۱. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z_x = ۲x + y - ۳ = ۰ \\ z_y = x + ۲y - ۶ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x + y = ۳ \\ x + ۲y = ۶ \end{cases} \Longrightarrow y = ۳\ ,\ x = ۰$$

$$z_{xx} = ۲\ ,\ z_{xy} = z_{yx} = ۱\ ,\ z_{yy} = ۲$$

$$|H_۱| = ۲ > ۰\ ,\ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ - ۱ = ۳ > ۰ \Longrightarrow \min(۰, ۳)$$

۵۲. گزینه‌ی ۱.

$$x + y = ۳ \Longrightarrow y = ۳ - x$$
$$z = x^۲ + ۲x(۳ - x) + ۴(۳ - x) + ۱۰$$
$$z = x^۲ + ۶x - ۲x^۲ + ۱۲ - ۴x + ۱۰ = -x^۲ + ۲x + ۲۲$$
$$z = ۰ \Longrightarrow -۲x + ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۱\ ,\ y = ۲ \rightarrow (۱, ۲)$$

۵۳. گزینه‌ی ۲.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
z'_x		$+$	۰	$-$	
			max		

۵۴. گزینه‌ی ۴.

$$۲x + \frac{۱}{۲}y = ۱۲ \Longrightarrow y = -۴x + ۲۴$$
$$z = ۴x^۲ + ۲(-۴x + ۲۴) - ۴ = ۴x^۲ - ۸x + ۴۴$$
$$z'_x = ۰ \Longrightarrow ۸x - ۸ = ۰ \Longrightarrow x = ۱\ ,\ y = ۲۰$$
$$z = ۴ + ۴۰ - ۴ = ۴۰$$

۵۵. گزینه‌ی ۱.

$$w = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} = (\frac{۱}{x^۲ + y^۲ + z^۲})^{\frac{۱}{۲}} = (x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{۱}{۲}(۲x)(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۳}{۲}} = -x(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۳}{۲}}$$
$$\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲} = -(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۳}{۲}} + \frac{۳}{۲}(۲x)(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۵}{۲}}x$$
$$= -(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۳}{۲}} + ۳x^۲(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۵}{۲}}$$

به‌طور مشابه:

$$\frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲} = -(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۳}{۲}} + ۳y^۲(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{-\frac{۵}{۲}}$$

$$\frac{\partial^۲ w}{\partial z^۲} = -(x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۳}{۲}} + ۳z^۲(x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۵}{۲}}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial z^۲} = -۳(x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۳}{۲}} + ۳(x^۲+y^۲+z^۲)(x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۵}{۲}}$$
$$= -۳(x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۳}{۲}} + ۳(x^۲+y^۲+z)^{-\frac{۳}{۲}} = ۰$$

۵۶. گزینه‌ی ۲. $۲x^۲+y^۲>۰$، به ازای $x=۰$ کمترین مقدار z، به ازای $y=۰$ بیشترین مقدار z به دست می‌آید

$$x=۰ \Longrightarrow z=\frac{-y^۲}{y^۲}=-۱ \quad ; \quad y=۰ \Longrightarrow z=\frac{۲x^۲}{۲x^۲}=۱$$

$$R_z=[-۱,۱]$$

۵۷. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x(x^۲+y^۲)-۲x(x^۲-y^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{۴xy^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}=\frac{۸xy(x^۲+y^۲)^۲-۴y(x^۲+y^۲)(۴xy)}{(x^۲+y^۲)^۴}$$

در نقطه $(۲,۱)$:

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}=\frac{۱۶(۵)^۲-۴(۵)(۸)}{(۵)^۴}=\frac{۵(۸۰-۳۲)}{۵^۴}=\frac{۴۸}{۱۲۵}$$

۵۸. گزینه‌ی ۴.

$$۱-x^۲-۲y^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow x^۲+۲y^۲ \leqslant ۱$$

۵۹. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=۲u\cdot ۲x+۲v.\frac{۱}{y}=۴ux+\frac{۲v}{y}$$

۶۰. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} Z_x=۰ \\ Z_y=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x-۶y+۴=۰ \\ -۶x+۱۲y=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۶x-۱۸y=-۱۲ \\ -۶x+۱۲y=۰ \end{cases}$$
$$\Longrightarrow y=۲, x=۴$$

۶۱. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} Z_x=۰ \\ Z_y=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x+۴y-۴=۰ \\ ۴x+۴y-۶=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۴x-۸y=-۸ \\ ۴x+۴y=۶ \end{cases} \Longrightarrow x=\frac{۵}{۴}$$

$$|H_۱|=Z_{xx}=۲>۰ \quad ; \quad |H_۲|=\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & ۴ \end{vmatrix}=-۸<۰ \Longrightarrow \text{نقطه زینی است}$$

۱۲. اگر $z = x^۲ + y^۲$، $dx = dy = ۰/۱$ و $x = y = ۲$ مقدار dz کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۸ ۴) ۱

۱۳. مقدار ماکزیمم تابع $z = -x^۲ + ۲x - y^۲ + ۴y + ۲۰$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۴. نقطه بحرانی تابع $z = x^۲ + y^۲$ با شرط $x + y = ۴$ کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) $(۲, ۱, ۱۰)$ ۲) $(۰, ۴, ۱۶)$ ۳) $(۲, ۲, ۸)$ ۴) $(۱, ۳, ۱۰)$

۱۵. از رابطه $۳x^۲ + ۲y^۲ - ۵z^۲ + xyz = c$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ به‌ازای $x = y = z = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $-\frac{۷}{۴}$ ۲) $-\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۶. اگر $z = x^۲ + y^۲$ باشد، $xz'_x + yz'_y$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) z ۲) $۲z$ ۳) $۳z$ ۴) $۴z$

۱۷. در تابع $z = \frac{x+y}{x-y}$ مقدار z'_x در نقطه نظیر $x = ۲$ و $y = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۱۸. نقطه بحرانی تابع $z = xy - x - y$ با کدام مختصات است؟ [۱۳۷۳]

۱) $(۱, -۱, -۱)$ ۲) $(-۱, ۱, -۱)$ ۳) $(۱, ۰, -۱)$ ۴) $(۱, ۱, -۱)$

۱۹. نقطه بحرانی تابع $z = xy - x - y$ چگونه است؟ [۱۳۷۳]

۱) ماکزیمم مطلق ۲) ماکزیمم نسبی ۳) مینیمم نسبی ۴) زینی

۲۰. دیفرانسیل مرتبه اول تابع $z = x^۲ + y^۲$ در ازای $x = y = ۱$ و $dx = dy = ۰/۱$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۶

۲۱. مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع $z = xy$ با شرط $x + y = ۲$ کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $z = ۱$ ۲) $z = ۲$ ۳) $z = ۳$ ۴) $z = ۴$

۲۲. در سؤال قبل، نقطه بحرانی چگونه است؟ [۱۳۷۳]

۱) زینی ۲) عطف ۳) مینیمم ۴) ماکزیمم

۲۳. دامنه تابع $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $x^۲ + y^۲ \geqslant ۴$ ۲) $x^۲ + y^۲ < ۴$ ۳) $x^۲ + y^۲ > ۴$ ۴) $x^۲ + y^۲ \leqslant ۴$

۲۴. برد تابع $z = \sqrt{۹ - x^۲ - ۲y^۲}$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $[۰, ۳]$ ۲) $[۰, ۹]$ ۳) $(۰, ۴]$ ۴) $\mathbb{R}^+$

۲۵. اگر $z = x^۲ + y^۲$ باشد، $d^۲z$ کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $dx^۲ + dy^۲$ ۲) $۲dx^۲ + ۲dy^۲$

۳) $۲dx^۲ + ۴dxdy + ۲dy^۲$ ۴) $۲dx^۲ - ۴dxdy + dy^۲$

۲۶. اگر $z = x^۲ + y^۲ - ۲x$ باشد، نقطه بحرانی این تابع کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) $(-۱, ۰, ۳)$ ۲) $(۱, ۰, -۱)$ ۳) $(۰, ۱, ۱)$ ۴) $(۰, ۰, ۰)$

۲۷. اگر $z = \frac{x^۲ + y^۲}{۲xy}$ باشد، مقدار تابع $\frac{\partial z}{\partial x}$ در $x = ۲$ و $y = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۸. اگر $z = \frac{۲y}{x} + \frac{x}{۲}y$ باشد، مقدار $x.z'_x + y.z'_y$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) صفر ۲) z ۳) ۱ ۴) $۲z$

۲۹. اگر $z = x^۲ + y^۲ + xy$ باشد، مقدار dz در نقطه $x = ۱$ و $y = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) $۲dz + ۲dy + dxdy$ ۲) $۳dx + ۳dy$

۳) $dx + dy + ۲dxdy$ ۴) صفر

۳۰. اگر تابع هدف $z = x^۲ + y^۲$ و قید $x + y = ۴$ باشد، در نقطه بحرانی مقدار z کدام است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

۳۱. اگر $Z = U^۲ + V^۲ - ۲UV$ و $U = r\cos\theta$ و $V = r\sin\theta$ باشد، مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) صفر ۲) $(۲V - ۲U)\cos\theta$

۳) $۲r - ۴r\sin\theta\cos\theta$ ۴) $(۲U - ۲UV)\sin\theta$

۳۲. اگر داشته باشیم $z = \frac{x^۲}{۲y^۲} + \frac{۲y^۲}{x^۲}$، مقدار $x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) ۰ ۲) z ۳) $۲z$ ۴) $۳z$

۳۳. در معادله ضمنی $z^۲ + x^۲ + y^۲ - ۵xy + ۳x - ۲zy = ۰$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(۲, ۱, ۱)$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۰ ۴) ۱

۳۴. برد تابع Z به معادله $Z = \sqrt{۹ - x^۲ - y^۲}$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $\mathbb{R} \cup \{۰\}$ ۴) $[۰, ۳]$

۳۵. نقطه بحرانی تابع $z = x^۲ + y^۲$ نسبت به قید $x + ۲y = ۵$ کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $(۱, ۲, ۵)$ ۲) $(۳, ۱, ۱۰)$ ۳) $\left(۰, \frac{۵}{۲}, \frac{۲۵}{۴}\right)$ ۴) $(۵, ۰, ۲۵)$

۳۶. در مسأله قبل نوع نقطه بحرانی کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) مینیمم ۲) زینی ۳) عطف ۴) ماکزیمم

۳۷. برد (Range) تابع حقیقی دومتغیری به معادله $z = \sqrt{xy + ۵}$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $\mathbb{R}^۲$ ۲) $\mathbb{R} - \{۵\}$ ۳) $\mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ ۴) $\mathbb{R} - \{۰\}$

۳۸. در تابع دومتغیری به معادله $z = x\ln(x^۲ + y^۲)$ مقدار $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ در $y = ۱$ و $x = ۱$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۳۹. نقطه بحرانی تابعی به معادله $z = x^۲ - ۲x + y^۲ - ۲y + ۱۰$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $(۲, ۰)$ ۲) $(۱, ۱)$ ۳) $(۰, ۲)$ ۴) $(۲, ۲)$

۴۰. در سؤال قبل، نوع نقطه بحرانی کدام است؟ ۱۳۷۷

۱) زینی ۲) عطف ۳) ماکزیمم ۴) مینیمم

۴۱. اگر داشته باشیم $z = f(x^۲ + ۲y^۲, ۴x^۲y)$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ به‌ازای $x = ۲$ و $y = \frac{۱}{۲}$ کدام است؟ ۱۳۷۸

۱) $۸f'_۱ + ۲f'_۲$ ۲) $۴f'_۱ + ۸f'_۲$ ۳) $۶f'_۱ + ۴f'_۲$ ۴) $۴f'_۱ + ۴f'_۲$

۴۲. اگر f تابعی حقیقی به معادله $۲x^۲ + y^۲ - z^۲ - ۲xyz = ۰$ باشد، در نقطه $x = y = z = ۱$، مقدار z'_x کدام است؟ ۱۳۷۸

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۴۳. اگر $U = q_۱q_۲$ و $۴q_۱ + ۸q_۲ = ۱۶۰$ باشد، مقدار ماکزیمم تابع مقید U چقدر است؟ ۱۳۷۸

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۰۰

۴۴. بُرد تابع دومتغیری $z = \sqrt{۹ - ۲x^۲ - y}$ کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) $[-۳, ۳]$ ۲) $\mathbb{R}^+ U \{۰\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $[۰, ۳]$

۴۵. اگر داشته باشیم $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \ln\frac{x}{y}$، مقدار $xz'_x + yz'_y$ کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) صفر ۲) z ۳) $\frac{۱}{z}$ ۴) $z - ۱$

۴۶. در تابع دو متغیری $z = \frac{۲x + y - ۱}{x + ۲y}$، مجموع طول و عرض نقطه اکسترمم آن کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) ۲ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۷. اگر داشته باشیم $z = ۱۰ - x^۲ + ۲x - ۲y^۲ + ۸y$، مقدار z در نقطه اکسترمم این تابع کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) ۱۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۷ ۴) ۲۱

۴۸. در مسأله‌ی شماره‌ی ۴۷ نوع نقطه اکسترمم چیست؟ ۱۳۷۹

۱) مکرر ۲) زینی ۳) ماکزیمم ۴) مینیمم

۴۹. اگر مینیمم تابع $z = x^۲ + y^۲$ با توجه به متغیر $x + ۲y = ۵$ را با استفاده از روش لاگرانژ تعیین کنیم، مقدار λ کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰. بُرد تابع دومتغیره $z = \sqrt{۱۰۰ - ۲x^۲ - y^۲}$، کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $[۰, ۱۰]$ ۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$

۵۱. اگر $Z = U^۲ + ۲UV$ و $U = \frac{x}{y}$ و $V = x^۲ - y^۲$ باشد، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه‌ی $x = y = ۱$ کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۵۲. مختصات نقطه‌ی بحرانی تابع $z = x^۲ + ۲xy - y^۲ - ۱۲x$ کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) $(-۱, -۱, ۱۴)$ ۲) $(۳, ۳, -۱۸)$ ۳) $(۰, ۰, ۰)$ ۴) $(۱, ۱, -۱۰)$

۵۳. نوع نقطه‌ی بحرانی در سؤال قبل، کدام است؟ ۱۳۸۰

۱) ماکزیمم نسبی ۲) زینی ۳) ماکزیمم مطلق ۴) مینیمم مطلق

۵۴. در تابع مقید $\max Z = xy$ نسبت به $x + ۲y = ۱۰۰$ با استفاده از روش لاگرانژ، مقدار λ ضریب لاگرانژ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۵۵. در سؤال قبل، مقدار ماکزیمم z کدام است؟ [۱۳۸۰]

۱) ۱۳۵۰ ۲) ۱۳۰۰ ۳) ۱۲۵۰ ۴) ۱۰۰۰

۵۶. تابع حقیقی f به معادله $z = \sqrt{۲۵ - x^۲ - y}$ مفروض است. برد این تابع کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^۲$ ۳) $[۰, \infty)$ ۴) $[۰, ۵]$

۵۷. برای تابع $z = x \cdot \ln y + y \cdot \ln x$، مقدار $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ برابر است با: [۱۳۸۱]

۱) $\frac{x}{x+y}$ ۲) $\frac{y}{x+y}$ ۳) $\frac{xy}{x+y}$ ۴) $\frac{x+y}{xy}$

۵۸. نقطه بحرانی تابع دو متغیره $Z = ۳x^۲ + ۲y^۲ - xy - ۴x - ۷y + ۱۲$ کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) $(۱, ۲, ۳)$ ۲) $(۱, ۳, ۵)$ ۳) $(۱, ۱, ۵)$ ۴) $(۲, ۲, ۶)$

۵۹. در سؤال قبل، نوع نقطه بحرانی کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) زینی ۲) مینیمم نسبی ۳) ماکزیمم نسبی ۴) ماکزیمم مطلق

۶۰. اکسترمم تابع $Z = xy$ تحت شرط $۲x + ۳y - ۵ = ۰$، کدام است؟ [۱۳۸۱]

۱) $(\frac{۵}{۴}, \frac{۵}{۶})$ ۲) $(\frac{۵}{۶}, \frac{۵}{۶})$ ۳) $(\frac{۵}{۱۲}, \frac{۵}{۴})$ ۴) $(-\frac{۵}{۱۲}, \frac{۵}{۶})$

۶۱. برد تابع $Z = \sqrt{\frac{x^۲ + y^۲}{x^۲ - y^۲}}$ برابر است با: [۱۳۸۲]

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $[۱, +\infty)$ ۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$

۶۲. اگر $z = x^۲ + y^۲ + ۵xy$ باشد، مقدار $d^۲z$ به‌ازای $dx = dy = ۰/۱$ برابر کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۱۰ ۳) ۰/۱۲ ۴) ۰/۱۴

۶۳. اگر $z = x^۲ + xy + y^۲$ و $x = ۲r + s$ و $y = r - ۲s$ آنگاه در نقطه $(۱, ۲)$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r}$ کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) ۷ ۲) -۷ ۳) ۸ ۴) -۸

۶۴. به‌ازای چه مقداری از a نقطه بحرانی $z = x^۲ + ay^۲$ یک نقطه‌ی زینی است؟ [۱۳۸۲]

۱) $a > ۰$ ۲) $a < ۰$ ۳) $a < ۱$ ۴) $a > ۱$

۶۵. اگر داشته باشیم $x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۵xyz + ۲z = ۰$، در نقطه $(۱, ۱, ۱)$ مقدار $z'_x + z'_y$ برابر است با: [۱۳۸۲]

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) -۶

۶۶. اگر تابع $f : R^۲ \to R$ به معادله $Z = \frac{۲x^۲ - y^۲}{۲x^۲ + y^۲}$ باشد، برد تابع کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) R ۲) $[-۱, ۱]$ ۳) $(-۱, ۱)$ ۴) $R^+ \cup \{۰\}$

۶۷. در تابع دو متغیری $Z = \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲}$ مقدار $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$ در نقطه $(۱, ۱)$، کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۱

۶۸. اگر تابع $f : R^۲ \to R$ به معادله $Z = \sqrt{\frac{x}{y}}$ فرض شود دامنه این تابع کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $R^۲$
۲) $R^+ \cup \{۰\}$
۳) $\frac{x}{y} \geqslant ۰$
۴) $-\infty < x, y < +\infty$

۶۹. اگر داشته باشیم $\begin{cases} Z = U^۲ - V^۲ \\ U = x^۲ + y^۲ \\ V = \frac{x}{y} \end{cases}$ آنگاه، $\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $\frac{-۴Ux}{y^۲}$
۲) $۴Uy - \frac{۲Vx}{y^۲}$
۳) $۴Uy + \frac{۲Vx}{y^۲}$
۴) $(۲U - ۲V)(۲xy - \frac{x}{y^۲})$

۷۰. در تابع $Z = x^۲ + ۴xy + ۲y^۲ - ۴x - ۶y$، مختصات نقطه بحرانی کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $(۲, ۱)$
۲) $(۱, \frac{۱}{۲})$
۳) $(\frac{۱}{۲}, ۱)$
۴) $(۱, ۲)$

۷۱. در تابع $Z = x^۲ - y^۲ + ۶x + ۴y$، مقدار $d^۲Z$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $۴dxdy$
۲) $d^۲x - d^۲y$
۳) $۲dx^۲ - ۲dy^۲$
۴) $۲d^۲x - ۲d^۲y$

۷۲. در تابع $Z = x^۲ - ۶xy + ۶y^۲ + ۴x$، نقطه بحرانی کدام نوع است؟ ۱۳۸۳

۱) زینی
۲) ماکزیمم نسبی
۳) مینیمم نسبی
۴) مینیمم مطلق

۷۳. در تابع دومتغیری $z = x^۲e^{\frac{y}{x}}$، حاصل $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ در نقطه $(۲, ۱)$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $-e^۲$
۲) $-۲e^۲$
۳) $e^۲$
۴) $۲e^۲$

۷۴. نقطه بحرانی تابع $z = x^۲ + ۲y^۲ - ۳xy - x + ۲y$ چگونه است؟ ۱۳۸۴

۱) زینی
۲) ماکسیمم
۳) مینیمم
۴) عطف

۷۵. دیفرانسیل کامل تابع $z = x^۲ \tan y - x \cos ۲y$ در نقطه $(۲, \frac{\pi}{۴})$ به‌ازای $dx = ۰/۰۲$ و $dy = ۰/۰۱$ برابر کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $۰/۱۲$
۲) $۰/۱۵$
۳) $۰/۲۰$
۴) $۰/۲۴$

۷۶. اگر $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x-۲}$ و $x = ۲s - t$ و $y = t - s^۲$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}$ به‌ازای $t = ۲$ و $s = ۱$ کدام است؟ ۱۳۸۴

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۱}{y} + \frac{y}{x^۲}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{y^۲} - \frac{۱}{x}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x(\frac{۱}{y} + \frac{y}{x^۲}) + y(\frac{-x}{y^۲} - \frac{۱}{x}) \xrightarrow{(۱,۱)} = ۲ + (-۲) = ۰$$

۲. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z'_x = ۲x - ۲ = ۰ \\ z'_y = ۲y - ۴ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow x = ۱,\ y = ۲ \Longrightarrow z = ۵$$

۳. گزینه‌ی ۳.

$$x + ۲y = ۱۰ \Longrightarrow x = ۱۰ - ۲y, z = (۱۰ - ۲y)^۲ + y^۲$$

$$z_y = -۴(۱۰ - ۲y) + ۲y = ۰ \Longrightarrow ۱۰y = ۴۰ \Longrightarrow y = ۴, x = ۲$$

$$z = (۲)^۲ + (۴)^۲ = ۴ + ۱۶ = ۲۰$$

y	$-\infty$		۴		$+\infty$
z_y		$-$	۰	$+$	
			min		

۴. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x} + e^y \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = \frac{۱}{x} + e^y \Longrightarrow \left.\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}\right|_{(۱,۰)} = ۱ + e^۰ = ۲$$

۵. گزینه‌ی ۲.

$$f(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} = \lambda^۰ e^{\frac{y}{x}} \Longrightarrow n = ۰ \Longrightarrow x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = nz = ۰$$

۶. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} z_x = ۲x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \\ z_y = ۲y + ۴ = ۰ \Longrightarrow y = -۲ \end{cases} \Longrightarrow z = -۳ \Longrightarrow (۱, -۲, -۳)$$

$$z_{xx} = ۲, z_{yy} = ۲, z_{xy} = z_{yx} = ۰$$

$$|H_۱| = ۲ > ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ > ۰ \Longrightarrow \min(۱, -۲, -۳)$$

۷. گزینه‌ی ۲.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\ln y - \frac{۱}{x^۲}e^{۱/x}\right)dx + \left(\frac{x}{y}\right)dy \Longrightarrow dz\Big|_{(۱,۱)} = -e dx + dy = dy - e dx$$

۸. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{yz + ۲xy^۲z^۲}{xy + ۲x^۲y^۲z} \Longrightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(۱,۱,۱)} = -۱$$

۹. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{۲x/۲\sqrt{x^۲ + y^۲}}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} = \frac{x}{x^۲ + y^۲} \Longrightarrow \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} = \frac{-۲xy}{(x^۲ + y^۲)^۲} \Longrightarrow \left.\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y}\right|_{(۱,۱)} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۰. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۲x}{x^۲+y^۲} \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = \frac{۲(x^۲+y^۲)-۴x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{۲(y^۲-x^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{۲y}{x^۲+y^۲} \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = \frac{۲(x^۲+y^۲)-۴y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{۲(x^۲-y^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial^۲ y} = \frac{۲(y^۲-x^۲)+۲(x^۲-y^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲} = ۰$$

۱۱. گزینه‌ی ۴.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{\lambda y} - \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda^۰ \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = \lambda^۰ z \Longrightarrow n = ۰, x.z'_x + y \cdot z'_y = nz = ۰$$

۱۲. گزینه‌ی ۳.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ۲xdx + ۲ydy \xrightarrow[dx=dy=۰/۱]{x=y=۲} z = ۰/۴ + ۰/۴ = ۰/۸$$

۱۳. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} z_x = -۲x + ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \\ z_y = -۲y + ۴ = ۰ \Longrightarrow y = ۲ \end{cases} \Longrightarrow z = -(۱)^۲ + ۲(۱) - (۲)^۲ + ۴(۲) + ۲۰ = ۲۵$$

$$z_{xx} = -۲, z_{yy} = -۲, z_{xy} = z_{yx} = ۰$$

$$|H_۱| = -۲ < ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{vmatrix} = ۴ > ۰ \Longrightarrow \max(۱, ۲, ۲۵)$$

۱۴. گزینه‌ی ۳.

$$x + y = ۴ \Longrightarrow y = ۴ - x, z = x^۲ + (۱۶ - ۸x + x^۲) \Longrightarrow z_x = ۴x - ۸ = ۰$$

$$\Longrightarrow x = ۲, ۲ + y = ۴ \Longrightarrow y = ۲ \Longrightarrow z = ۴ + ۴ = ۸ \Longrightarrow (۲, ۲, ۸)$$

۱۵. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{partialF}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{۶x + yz}{-۱۰z + xy} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(۱,۱,۱)} = \frac{۷}{۹}$$

۱۶. گزینه‌ی ۲.

$$z \longrightarrow \lambda^۲x^۲ + \lambda^۲y^۲ = \lambda^۲(x^۲+y^۲) = \lambda^۲ z \Longrightarrow n = ۲,\ x.z'_x + y.z'_y = nz = ۲z$$

۱۷. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{x - y - (x+y)}{(x-y)^۲} = \frac{-۲y}{(x-y)^۲} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(۲,۱)} z'_x = -۲$$

۱۸. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} z_x = y - ۱ = ۰ \Longrightarrow y = ۱ \\ z_y = x - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \end{cases} \Longrightarrow z = ۱ - ۱ - ۱ = -۱ \Longrightarrow (۱, ۱, -۱)$$

۱۹. گزینه‌ی ۴.

$$z_x = y - ۱ \Longrightarrow z_{xx} = ۰, z_y = x - ۱ \Longrightarrow z_{yy} = ۰, z_{xy} = z_{yx} = ۱$$

$$|H_۱| = ۰, |H_۲| = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۱ < ۰ \Longrightarrow (۱, ۱, -۱) \text{زینی}$$

۲۰. گزینه‌ی ۳.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ۲xdx + ۲ydy \xrightarrow[dx=dy=۰/۱]{x=y=۱} dz = ۰/۲ + ۰/۲ = ۰/۴$$

۲۱. گزینه‌ی ۱.

$$x + y = ۲ \Longrightarrow y = ۲ - x \Longrightarrow z = ۲x - x^۲ \Longrightarrow z_x = ۲ - ۲x = ۰ \Longrightarrow$$
$$x = ۱ \Longrightarrow y = ۱ \Longrightarrow z = ۱ \times ۱ = ۱$$

۲۲. گزینه‌ی ۴.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
z_x		$+$	۰	$-$	

max

۲۳. گزینه‌ی ۴.

$$۴ - x^۲ - y^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow x^۲ + y^۲ \leqslant ۴$$

۲۴. گزینه‌ی ۱.

$$۹ - x^۲ - ۲y^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow x^۲ + ۲y^۲ \leqslant ۹$$

می‌دانیم $x^۲ + ۲y^۲ \geqslant ۰$ بنابراین $۰ \leqslant x^۲ + ۲y^۲ \leqslant ۹$ یا $۰ \leqslant -x^۲ - ۲y^۲ \leqslant -۹$ یا $۰ \leqslant ۹ - x^۲ - ۲y^۲ \leqslant ۹$
یا $۰ \leqslant \sqrt{۹ - x^۲ - ۲y^۲} \leqslant \sqrt{۹}$ و در نتیجه $۰ \leqslant z \leqslant ۳$.

۲۵. گزینه‌ی ۲.

$$d^۲z = z_{xx}dx^۲ + ۲z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^۲$$
$$z_x = ۲x \Longrightarrow z_{xx} = ۲, z_y = ۲y \Longrightarrow z_{yy} = ۲, z_{xy} = ۰$$
$$d^۲z = ۲dx^۲ + ۲dy^۲$$

۲۶. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z_x = ۲x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \\ z_y = ۲y = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow z = ۱ + ۰ - ۲ = -۱ \Longrightarrow (۱, ۰, -۱) \text{نقطه بحرانی}$$

۲۷. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x(۲xy)-۲y(x^۲+y^۲)}{۴x^۲y^۲}\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(۲,۱)}=\frac{۴(۴)-۲(۴+۱)}{۱۶}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

۲۸. گزینه‌ی ۱.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x}{۲\lambda y}+\frac{۲\lambda y}{\lambda x}=\lambda^{۰}\left(\frac{x}{۲y}+\frac{۲y}{x}\right)=\lambda^{۰}z\Longrightarrow n=۰, x.z'_x+y.z'_y=nz=۰$$

۲۹. گزینه‌ی ۲.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(۲x+y)dx+(۲y+x)dy\Longrightarrow dz\Big|_{(۱,۱)}=۳dx+۳dy$$

۳۰. گزینه‌ی ۲.

$$x+y=۴\Longrightarrow y=۴-x, z=x^۲+(۴-x)^۲\Longrightarrow z_x=۲x-۲(۴-x)=۰$$
$$\Longrightarrow x=۲, ۲+y=۴\Longrightarrow y=۲\Longrightarrow z=۲^۲+۲^۲=۸$$

۳۱. گزینه‌ی ۳.

$$z=(r\cos\theta)^۲+(r\sin\theta)^۲-۲(r\cos\theta)(r\sin\theta)=r^۲(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta)-۲r^۲\sin\theta\cos\theta$$
$$z=r^۲-r^۲\sin ۲\theta\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial r}=۲r-۲r\sin ۲\theta=۲r-۴r\sin\theta\cos\theta$$

۳۲. گزینه‌ی ۱.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^۲x^۲}{۲\lambda^۲y^۲}+\frac{۲\lambda^۲y^۲}{\lambda^۲x^۲}=\lambda^{۰}\left(\frac{x^۲}{۲y^۲}+\frac{۲y^۲}{x^۲}\right)=\lambda^{۰}z\Longrightarrow n=۰$$
$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=nz=۰$$

۳۳. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{۲x-۵y+۳}{۲z-۲y}\Longrightarrow\Big|_{(۱,۱,۲)}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۰}{۲}=۰$$

۳۴. گزینه‌ی ۴.

$$۹-x^۲-y^۲\geqslant ۰\Longrightarrow x^۲+y^۲\leqslant ۹$$

می‌دانیم $x^۲+y^۲\geqslant ۰$ بنابراین $۰\leqslant x^۲+y^۲\leqslant ۹$ یا $-۹\leqslant -x^۲-y^۲\leqslant ۰$ یا $۰\leqslant ۹-x^۲-y^۲\leqslant ۹$ و در نتیجه $۰\leqslant z\leqslant ۳$.

۳۵. گزینه‌ی ۱.

$$x+۲y=۵\Longrightarrow x=۵-۲y, z=(۵-۲y)^۲+y^۲$$
$$z_x=-۴(۵-۲y)+۲y=۰\Longrightarrow -۲۰+۸y+۲y=۰\Longrightarrow y=۲\Longrightarrow x=۱$$
$$\Longrightarrow z=۴+۱=۵\Longrightarrow (۱,۲,۵)\text{ نقطه بحرانی}$$

۳۶. گزینه‌ی ۱.

y	$-\infty$		۲		$+\infty$
z_y		$-$	۰	$+$	
			min		

۳۷. گزینه‌ی ۳. چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، پس مقدار زیررادیکال نمی‌تواند منفی باشد. از طرفی به‌ازای مثلاً $x = ۱$ و $y = -۵$ مقدار z برابر صفر است، پس برد تابع برابر با $\mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ است.

۳۸. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(x^۲ + y^۲) + \frac{۲x}{x^۲ + y^۲} \cdot x \ , \ \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = \frac{۲y}{x^۲ + y^۲} - \frac{۴x^۲ y}{(x^۲ + y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}\Big|_{(۱,۱)} = \frac{۲}{۱+۱} - \frac{۴}{(۱+۱)^۲} = ۰$$

۳۹. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z_x = ۲x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \\ z_y = ۲y - ۲ = ۰ \Longrightarrow y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow (۱, ۱)$$

۴۰. گزینه‌ی ۴.

$$z_{xx} = ۲ \ , \ z_{xy} = z_{yx} = ۰ \ , \ z_{yy} = ۲$$

$$|H_۱| = ۲ > ۰ \Longrightarrow |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ > ۰ \Longrightarrow \min(۱, ۱)$$

۴۱. گزینه‌ی ۲.

$$z = f(u, v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_۱ . (۲x) + f'_۲ . (۸xy)$$

$$x = ۲, y = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = ۴f'_۱ + ۸f'_۲$$

۴۲. گزینه‌ی ۳.

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{۴x - ۲yz}{-۲z - ۲xy} \Longrightarrow z'\Big|_{(۱,۱,۱)} z'_x = -\frac{۴ - ۲}{-۲ - ۲} = \frac{۱}{۲}$$

۴۳. گزینه‌ی ۴.

$$۴q_۱ + ۸q_۲ = ۱۶۰ \Longrightarrow q_۱ = ۴۰ - ۲q_۲ \Longrightarrow U = (۴۰ - ۲q_۲)q_۲ \Longrightarrow$$

$$U = ۴۰q_۲ - ۲q_۲^۲ \Longrightarrow U_{q_۲} = ۴۰ - ۴q_۲ = ۰ \Longrightarrow q_۲ = ۱۰, q_۱ = ۲۰$$

$$U = ۲۰ \times ۱۰ = ۲۰۰$$

۴۴. گزینه‌ی ۲. حداقل مقدار z برابر صفر است و چون فرجه‌ی رادیکال زوج است زیررادیکال نمی‌تواند منفی باشد. پس
$$R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$$

۴۵. گزینه‌ی ۱.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{\lambda y} + \frac{\lambda y}{\lambda x} + \ln \frac{\lambda x}{\lambda y} = \lambda^۰ \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \ln \frac{x}{y} \right) = \lambda^۰ z \Longrightarrow n = ۰$$
$$x.z'_x + y.z'_y = nz = ۰$$

۴۶. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{cases} z_x = ۰ \\ z_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{۲x + ۴y - ۲x - y + ۱}{(x+۲y)^۲} \\ \dfrac{x + ۲y - ۴x - ۲y + ۲}{(x+۲y)^۲} = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۳y + ۱ = ۰ \\ -۳x + ۲ = ۰ \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} y = -\frac{۱}{۳} \\ x = \frac{۲}{۳} \end{cases} \Longrightarrow x + y = \frac{۱}{۳}$$

۴۷. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} z_x = ۰ \\ z_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۲x + ۲ = ۰ \\ -۴y + ۸ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۲ \end{cases} \Longrightarrow z = ۱۰ - ۱ + ۲ - ۸ + ۱۶ \Longrightarrow z = ۱۹$$

۴۸. گزینه‌ی ۳.

$$z_{xx} = -۲ \ , \ z_{xy} = z_{yx} = ۰ \ , \ z_{yy} = -۴$$
$$|H_۱| = z_{xx} = -۲ < ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{vmatrix} = ۸ > ۰ \Longrightarrow \max(۱, ۱)$$

۴۹. گزینه‌ی ۲.

$$L = x^۲ + y^۲ + \lambda(۵ - x - ۲y)$$
$$\left.\begin{aligned} L_x = ۲x - \lambda = ۰ \Longrightarrow \lambda = ۲x \\ L_y = ۲y - ۲\lambda = ۰ \Longrightarrow \lambda = y \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y = ۲x$$
$$L_\lambda = ۵ - x - ۲y = ۰ \Longrightarrow ۵ - x - ۴x = ۰ \Longrightarrow x = ۱ \Longrightarrow \lambda = ۲(۱) = ۲$$

۵۰. گزینه‌ی ۳.

$$۱۰۰ - ۲x^۲ - y^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow ۲x^۲ + y^۲ \leqslant ۱۰۰$$

$۲x^۲ + y^۲ \geqslant ۰$، بنابراین:

$$۰ \leqslant ۲x^۲ + y^۲ \leqslant ۱۰۰ \Longrightarrow ۰ \geqslant -۲x^۲ - y^۲ \geqslant -۱۰۰ \Longrightarrow ۱۰۰ \geqslant ۱۰۰ - ۲x^۲ - y^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow$$
$$۱۰ \geqslant \sqrt{۱۰۰ - ۲x^۲ - y^۲} \geqslant ۰ \Longrightarrow R_f = [۰, ۱۰]$$

۵۱. گزینه‌ی ۴.

$$x = y = ۱ \Longrightarrow U = ۱\ ,\ V = ۰$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial u}{\partial x} = (۲u + ۲v)\left(\frac{۱}{y}\right) + (۲U)(۲x)$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(۱,۱)} = (۲)(۱) + (۲)(۲) = ۶$$

۵۲. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z_x = ۰ \\ z_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x + ۲y - ۱۲ = ۰ \\ ۲x - ۲y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow ۴x = ۱۲ \Longrightarrow x = ۳\ ,\ y = ۳ \Longrightarrow z = -۱۸$$

۵۳. گزینه‌ی ۲.

$$z_{xx} = ۲\ ,\ z_{xy} = z_{yx} = ۲\ ,\ z_{yy} = -۲$$
$$|H_۱| = z_{xx} = ۲\ ,\ |H_۲| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & -۲ \end{vmatrix} = -۸ \Longrightarrow \text{نقطه‌ی زینی}$$

۵۴. گزینه‌ی ۴.

$$L = xy + \lambda(۱۰۰ - x - ۲y)$$
$$\left.\begin{aligned} L_x = y - \lambda = ۰ \Longrightarrow \lambda = y \\ L_y = x - ۲\lambda = ۰ \Longrightarrow \lambda = \frac{x}{۲} \end{aligned}\right\} \frac{x}{۲} = y \Longrightarrow x = ۲y$$
$$L_\lambda = ۱۰۰ - ۲x - ۲y = ۰ \Longrightarrow ۱۰۰ - ۴y = ۰ \Longrightarrow y = ۲۵ \Longrightarrow \lambda = ۲۵$$

۵۵. گزینه‌ی ۳.

$$y = ۲۵ \Longrightarrow x = ۲(۲۵) = ۵۰ \Longrightarrow z = ۵۰ \times ۲۵ = ۱۲۵۰$$

۵۶. گزینه‌ی ۴. حداقل مقدار عبارت زیر رادیکال به ازای $x = ۵$ و $y = ۰$ برابر ۰ است.

۵۷. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = \frac{۱}{y} + \frac{۱}{x} = \frac{x + y}{xy}$$

۵۸. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} z_x = ۶x - y - ۴ = ۰ \\ z_y = ۴y - x - ۷ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۶x - y = ۴ \\ ۲y - x = ۷ \end{cases} \Longrightarrow x = ۱\ ,\ y = ۲$$

با جایگذاری در تابع $z = ۳$، بنابراین نقطه بحرانی $(۱, ۲, ۳)$ می‌باشد.

۵۹. گزینه‌ی ۲.

$$z_{xx} = ۶ \ , \ z_{xy} = z_{yx} = -۱ \ , \ z_{yy} = ۴$$

$$|H_۱| = ۶ > ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۶ & -۱ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۲۴ - ۱ = ۲۳ > ۰ \Longrightarrow \min$$

۶۰. گزینه‌ی ۱.

$$۲x + ۳y - ۵ = ۰ \Longrightarrow y = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۵}{۳}$$

$$z = xy = x(-\frac{۲}{۳}x + \frac{۵}{۳}) = -\frac{۲}{۳}x^۲ + \frac{۵}{۳}x$$

$$z' = -\frac{۴}{۳}x + \frac{۵}{۳} = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۵}{۴} \ , \ y = \frac{۵}{۶}$$

۶۱. گزینه‌ی ۳.

۶۲. گزینه‌ی ۴.

$$z_x = ۲x + ۵y \Longrightarrow z_{xx} = ۲ \ , \ z_{xy} = ۵$$

$$z_y = ۲y + ۵x \Longrightarrow z_{yy} = ۲$$

$$d^۲z = z_{xx}dx^۲ + ۲z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^۲ = ۲dx^۲ + ۱۰dxdy + ۲dy^۲$$

به‌ازای $dx = dy = ۰/۱$

$$d^۲z = ۲(۰/۰۱) + ۱۰(۰/۱)(۰/۱) + ۲(۰/۰۱) = ۰/۰۲ + ۰/۱ + ۰/۰۲ = ۰/۱۴$$

۶۳. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial s} = (\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}) + (\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s})$$

$$= (۲x + y)(۲) + (x + ۲y)(۱) + (۲x + y)(۱) + (x + ۲y)(-۲)$$

در نقطه‌ی $(۱, ۲)$:

$$\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial s} = ۸ + ۵ + ۴ - ۱۰ = ۷$$

۶۴. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} z_x = ۲x \\ z_y = ۲ay \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x = ۰ & \Longrightarrow x = ۰ \\ ۲ay = ۰ & \Longrightarrow y = ۰ \end{cases}$$

$$z_{xx} = ۲ \ , \ z_{xy} = ۰ \ , \ z_{yy} = ۲a \ , \ z_{yx} = ۰$$

$$|H_۱| = z_{xx} = ۲ > ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲a \end{vmatrix}$$

نقطه بحرانی در صورتی زینی است که $|H_۲| < ۰$:

$$۴a - ۰ < ۰ \Longrightarrow a < ۰$$

۶۵. گزینه‌ی ۴.

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{۲x - ۵yz}{۲z - ۵xy + ۲} \xrightarrow{(۱,۱,۱)} z'_x = -\frac{۲ - ۵}{۲ - ۵ + ۲} = -۳$$

$$z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{۲y - ۵xz}{۲z - ۵xy + ۲} \xrightarrow{(۱,۱,۱)} z'_y = -\frac{۲ - ۵}{۲ - ۵ + ۲} = -۳$$

$$z'_x + z'_y = -۳ - ۳ = -۶$$

۶۶. گزینه‌ی ۲.

۶۷. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۲x(x^۲ + y^۲) - ۲x(x^۲ - y^۲)}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{۴xy^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = \frac{۴y^۲(x^۲ + y^۲)^۲ - ۴x(x^۲ + y^۲)(۴xy^۲)}{(x^۲ + y^۲)^۴}$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}\Big|_{(۱,۱)} = \frac{۴(۲)^۲ - ۴(۲)(۴)}{(۲)^۴} = \frac{۱۶ - ۳۲}{۱۶} = -۱$$

۶۸. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{x}{y} \geqslant ۰$$

۶۹. گزینه‌ی ۳.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} = ۲u.۲x - ۲v.\frac{-x}{y^۲}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ۴ux + \frac{۲vx}{y^۲}$$

۷۰. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} Z_x = ۰ \\ Z_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x + ۴y - ۴ = ۰ \\ ۴x + ۴y - ۶ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۲x - ۴y = -۴ \\ ۴x + ۴y = ۶ \end{cases} \Longrightarrow x = ۱, y = \frac{۱}{۲}$$

۷۱. گزینه‌ی ۳.

$$d^۲z = z_{xx}dx^۲ + ۲z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^۲ = ۲dx^۲ + ۲(۰)dxdy + (-۲)dy^۲$$
$$= ۲dx^۲ - ۲dy^۲$$

۷۲. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} Z_x = ۰ \\ Z_y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x - ۶y + ۴ = ۰ \\ -۶x + ۱۲y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۶x - ۱۸y = -۱۲ \\ -۶x + ۱۲y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow y = ۲, x = ۴$$

$$|H_1| = z_{xx} = ۲ > ۰ \;\; ; \;\; |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & -۶ \\ -۶ & ۱۲ \end{vmatrix} = -۱۲ < ۰ \Longrightarrow \text{زینی } (۴, ۲)$$

۷۳. گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۲xe^{\frac{y}{x}} - x^۲ \cdot \frac{y}{x^۲} e^{\frac{y}{x}} = ۲xe^{\frac{y}{x}} - ye^{\frac{y}{x}}$$
$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = ۲e^{\frac{y}{x}} - e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} \Longrightarrow \left.\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}\right|_{(۱,۲)} = ۲e^۲ - e^۲ - ۲e^۲ = -e^۲$$

۷۴. گزینه‌ی ۱.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = ۰ \\ \frac{\partial z}{\partial y} = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x - ۳y - ۱ = ۰ \\ ۴y - ۳x + ۲ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۶x - ۹y = ۳ \\ ۸y - ۶x = -۴ \end{cases} \Longrightarrow y = ۱, x = ۲$$

$$z_{xx} = ۲ \;\; , \;\; z_{xy} = z_{yx} = -۳ \;\; , \;\; z_{yy} = ۴$$

$$|H_1| = Z_{xx} = ۲ > ۰ \;, \; |H_۲| = \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ -۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۸ - ۹ = -۱ < ۰ \Longrightarrow \text{زینی}(۲, ۱)$$

۷۵. گزینه‌ی ۳.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = (۲x \tan y - \cos ۲y)dx + (x^۲(۱ + \tan^۲ y) + ۲x \sin ۲y)dy$$
$$(۲, \frac{\pi}{۴}) \;\text{،}\; dx = ۰/۰۲, dy = ۰/۰۱$$
$$dz = (۴ \times ۱ - ۰)(۰/۰۲) + (۴ \times ۲ + ۴ \times ۱)(۰/۰۱) = ۰/۲۰$$

۷۶. گزینه‌ی ۴.

$$(s = ۱, t = ۲) \Longrightarrow x = ۲ - ۲ = ۰ \;\; ; \;\; y = ۲ - ۱ = ۱$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = (\frac{۱}{y} - \frac{y}{(x-۲)^۲})(۲) + (-\frac{x}{y^۲} + \frac{۱}{x-۲})(-۲s)$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(۰,۱)} = (۱ - \frac{۱}{۴})(۲) + (۰ - \frac{۱}{۲})(-۲) = \frac{۵}{۲}$$

فصل ۱۰

معادلات دیفرانسیل

تعریف معادله دیفرانسیل

۱۰ـ۱ معادله دیفرانسیل، معادله‌ای است که مشتمل بر مشتقات یک یا چند تابع باشد. اگر معادله دیفرانسیل مشتمل بر مشتق‌های یک تابع یک‌متغیره باشد، $y = f(x)$، معادله دیفرانسیل معمولی است. اگر این معادله دیفرانسیل مشتمل بر مشتق‌های جزئی یک تابع دومتغیره، $f(x,y) = ۰$، یا چند متغیره، $f(x,y,z) = ۰$، مستقل باشد آن را معادله دیفرانسیل، با مشتق‌های جزئی می‌نامند. معادله دیفرانسیل را در حالت کلی به‌صورت‌های زیر نشان می‌دهند.

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = ۰$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^۲y}{dx^۲}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = ۰$$

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = ۰$$

مثال روابط زیر معادلات دیفرانسیل می‌باشند.

الف) $y'' - ۲y' + y = x^۲$ ب) $y'''^۲ - y'^۶ = ۰$ ج) $\frac{\partial^۳ y}{\partial x^۳} + xy\frac{\partial z}{\partial x} - ۳z^۴ = ۰$

مرتبه و درجه یک معادله دیفرانسیل

۱۰ـ۲ مرتبه یک معادله دیفرانسیل، برابر بزرگ‌ترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله دیفرانسیل است و درجه یک معادله دیفرانسیل توان بزرگ‌ترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله است.

مثال مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل در مثال قبل را بیابید.

حل

الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و درجه اول.

ب) معادله دیفرانسیل مرتبه سوم و درجه دوم.

ج) معادله دیفرانسیل مرتبه سوم و درجه اول.

تشکیل معادلات دیفرانسیل

۱۰ـ۳ به‌طورکلی خانواده منحنی‌های $y = f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ را که مشتمل بر n پارامتر مستقل $c_n, \cdots, c_2, c_1$ است، درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم معادله دیفرانسیل این خانواده منحنی را تشکیل دهیم، برای این منظور کافی است از این تابع n بار مشتق گرفته و بین تابع و مشتقات آن ثابت c_i را حذف کنیم، یعنی:

$$\begin{aligned} y' &= f'(x, c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ y'' &= f''(x, c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y^{(n)} &= f^{(n)}(x, c_1, c_2, \cdots, c_n) \end{aligned}$$

اگر بین این روابط ثابت‌های c_i را حذف کنیم، یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خواهیم داشت:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

مثال معادله دیفرانسیل خانواده منحنی‌های $y = cx^2$ را بیابید.

حل

$$\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{cases} \Longrightarrow \frac{y}{y'} = \frac{cx^2}{2cx} \Longrightarrow \frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \Longrightarrow y'x - 2y = 0$$

جواب‌های یک معادله دیفرانسیل

۱۰ـ۴ معادله دیفرانسیل مرتبه nام $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ را درنظر می‌گیریم، هر تابعی مانند $y = f(x)$ را که در این معادله صدق کند، به‌طوری که داشته باشیم $F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)) = 0$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل فوق نامند. به بیان دیگر جواب معادله دیفرانسیل معمولی، تابعی است که در آن مشتق‌ها یا دیفرانسیل‌ها وجود ندارند و ضمناً در معادله‌ی دیفرانسیل صدق می‌کند. چنین جوابی بسته به اینکه ثابت دلخواه (ثابت انتگرال‌گیری) مشخص شده و یا نشده باشد، ممکن است جواب عمومی یا خصوصی باشد.

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

۱۰ـ۵ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به‌صورت صریح $y = f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ و یا به‌صورت ضمنی $f(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$ است. اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه یک باشد، جواب عمومی‌آن مشتمل بر یک ثابت دلخواه است، اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه دو باشد، جواب عمومی آن مشتمل بر دو ثابت دلخواه است و به‌طورکلی اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی آن مشتمل بر n ثابت دلخواه است.

مثال شیب یک منحنی در هر نقطه از آن به‌صورت $y' = x^2 - 2x + 1$ است. با فرض آنکه منحنی این تابع از نقطه $(2, 0)$ بگذرد، جواب عمومی و خصوصی آن را بیابید.

حل

$$y' = x^۲ - ۲x + ۱ \Longrightarrow dy = (x^۲ - ۲x + ۱)dx \Longrightarrow y = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ + x + c \xrightarrow{(۰,۲)}$$

$$۲ = c \Longrightarrow y = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ + x + ۲$$

تست شیب یک منحنی در هر نقطه از آن به‌صورت $y' = \sin x$ است. با فرض آن‌که منحنی این تابع از نقطه $(۱ , ۰)$ می‌گذرد، جواب خصوصی آن کدام است؟

۱) $y = -\cos x + ۱$ ۲) $y = -\cos x + ۳$ ۳) $y = -\cos x - ۱$ ۴) $y = -\cos x + ۲$

حل گزینه‌ی ۴.

$$y' = \sin x \Longrightarrow dy = \sin x\, dx \Longrightarrow y = -\cos x + c$$

$$\xrightarrow{(۰,۱)} ۱ = -\cos ۰ + c \Longrightarrow c = ۲ \Longrightarrow y = -\cos x + ۲$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

۱۰ـ۶ جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل، جوابی است که می‌توان آن را از جواب عمومی با نسبت دادن مقدارهای خاص (شرایط مرزی یا شرایط اولیه) به ثابت‌های دلخواه در جواب عمومی به‌دست آورد. بدیهی است که با تغییر شرایط مرزی جواب خصوصی جدیدی به‌دست می‌آید، لذا می‌توان نتیجه گرفت که بی‌نهایت جواب خصوصی وجود دارد.

حل معادلات دیفرانسیل

۱۰ـ۷ منظور از حل معادله دیفرانسیل $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = ۰$، یافتن جواب عمومی، جواب خصوصی و جواب غیرعادی‌است[۱]. به‌طور کلی پیدا کردن جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل همواره امکان‌پذیر نیست. در زیر به نحوه‌ی حل برخی معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم.

معادله دیفرانسیل $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$

۱۰ـ۸ اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به‌صورت $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ نوشت، جواب آن را می‌توان به روش مستقیم، با انتگرال‌گیری (متوالی) به‌دست آورد.

مثال جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{d^۲ y}{dx^۲} = ۸x - \frac{۱}{x^۲}$ را بیابید.

حل

$$\frac{d^۲ y}{dx^۲} = ۸x - \frac{۱}{x^۲} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = ۴x^۲ + \frac{۱}{x} + c_۱ \Longrightarrow y = \frac{۴}{۳}x^۳ + \ln x + c_۱ x + c_۲$$

۱. از پرداختن به جواب غیرعادی صرف‌نظر می‌کنیم.

معادله‌ی دیفرانسیل جدا

۱۰ـ۹ اگر یک معادله‌ی دیفرانسیل را بتوان به‌صورت $f(x)dx + g(y)dy = ۰$ نوشت، یعنی متغیرهای x و y را کاملاً از هم جدا کنیم، بنا به تعریف این معادله را «معادله‌ی دیفرانسیل جدا» می‌نامند. لازم به تذکر است که در معادله فوق f تنها تابعی از x و g نیز تنها تابعی از y است. جواب معادله دیفرانسیل جدا را می‌توان با انتگرال‌گیری از طرفین معادله فوق، یعنی $\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$، به‌دست آورد.

مثال جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(۱ + x^۲)y' + xy = ۰$ را بیابید. سپس جواب خصوصی را طوری تعیین کنید که از نقطه $(۰, ۱)$ بگذرد.

حل این معادله دیفرانسیل یک معادله دیفرانسیل جدا می‌باشد، زیرا می‌توان نوشت:

$$(۱ + x^۲)y' + xy = ۰ \Longrightarrow (۱ + x^۲)\frac{dy}{dx} + xy = ۰ \Longrightarrow (۱ + x^۲)dy + (xy)dx = ۰ \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{۱ + x^۲}dx + \frac{۱}{y}dy = ۰ \Longrightarrow \int \frac{x}{۱ + x^۲}dx + \int \frac{۱}{y}dy = c \Longrightarrow \frac{۱}{۲}\ln(۱ + x^۲) + \ln(y) = c$$

$$\ln(y)(۱ + x^۲) = c \Longrightarrow y\sqrt{۱ + x^۲} = e^c \xrightarrow{e^c = c} y\sqrt{۱ + x^۲} = c \quad \text{جواب عمومی}$$

$$y\sqrt{۱ + x^۲} = c \xrightarrow{(۰,۱)} \sqrt{۱ + ۰} = c \Longrightarrow c = ۱ \Longrightarrow y\sqrt{۱ + x^۲} = ۱ \quad \text{جواب خصوصی}$$

تست جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل $x^۲y' - y^۲ = ۰$ کدام است؟

۱) $y = \frac{x}{۱ - cx}$ ۲) $y = \frac{۱}{x + c}$ ۳) $y = x + c$ ۴) $y = \frac{x}{x - c}$

حل گزینه‌ی ۱.

$$y' = \frac{y^۲}{x^۲} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^۲}{x^۲} \Longrightarrow \frac{dy}{y^۲} = \frac{dx}{x^۲}$$

$$\int \frac{dy}{y^۲} = \int \frac{dx}{x^۲} \Longrightarrow -\frac{۱}{y} = -\frac{۱}{x} + c \Longrightarrow \frac{۱}{y} = \frac{۱}{x} - c \Longrightarrow y = \frac{x}{۱ - cx}$$

معادله دیفرانسیل همگن

۱۰ـ۱۰ اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به‌صورت $M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰$ نوشت، بنا به تعریف این معادله را «معادله دیفرانسیل همگن» می‌نامند. اگر $M(x,y)$ و $N(x,y)$ توابعی همگن از یک درجه باشند، با تغییر متغیر $y = tx$ می‌توان متغیرها را از هم جدا نمود و با انجام عملیات زیر جواب آن را به‌دست آورد.

۱) در معادله دیفرانسیل به‌جای y عبارت tx را قرار می‌دهیم.

۲) می‌دانیم $y = tx \Longrightarrow dy = tdx + xdt$، سپس به‌جای dy نیز عبارت مساوی آن را قرار می‌دهیم.

۳) پس از ساده کردن معادله دیفرانسیل، یک معادله دیفرانسیل جدا برحسب x و t خواهیم داشت.

۴) معادله را بنا به روش گفته شده حل نموده و جواب آن را برحسب x و t به‌دست می‌آوریم.

۵) به‌جای t مقدار مساوی آن $\frac{y}{x}$ را قرار می‌دهیم.

۶) y را به‌دست می‌آوریم.

مثال جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+y)dx+(x-y)dy=0$ را بیابید. سپس جواب خصوصی را برای $c=0$ تعیین کنید.

حل هر دو تابع همگن و دارای درجه همگنی یک می‌باشند.

$$(x+tx)dx+(x-tx)(tdx+xdt)=0 \Rightarrow (x+tx+tx-t^2x)dx+(x^2-tx^2)dt=0$$

$$(x+2tx-t^2x)dx+(x^2-tx^2)dt=0 \Rightarrow x(1+2t-t^2)dx+x^2(1-t)dt=0$$

$$\frac{1}{x}dx+\frac{1-t}{1+2t-t^2}dt=0 \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1-t}{1+2t-t^2}dt=c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+2t-t^2)+\ln x=c$$

$$\ln x(1+2t-t^2)^{\frac{1}{2}}=c \Rightarrow x(1+2t-t^2)^{\frac{1}{2}}=e^c \xrightarrow{e^c=c} x\left(1+\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=c$$

$$x\left(\frac{x^2+2yx-y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=c \Rightarrow x^2+2yx-y^2=c \quad \text{جواب عمومی}$$

$$c=0 \Rightarrow x^2+2yx-y^2=0 \quad \text{جواب خصوصی}$$

معادله دیفرانسیل کامل

۱۰ـ۱۱ اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به‌صورت $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ نوشت، بنا به تعریف این معادله را «معادله دیفرانسیل کامل» می‌نامند اگر داشته باشیم $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$، برای به‌دست آوردن جواب آن عملیات زیر را انجام می‌دهیم.

۱) از $M(x,y)$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم و ثابت انتگرال‌گیری را با تابعی از y، به‌صورت $\varphi(y)$ عوض می‌کنیم، یعنی:

$$\int M(x,y)dx=f(x,y)+\varphi(y)$$

۲) از تابع به‌دست آمده در بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم و آن را با $N(x,y)$ مساوی قرار می‌دهیم و با به‌دست آوردن $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)$ معادله را حل می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)=N(x,y) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)=N(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}$$

۳) برای یافتن $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)$ نسبت به y انتگرال می‌گیریم. یعنی:

$$\int\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)dy=\varphi(y)$$

۴) با توجه به مراحل ۱ و ۳ جواب معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر است:

$$f(x,y)+\varphi(y)=c$$

مثال معادله دیفرانسیل $(x+y)dx+(y^۲+x)dy=۰$ را حل کنید.

حل این معادله دیفرانسیل کامل است زیرا $\frac{\partial M}{\partial y}=۱$ و $\frac{\partial N}{\partial x}=۱$ بنابراین:

$$\int (x+y)dx=\frac{۱}{۲}x^۲+xy+\varphi(y) \qquad ,x+\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)=y^۲+x \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)=y^۲$$

$$\int y^۲dy=\frac{۱}{۳}y^۳\ ,\ \frac{۱}{۲}x^۲+xy+\frac{۱}{۳}y^۳=c$$

برای بررسی صحت جواب کافی است از رابطه فوق دیفرانسیل کامل بگیریم، یعنی:

$$xdx+ydx+xdy+y^۲dy=۰ \Longrightarrow (x+y)dx+(y^۲+x)dy=۰$$

که همان معادله دیفرانسیل است.

تست اگر معادله‌ی دیفرانسیل $(my-x^۲)dx+(x+y^۲)dy=۰$ کامل باشد، m کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

حل گزینه‌ی ۳.

$$M=my-x^۲,\ N=x+y^۲$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Longrightarrow m=۱$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

۱۰ـ۱۲ اگر معادله دیفرانسیل به‌صورت $y'+y.f(x)=g(x)$ باشد، بنا به تعریف «معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول» است. برای به‌دست آوردن جواب آن عملیات زیر را انجام می‌دهیم.

۱) از رابطه زیر فاکتور انتگرال A را می‌یابیم.

$$A=e^{\int f(x)dx}$$

۲) از رابطه زیر جواب عمومی را محاسبه می‌کنیم.

$$y=\frac{c}{A}+\frac{۱}{A}\int A.g(x)dx$$

به‌طور مشابه برای معادله دیفرانسیل $x'+x.f(y)=g(y)$ داریم:

$$A=e^{\int f(y)dy}$$

$$x=\frac{c}{A}+\frac{۱}{A}\int A\cdot g(y)dy$$

مثال جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + ۲y = ۶$ را بیابید. سپس جواب خصوصی آن را در شرایطی که اگر $x = ۰$ باشد $y = ۱$ است، به‌دست آورید.

حل

$$A = e^{\int ۲dx} = e^{۲x} \Longrightarrow y = \frac{c}{e^{۲x}} + \frac{۱}{e^{۲x}} \int ۶e^{۲x} dx = ce^{-۲x} + e^{-۲x}(۳e^{۲x})$$

$$y = ce^{-۲x} + ۳e^{۰} \Longrightarrow y = ce^{-۲x} + ۳ \quad \text{جواب عمومی}$$

$$(x = ۰, y = ۱) \Longrightarrow ۱ = ce^{۰} + ۳ \Longrightarrow c = -۲ \Longrightarrow y = -۲e^{-۲x} + ۳ \quad \text{جواب خصوصی}$$

تست جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y' - y = e^x$ با شرایط $y(۰) = ۰$ کدام است؟

۱) $y = x + e^x$ ۲) $y = \frac{e^x}{x}$ ۳) $y = xe^x$ ۴) $y = \frac{x}{e^x}$

حل گزینه‌ی ۳.

$$A = e^{\int -dx} = e^{-x} \Longrightarrow y = \frac{e}{e^{-x}} + \frac{۱}{e^{-x}} \int e^{-x} \cdot e^{x}\, dx = \frac{c}{e^{x}} + \frac{۱}{e^{x}} \int dx$$

$$y = \frac{c}{e^{-x}} + \frac{۱}{e^{-x}} \cdot x \Longrightarrow y = ce^{x} + xe^{x} \xrightarrow{y(۰)=۰} ۰ = c + ۰ \Longrightarrow y = xe^{x}$$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

۱۰ـ۱۳ این معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت $Ay'' + By' + Cy = ۰$ می‌باشد. برای حل آن معادله درجه دوم $Ak^۲ + Bk + C = ۰$ را تشکیل می‌دهیم[۱]، ریشه‌های آن را $(k_۱, k_۲)$ به‌دست می‌آوریم.

۱) اگر $\Delta > ۰$، دو ریشه $k_۱$ و $k_۲$، آنگاه $y = c_۱e^{k_۱x} + c_۲e^{k_۲x}$

۲) اگر $\Delta = ۰$، ریشه مضاعف $k_۱ = k_۲$، آنگاه $y = c_۱e^{k_۱x} + c_۲xe^{k_۱x}$

۳) اگر $\Delta < ۰$، ریشه مختلط $a + bi$، آنگاه $y = e^{ax}(c_۱ \cos bx + c_۲ \sin bx)$

تذکر: روابط گفته شده، برای حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n همگن نیز به‌طور مشابه صادق است. به‌عنوان نمونه معادله کمکی برای معادله دیفرانسیل $a_۰y^{(n)} + a_۱y^{(n-۱)} + \cdots + a_ny = ۰$ به‌صورت $a_۰k^n + a_۱k^{n-۱} + \cdots + a_n = ۰$ است. اگر این معادله دارای n ریشه مجزای $k_۱, k_۲, \cdots, k_n$ باشد در این‌صورت جواب عمومی معادله به‌صورت زیر است:

$$y = c_۱e^{k_۱x} + c_۲e^{k_۲x} + \cdots + c_ne^{k_nx}$$

مثال جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - ۳y' + ۲y = ۰$ را بیابید.

حل

$$k^۲ - ۳k + ۲ = ۰, \Delta = ۹ - ۸ > ۰, (k-۱)(k-۲) = ۰ \Longrightarrow k_۱ = ۱, k_۲ = ۲$$

$$y = c_۱e^{x} + c_۲e^{۲x}$$

---

۱. معادله کمکی یا مفسر است.

تست جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + ۲y' + y = ۰$ کدام است؟

۱) $y = e^{-x}(c_۱ \cos x + c_۲ \sin x)$

۲) $y = e^{-x}(c_۱ e^{x} + c_۲ e^{x})$

۳) $y = e^{-x}(c_۱ + c_۲ x)$

۴) $y = c_۱ e^{-x} + c_۲$

حل گزینه‌ی ۳.

$$k^۲ + ۲k + ۱ = ۰ \Longrightarrow (k+۱)^۲ = ۰ \Longrightarrow k_۱ = k_۲ = -۱$$
$$\Longrightarrow y = c_۱ e^{-x} + c_۲ x e^{-x} = (c_۱ + c_۲ x) e^{-x}$$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم غیرهمگن

۱۰ـ۱۴ این معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = f(x)$ می‌باشد. برای حل آن معادله‌ی درجه‌ی دوم $Ak^۲ + Bk + C = ۰$ را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را $(k_۲, k_۱)$ به‌دست می‌آوریم.

۱) اگر $\Delta > ۰$، دو ریشه $k_۱$ و $k_۲$، آنگاه $y = c_۱ e^{k_۱ x} + c_۲ e^{k_۲ x} + G(x)$

۲) اگر $\Delta = ۰$، ریشه مضاعف $k_۱ = k_۲$، آنگاه $y = c_۱ e^{k_۱ x} + c_۲ x e^{k_۱ x} + G(x)$

۳) اگر $\Delta < ۰$، ریشه مختلط $a + bi$، آنگاه $y = e^{ax}(c_۱ \cos bx + c_۲ \sin bx) + G(x)$

برای تعیین $G(x)$ حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

الف) اگر $f(x)$ مقداری ثابت باشد، یعنی $f(x) = D$، آنگاه $G(x) = \frac{D}{C}$.

ب) اگر $f(x)$ تابعی درجه اول از x باشد، آنگاه $G(x) = ax + b$

ج) اگر $f(x)$ تابعی درجه دوم از x باشد، آنگاه $G(x) = ax^۲ + bx + c$.

د) اگر $f(x)$ تابعی از e^x باشد، $G(x) = ae^x$ و اگر به‌وسیله $G(x) = ae^x$ نتوانیم ضریب a را تعیین کنیم، باید از $G(x) = axe^x$ استفاده کنیم و اگر مجدداً به جواب نرسیدیم از $G(x) = ax^۲e^x$ استفاده می‌کنیم.

ه) برای تعیین ضرایب نامعین تابع $G(x)$ در موارد فوق (ب، ج، د) بایستی $G'(x)$ و $G''(x)$ را محاسبه کنیم و توابع $G(x)$ و $G'(x)$ و $G''(x)$ را به‌ترتیب به‌جای y و y' و y'' قرار دهیم و از اتحاد دو طرف ضرایب نامعین محاسبه شود.

مثال جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - ۶y' + ۹y = ۲e^x$ را بیابید.

حل

$$k^۲ - ۶k + ۹ = ۰, \Delta = ۳۶ - ۳۶ = ۰, (k-۳)^۲ = ۰ \Longrightarrow k_۱ = k_۲ = ۳$$
$$y = c_۱ e^{۳x} + c_۲ x e^{۳x} + G(x)$$
$$G(x) = ae^x \Longrightarrow G'(x) = ae^x \Longrightarrow G''(x) = ae^x$$
$$G''(x) - ۶G'(x) + ۹G(x) = ۲e^x \Longrightarrow ae^x - ۶ae^x + ۹ae^x = ۲e^x$$
$$۴ae^x = ۲e^x \Longrightarrow ۴a = ۲ \Longrightarrow a = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow G(x) = \frac{۱}{۲}e^x$$
$$y = c_۱ e^{۳x} + c_۲ x e^{۳x} + \frac{۱}{۲}e^x$$

تست جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + ۴y = ۲x$ کدام است؟

۱) $y = c_۱ \cos ۲x + c_۲ \sin ۲x + \frac{x}{۲} + x$

۲) $y = c_۱ e^{۲x} + c_۲ e^{-۲x} + \frac{x}{۲} + c$

۳) $y = e^{۲x}(c_۱ + c_۲ x) + \frac{x}{۲} + c$

۴) $y = c_۱ \cos ۲x + c_۲ \sin ۲x - \frac{x}{۲} + c$

حل گزینه‌ی ۱.

$$k^۲ + ۴ = ۰ \to k = \pm ۲i \Longrightarrow y = e^{۰}(c_۱ \cos ۲x + c_۲ \sin ۲x) + G(x)$$

$$G(x) = ax + b \Longrightarrow G' ۲x = a,\ G''(x) = ۰$$

$$G''(x) + ۴G(x) = ۲x \Longrightarrow ۴ax + ۴b = ۲x \Longrightarrow \begin{cases} ۴a = ۲ \Longrightarrow a = \frac{۱}{۲} \\ ۴b = ۰ \Longrightarrow b = ۰ \end{cases}$$

$$y = c_۱ \cos ۲x + c_۲ \sin ۲x + \frac{۱}{۲}x + c$$

تست‌های فصل ۱۰

۱. شیب یک منحنی در هر نقطه آن به‌صورت $y' = e^x + x - ۱$ است، با فرض آنکه منحنی این تابع از نقطه $(۰, ۱)$ بگذرد، جواب خصوصی آن کدام است؟

۱) $y = e^x + \frac{۱}{۲}x^۲$
۲) $y = e^x + \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱$
۳) $y = e^x + ۲x$
۴) $y = e^x + \frac{۱}{۲}x^۲ - x$

۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} - \sin x + x = ۰$ کدام است؟

۱) $y = \cos x + \frac{۱}{۲}x^۲ + c$
۲) $y = -\cos x - \frac{۱}{۲}x^۲ + c$
۳) $y = -\cos x + \frac{۱}{۲}x^۲ + c$
۴) $y = \cos x - \frac{۱}{۲}x^۲ + c$

۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $dx = (۱ - \cos ۲y)dy$ کدام است؟

۱) $y - x - \frac{۱}{۲}\sin ۲y = c$
۲) $y = x - \frac{۱}{۲}\sin ۲y + c$
۳) $y - x + \frac{۱}{۲}\sin ۲y = c$
۴) $y = -x + \frac{۱}{۲}\sin ۲y + c$

۴. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $dy = (\cos x + ۲x)dx$ به‌ازای $c = ۰$ کدام است؟

۱) $y = -\sin x + x^۲$
۲) $y = -\sin x - x^۲$
۳) $y = \sin x + x^۲$
۴) $y = \sin x - x^۲$

۵. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $\frac{d^۲y}{dx^۲} = ۴x^۳ - x^{-۲}$ به‌ازای $c_۱ = c_۲ = ۰$ کدام است؟

۱) $y = x^۴ + \frac{۱}{x}$
۲) $y = \frac{۱}{۵}x^۵ - \ln x$
۳) $y = x^۵ + \ln x$
۴) $y = \frac{۱}{۵}x^۵ + \ln x$

۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x + y)dx = xdy$ کدام است؟

۱) $x = ce^{\frac{y}{x}}$
۲) $x = ce^{\frac{x}{y}}$
۳) $y = e^c e^{\frac{y}{x}}$
۴) $y = e^{\frac{y}{x}} + c$

۷. کدام گزینه، یک جواب معادله‌ی $\frac{xdy}{dx} + y = x^۲$ است؟

۱) $y = \frac{x}{۳} + \frac{c}{x}$
۲) $y = \frac{x^۲}{۳} + \frac{c}{x}$
۳) $y = \frac{x}{۳} - \frac{c}{x}$
۴) $y = \frac{x^۲}{۳} - \frac{c}{x}$

۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^۳dx - x^۲dy = ۰$ کدام است؟

۱) $x^۲ - y^۲ = cx^۲y^۲$
۲) $c(x^۲ - y^۲) = x^۲y^۲$
۳) $y^۲ - x^۲ = cx^۲y^۲$
۴) $c(y^۲ - x^۲) = x^۲y^۲$

۹. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(xe^{\frac{y}{x}} + y)dx = xdy$ کدام است؟

۱) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$
۲) $\ln x + e^{\frac{y}{x}} = c$
۳) $\ln x - e^{\frac{y}{x}} = c$
۴) $\ln x - e^{-\frac{y}{x}} = c$

۱۰. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+1)\frac{dy}{dx}+y^{۲}=۰$ کدام است؟

۱) $y=\ln c(x+1)$ ۲) $y=c\ln(x+1)$ ۳) $y=\frac{۱}{\ln c(x+1)}$ ۴) $y=\frac{c}{\ln(x+1)}$

۱۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x^{۲}+y^{۲})dx+۲xydy=۰$ کدام است؟

۱) $x^{۲}+۳y^{۲}=c$ ۲) $x^{۳}+۳xy^{۲}=c$ ۳) $۱+\frac{۳y^{۲}}{x^{۲}}=c$ ۴) $x(x^{۳}+۳xy^{۲})=c$

۱۲. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(x^{۲}+y^{۲})dx-۲xydy=۰$ گذرنده از نقطه $(۰,۱)$ کدام است؟

۱) $x=x^{۲}-y^{۲}$ ۲) $x^{۳}=y^{۲}-x^{۲}$ ۳) $x^{۳}=x^{۲}-y^{۲}$ ۴) $x=y^{۲}-x^{۲}$

۱۳. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $۳x^{۲}+۱+e^{y}\cdot y'=۰$ را طوری بیابید که از نقطه $(۰,۱)$ بگذرد.

۱) $x^{۳}+x+e^{y}-۳=۰$ ۲) $x^{۳}+x+e^{y}-۲=۰$

۳) $x^{۳}+x+e^{y}=۰$ ۴) $x^{۳}+x+e^{y}=۱$

۱۴. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(\ln y+y^{۳}+ye^{xy})dx+\left(\frac{x}{y}+۳xy^{۲}+xe^{xy}\right)dy=۰$ کدام است؟

۱) $x\ln y+xy^{۲}+e^{xy}+y=c$ ۲) $\frac{۱}{y}+۳y^{۲}+e^{xy}+xye^{xy}=c$

۳) $\frac{۱}{y}+۳y^{۲}+xye^{xy}=c$ ۴) $x\ln y+xy^{۳}+e^{xy}=c$

۱۵. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(x\sin y-y)y'=\cos y$ در نقطه $(۱,۰)$ کدام است؟

۱) $۲x\cos y+y^{۲}=۰$ ۲) $۲(x\cos y-۱)+y^{۲}=۰$

۳) $x\cos y+y^{۲}=۰$ ۴) $\cos y+y^{۲}=۰$

۱۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $ye^{x}-x+(e^{x}+۱)y'=۰$ کدام است؟

۱) $۲y(e^{x}+۱)-x^{۲}=c$ ۲) $۲y(e^{x}-۱)-x^{۲}=c$

۳) $y(e^{x}+۱)-x^{۲}=c$ ۴) $y(e^{x}-۱)+x^{۲}=c$

۱۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'+۲y=۴x$ کدام است؟

۱) $y=ce^{-۲x}+۲x-۱$ ۲) $y=ce^{۲x}+۲x-۱$

۳) $y=ce^{-۲x}-۲x+۱$ ۴) $y=ce^{-۲x}+e^{-۲x}-۱$

۱۸. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'+۲xy=xe^{-x^{۲}}$ گذرنده از نقطه $(۲,۰)$ کدام است؟

۱) $y=e^{-x^{۲}}\left(\frac{۱}{۲}+۲x^{۲}\right)$ ۲) $y=۲e^{-x^{۲}}(۱+x^{۲})$

۳) $y=e^{-x^{۲}}\left(۲+\frac{۱}{۲}x^{۲}\right)$ ۴) $y=۲e^{-x^{۲}}(۲+x^{۲})$

۱۹. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^{۲}dy+(y-۲xy-۲x^{۲})dx=۰$ کدام است؟

۱) $y=x^{۲}e^{\frac{۱}{x}}(c+۲)$ ۲) $y=x^{۲}(ce^{\frac{۱}{x}}+۲)$

۳) $y=x^{۲}(۲ce^{\frac{۱}{x}}+۱)$ ۴) $y=e^{\frac{۱}{x}}(x^{۲}+۲c)$

۲۰. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{dy} + x = e^{-y}$ که از مبدأ مختصات می‌گذرد، کدام است؟

۱) $x = ye^{-y}$ ۲) $x = e^{-y}(1+y)$ ۳) $y = xe^{-x}$ ۴) $y = e^{-x}(1+x)$

۲۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $2ydx = (y^4 + x)dy$ کدام است؟

۱) $y = cx^{1/2} + \frac{1}{7}x^4$ ۲) $y = cy^{1/2} + 7y^4$ ۳) $y = cx^{1/2} + 7x^4$ ۴) $x = cy^{1/2} + \frac{1}{7}y^4$

۲۲. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - 6y' + 5y = 1$ به‌ازای $c_1 = c_2 = 0$ کدام است؟

۱) $y = 5$ ۲) $y - 5 = 0$ ۳) $5y = 1$ ۴) $y = 1$

۲۳. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + 2y = 2$ به‌ازای $c_1 = c_2 = 1$ کدام است؟

۱) $y = e^{-2x}(\cos x + \sin x) + 1$ ۲) $y = e^{x}(\cos 2x - \sin 2x) + 1$

۳) $y = e^{-2x}(\cos x + \sin x)$ ۴) $y = e^{-2x}(\cos x - \sin x) + 1$

۲۴. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + y' + 2y = 2x^2$ به‌ازای $c_1 = c_2 = 0$ کدام است؟

۱) $y = x^2 - x - \frac{1}{2}$ ۲) $y = x^2 - x - 1$ ۳) $y = x^2 + x - 6$ ۴) $y = x^2 + x - \frac{1}{2}$

۲۵. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - y = xe^x$ به‌ازای $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $y = \frac{1}{4}(e^{-x} + xe^x)$ ۲) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} + x^2e^x) - xe^x$

۳) $y = \frac{1}{4}(e^x + x^2e^x)$ ۴) $y = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + x^2e^x)$

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۱۰

۱. گزینه‌ی ۴.

$$y' = e^x + x - 1 \Rightarrow dy = (e^x + x - 1)dx \Rightarrow y = e^x + \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

$$(0, 1) \Rightarrow 1 = e^0 + 0 - 0 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = e^x + \frac{1}{2}x^2 - x$$

۲. گزینه‌ی ۲.

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - x \Rightarrow y = -\cos x - \frac{1}{2}x^2 + c$$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$dx = (1 - \cos 2y)dy \Rightarrow dx - (1 - \cos 2y)dy = 0 \Rightarrow \int dx - \int (1 - \cos^2 y)dy = 0 \Rightarrow$$

$$x - \left(y - \frac{1}{2}(\sin 2y)\right) = c \Rightarrow x - y + \frac{1}{2}\sin 2y = c \Rightarrow y - x - \frac{1}{2}\sin 2y = c$$

۴. گزینه‌ی ۳.

$$dy = (\cos x + 2x)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x + 2x \Rightarrow y = \sin x + x^2 + c$$

$$c = 0 \Rightarrow y = \sin x + x^2$$

۵. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = ۴x^۳ - x^{-۲} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^۴ + \frac{۱}{x} + c_۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{۵}x^۵ + \ln x + c_۱x + c_۲$$
$$c_۱ = c_۲ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۱}{۵}x^۵ + \ln x$$

۶. گزینه‌ی ۱. $(x+y)dx = xdy$ معادله دیفرانسیل همگن و درجه همگنی آن یک است.

$$(x+tx)dx = x(tdx + xdt) \Rightarrow xdx + txdx - txdx - x^۲dt = ۰$$
$$xdx - x^۲dt = ۰ \Rightarrow \frac{x}{x^۲}dx - dt = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x}dx - dt = ۰ \Rightarrow \int \frac{۱}{x}dx - \int dt = ۰ \Rightarrow$$
$$\ln x - t = c \Rightarrow t = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln x - \frac{y}{x} = c \Rightarrow \ln x = \frac{y}{x} + c \Rightarrow$$
$$x = e^{\frac{y}{x+c}} \Rightarrow x = e^{\frac{y}{x}} \cdot e^c \xrightarrow{e^c = c} x = ce^{\frac{y}{x}}$$

۷. گزینه‌ی ۲. جواب هر معادله باید در خود آن معادله صدق کند، با جای‌گذاری جواب‌ها خواهیم داشت:

$$y = \frac{x^۲}{۳} + \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۲x}{۳} - \frac{c}{x^۲} \xrightarrow{\text{جاگذاری}} x\left(\frac{۲x}{۳} - \frac{c}{x^۲}\right) + \frac{x^۲}{۳} + \frac{c}{x} = x^۲ \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = x^۲$$

۸. گزینه‌ی ۱. $y^۳dx - x^۳dx = ۰$ معادله دیفرانسیل جداست. بنابراین:

$$y^۳dx = x^۳dy \Rightarrow \frac{dx}{x^۳} = \frac{dy}{y^۳} \Rightarrow \frac{dx}{x^۳} - \frac{dy}{y^۳} = ۰ \Rightarrow \int \frac{dx}{x^۳} - \int \frac{dy}{y^۳} = ۰ \Rightarrow$$
$$\frac{x^{-۲}}{-۲} - \frac{y^{-۲}}{-۲} = c \Rightarrow -\frac{۱}{۲x^۲} + \frac{۱}{۲y^۲} = c \Rightarrow \frac{-y^۲ + x^۲}{۲x^۲y^۲} = c \Rightarrow \frac{x^۲ - y^۲}{۲x^۲y^۲} = c \Rightarrow x^۲ - y^۲ = cx^۲y^۲$$

۹. گزینه‌ی ۱. $(xe^{\frac{y}{x}} + y)dx = xdy$ معادله دیفرانسیل همگن و درجه همگنی آن یک است. بنابراین:

$$(xe^t + tx)dx = x(tdx + xdt) \Rightarrow xe^tdx + txdx - txdx - x^۲dt = ۰$$
$$xe^tdx - x^۲dt = ۰ \Rightarrow e^tdx - xdt = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x}dx - \frac{۱}{e^t}dt = ۰ \Rightarrow$$
$$\ln x + e^{-t} = c \Rightarrow \ln x + e^{\frac{-y}{x}} = c$$

۱۰. گزینه‌ی ۳.

$$(x+۱)\frac{dy}{dx} + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x+۱)dy + y^۲dx = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{y^۲} + \frac{dx}{x+۱} = ۰ \Rightarrow \int \frac{dy}{y^۲} + \int \frac{dx}{x+۱} = ۰$$
$$\Rightarrow -\frac{۱}{y} + \ln(x+۱) + c = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{y} = \ln(x+۱) + \ln c \Rightarrow \frac{۱}{y} = \ln c(x+۱) \Rightarrow y = \frac{۱}{\ln c(x+۱)}$$

۱۱. گزینه‌ی ۲. ضریب dx و dy توابعی همگن از درجه دو هستند، بنابراین:

$$(x^۲+t^۲x^۲)dx+(۲x^۲t)(tdx+xdt)=۰ \Rightarrow x^۲dx+t^۲x^۲dx+۲t^۲x^۲dx+۲x^۳tdt=۰$$
$$\Rightarrow x^۲(۱+۳t^۲)dx+۲x^۳tdt=۰ \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۳}dx+\frac{۲t}{۱+۳t^۲}dt=۰$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{x}dx+\frac{۲t}{۱+۳t^۲}dt=۰ \Rightarrow \int\frac{۱}{x}dx+\int\frac{۲t}{۱+۳t^۲}dt=c \Rightarrow \ln x+\frac{۱}{۳}\ln(۱+۳t^۲)=c$$
$$\Rightarrow x(۱+۳t^۲)^{\frac{۱}{۲}}=e^c \xrightarrow{e^c=c} x\left(۱+\frac{۳y^۲}{x^۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}=c \Rightarrow x\sqrt[۲]{\frac{x^۲+۳y^۲}{x^۲}}=c \Rightarrow x^۳+۳xy^۲=c$$

۱۲. گزینه‌ی ۳. ضریب dx و dy توابعی همگن از درجه دو هستند. بنابراین:

$$(x^۲+t^۲x^۲)dx-۲x^۲t(tdx+xdt)=۰ \Rightarrow x^۲dx+t^۲x^۲dx-۲t^۲x^۲dx-۲x^۳tdt=۰$$
$$\Rightarrow x^۲(۱-t^۲)dx-۲x^۳tdt=۰ \Rightarrow \frac{۱}{x}dx-\frac{۲t}{۱-t^۲}dt=۰ \Rightarrow \int\frac{۱}{x}dx-\int\frac{۲t}{۱-t^۲}dt=c$$
$$\Rightarrow \ln x-\ln(۱-t^۲)=c \Rightarrow \frac{c}{۱-\frac{y^۲}{x^۲}}=e^c \xrightarrow{e^c=c} \frac{x^۳}{x^۲-y^۲}=c \xrightarrow{(۱,۰)} c=۱ \Rightarrow x^۳=x^۲-y^۲$$

۱۳. گزینه‌ی ۱. $(۳x^۲+۱)dx+e^y\cdot dy=۰$ یا $۳x^۲+۱+e^y\cdot\frac{dy}{dx}=۰$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل جداست. بنابراین:

$$\int(۳x^۲+۱)dx+\int e^ydy=c \Rightarrow x^۳+x+e^y=c \xrightarrow{(۱,۰)} ۱+۱+e^۰=c \Rightarrow c=۳ \Rightarrow x^۳+x+e^y-۳=۰$$

۱۴. گزینه‌ی ۴. چون $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{۱}{y}+\frac{۱}{۳y^۲}+xye^{xy}$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین:

$$\int(\ln y+y^۳+ye^{xy})dx=x\ln y+xy^۳+e^{xy}+\varphi(y)$$
$$\frac{x}{y}+۳xy^۲+xe^{xy}+\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)=\frac{x}{y}+۳xy^۲+xe^{xy} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)=۰$$
$$x\ln y+xy^۳+e^{xy}=c$$

۱۵. گزینه‌ی ۱.

$$(x\sin y-y)y'=\cos y \Rightarrow (x-\sin y)\frac{dy}{dx}=\cos y \Rightarrow \cos ydx-(x\sin y-y)dy=۰$$

چون $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\sin y$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین:

$$\int\cos ydx=x\cos y+\varphi(y) \quad , \quad -x\sin y+\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)=-x\sin y+y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)=y$$
$$\int ydy=\frac{۱}{۲}y^۲=\varphi(y) \quad , \quad x\cos y+\frac{۱}{۲}y^۲=c \Rightarrow ۲x\cos y+y^۲=c$$

۱۶. گزینه‌ی ۱.

$$ye^x - x + (e^x + ۱)y' = ۰ \Rightarrow ye^x - x + (e^x + ۱)\frac{dy}{dx} = ۰ \Rightarrow (ye^x - x)dx + (e^x + ۱)dy = ۰$$

چون $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = e^x$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین:

$$\int (ye^x - x)dx = ye^x - \frac{۱}{۲}x^۲ + \varphi(y)\ ,\ e^x + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = e^x + ۱ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = ۱$$

$$\int dy = y = \varphi(y)\ ,\ ye^x - \frac{۱}{۲}x^۲ + y = c \Rightarrow ۲ye^x - x^۲ + ۲y = c \Rightarrow ۲y(e^x + ۱) - x^۲ = c$$

۱۷. گزینه‌ی ۱. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به‌صورت $y' + f(x)\cdot y = g(x)$ بنابراین:

$$A = e^{\int ۲dx} = e^{۲x} \quad , \quad y = \frac{c}{e^{۲x}} + \frac{۱}{e^{۲x}}\int ۴xe^{۲x}dx$$

برای $\int ۴xe^{۲x}dx$ داریم:

$$u = ۴x \Rightarrow du = ۴dx, dv = e^{۲x}dx \Rightarrow v = \frac{۱}{۲}e^{۲x}$$

$$\int ۴xe^{۲x}dx = ۲xe^{۲x} - \int \frac{۴}{۲}e^{۲x}dx = ۲xe^{۲x} - e^{۲x} = e^{۲x}(۲x - ۱)$$

در نتیجه:

$$y = ce^{-۲x} + e^{-۲x}[e^{۲x}(۲x - ۱)] = ce^{-۲x} + e^{۰}(۲x - ۱) = ce^{-۲x} + ۲x - ۱$$

۱۸. گزینه‌ی ۳. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به‌صورت $y' + f(x).y = g(x)$ بنابراین:

$$A = e^{\int ۲xdx} = e^{x^۲}\ ,\ y = \frac{c}{e^{x^۲}} + \frac{۱}{e^{x^۲}}\int xe^{x^۲}e^{-x^۲}dx = ce^{-x^۲} + e^{-x^۲}\int xdx \Rightarrow$$

$$y = ce^{-x^۲} + \frac{۱}{۲}x^۲e^{-x^۲} \xrightarrow{(۰,۲)} ۲ = c \Rightarrow y = ۲e^{-x^۲} + \frac{۱}{۲}x^۲e^{-x^۲} = e^{-x^۲}\left(۲ + \frac{۱}{۲}x^۲\right)$$

۱۹. گزینه‌ی ۲. معادله دیفرانسیل مرتبه اول به‌صورت $y' + f(x).y = g(x)$ است، زیرا

$$x^۲dy + (y - ۲xy - ۲x^۲)dx = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \left(\frac{۱ - ۲x}{x^۲}\right)y = ۲$$

$$A = e^{\int \frac{۱ - ۲x}{x^۲}dx} = e^{-\frac{۱}{x} - \ln x^۲} = \frac{e^{-\frac{۱}{x}}}{x^۲}$$

$$y = \frac{cx^۲}{e^{-\frac{۱}{x}}} + \frac{x^۲}{e^{-\frac{۱}{x}}}\int \frac{۲e^{-\frac{۱}{x}}}{x^۲}dx \Rightarrow y = cx^۲e^{\frac{۱}{x}} + ۲x^۲e^{\frac{۱}{x}}\int x^{-۲}e^{-\frac{۱}{x}}dx \Rightarrow$$

$$y = cx^۲e^{\frac{۱}{x}} + ۲x^۲ \Rightarrow y = x^۲(ce^{\frac{۱}{x}} + ۲)$$

۲۰. گزینه‌ی ۱. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به‌صورت $x' + f(y).x = g(y)$ است.

$$A = e^{\int dy} = e^y$$

$$x = \frac{c}{e^y} + \frac{۱}{e^y}\int e^y.e^{-y}dy = ce^{-y} + e^{-y}\int dy \Rightarrow x = ce^{-y} + ye^{-y} \xrightarrow{(۰,۰)} c = ۰ \Rightarrow x = ye^{-y}$$

۲۱. گزینه‌ی ۴. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به‌صورت $x'.f(y).x = g(y)$ است، زیرا

$$۲ydx = (y^۴ + x)dy \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \left(\frac{۱}{۲y}\right)x = \frac{۱}{۲}y^۳$$

$$A = e^{\int -\frac{۱}{۲y}dy} = e^{-\left(\frac{۱}{۲}\right)\ln y} = y^{\frac{-۱}{۲}}$$

$$x = \frac{c}{y^{\frac{-۱}{۲}}} + \frac{۱}{y^{\frac{-۱}{۲}}}\int y^{\frac{-۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}y^۳\right)dy = cy^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲}y^{\frac{۱}{۲}}\int y^{\frac{۵}{۲}}dy$$

$$\Rightarrow x = cy^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲}y^{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۲}{۷}y^{\frac{۷}{۲}}\right) \Rightarrow x = cy^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۷}y^۴$$

۲۲. گزینه‌ی ۳. معادله دیفرانسیل به‌صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = D$ است.

$$k^۲ - ۶k + ۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۳۶ - ۲۰ = ۱۶ > ۰, (k-۵)(k-۱) = ۰ \Rightarrow k_۱ = ۵, k_۲ = ۱$$

$$y = c_۱e^{۵x} + c_۲e^{x} + \frac{۱}{۵} \xrightarrow{c_۱=c_۲=۰} y = \frac{۱}{۵} \Rightarrow ۵y = ۱$$

۲۳. گزینه‌ی ۱. معادله دیفرانسیل به‌صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = D$ است.

$$k^۲ + ۲k + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta' = ۱ - ۲ = -۱ < ۰ \Rightarrow k = \frac{-۲ \pm \sqrt{-۱}}{۱} \Rightarrow k = -۲ \pm i \Rightarrow a = -۲, b = ۱$$

$$\Rightarrow y = e^{ax}(c_۱\cos bx + c_۲\sin bx) + \frac{D}{C} \Rightarrow y = e^{-۲x}(\cos x + \sin x) + ۱$$

۲۴. گزینه‌ی ۱. معادله دیفرانسیل به‌صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = G(x)$ است.

$$k^۲ + k + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ - ۸ = -۷ < ۰ \Rightarrow y = e^{ax}(c_۱\cos bx + c_۲\sin bx) + G(x), c_۱ = c_۲ = ۰ \Rightarrow$$

$$y = e^{ax}(۰ + ۰) + G(x) \Rightarrow y = G(x)G(x) = ax^۲ + bx + c \Rightarrow G'(x) = ۲ax + b \Rightarrow G''(x) = ۲a$$

$$y'' + y' + ۲y = ۲x^۲ \Rightarrow ۲a + ۲ax + b + ۲ax^۲ + ۲bx + ۲c = ۲x^۲$$

$$\Rightarrow ۲ax^۲ + (۲a + ۲b)x + (۲a + b + ۲c) = ۲x^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱ \\ ۲a + ۲b = ۰ \Rightarrow b = -۱ \\ ۲a + b + ۲c = ۰ \Rightarrow c = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(x) = x^۲ - x - \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = x^۲ - x - \frac{۱}{۲}$$

۲۵. گزینه‌ی ۲. معادله دیفرانسیل به‌صورت $Ay'' + By' + Cy = G(x)$ است.

$$k^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow k = \pm ۱ \Rightarrow k_۱ = ۱, k_۲ = -۱$$

$$y = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + G(x) \xrightarrow{c_۱=c_۲=۱/۲} y = \frac{۱}{۲}e^x + \frac{۱}{۲}e^{-x} + G(x)$$

$$G(x) = x(ax + b)e^x = (ax^۲ + bx)e^x \Rightarrow G'(x) = (ax^۲ + bx + ۲ax + b)e^x \Rightarrow$$

$$G''(x) = (ax^۲ + bx + ۴ax + ۲b + ۲a)e^x$$

$$y'' - y = xe^x \Rightarrow (ax^۲ + bx + ۴ax + ۲b + ۲a)e^x - (ax^۲ + bx + ۲ax + b)e^x \equiv xe^x \Rightarrow$$

$$(۲ax + b + ۲a)e^x \equiv xe^x \Rightarrow ۲ax + b + ۲a \equiv x \Rightarrow ۲a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

$$b + ۲a = ۰ \Rightarrow b = -۱ \Rightarrow G(x) = x\left(\frac{۱}{۲}x - ۱\right)e^x = \frac{۱}{۲}x^۲e^x - xe^x \Rightarrow$$

$$y = \frac{۱}{۲}e^x + \frac{۱}{۲}e^{-x} + \frac{۱}{۲}x^۲e^x - xe^x = \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x} + x^۲e^x) - xe^x$$

مدیریت

۱. اگر داشته باشیم $xy' + y = e^x$، مقدار y کدام است؟ ۱۳۷۹

۱) $y = xe^x + cx$ ۲) $y = \frac{۱}{x}e^x + \frac{c}{x}$ ۳) $y = xe^x + c$ ۴) $y = e^x - x + c$

پاسخ تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۲.

$$x.\frac{dy}{dx} + y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{۱}{x}y = \frac{e^x}{x}$$

$$A = e^{\int \frac{۱}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$y = \frac{c}{x} + \frac{۱}{x}\int x.\frac{e^x}{x}dx = \frac{c}{x} + \frac{۱}{x}\int e^x dx \Rightarrow y = \frac{e}{x} + \frac{e^x}{x}$$

فصل ۱۱

دنباله و سری

دنباله

۱۱ـ۱ اگر در تابع $u_n = f(n)$ دامنه، مجموعه اعداد صحیح غیرمنفی باشد، u_n یک دنباله است. ضابطه تابع یعنی $u_n = f(n)$ موسوم به جمله عمومی یا جمله nام دنباله است، که مشخص‌کننده‌ی قاعده تشکیل جمله‌هاست، در این‌صورت به n مقادیر مختلف ۱ و ۲ و ۳ و ... را نسبت می‌دهیم.

$$\underbrace{u_1 = f(1)}_{\text{جمله اول دنباله}}, \quad \underbrace{u_2 = f(2)}_{\text{جمله دوم دنباله}}, \quad \cdots, \quad \underbrace{u_n = f(n)}_{\text{جمله } n\text{ام دنباله}}$$

به بیان دیگر، دنباله عبارت است از مجموعه زوج‌های مرتبی که به‌صورت $(n, f(n))$ است، که در آن n یک عدد صحیح غیرمنفی است. چون قلمرو همه دنباله‌ها یکی است، برای نمایش دنباله از نماد $\{u_n\}$ هم می‌توان استفاده کرد.

مثال اگر $u_n = \frac{2n}{n+1}$، آنگاه $f(1)$، $f(2)$، $f(3)$ را بیابید.

حل

$$f(1) = 1, f(2) = \frac{4}{3}, f(3) = \frac{3}{2}$$

بنابراین چند تا از زوج‌های مرتب دنباله‌ی f عبارتند از $(1, 1)$ و $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ و $\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

حد یک دنباله

۱۱ـ۲ دنباله $u_n = f(n)$ را درنظر می‌گیریم، بنا به تعریف حد این تابع هنگامی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند برابر L است، یعنی:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

۱۱ـ۳ اگر دنباله‌ای چون $u_n = f(n)$ حد داشته باشد، دنباله هم‌گراست، یعنی:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} f(n) = L$$

۴ـ۱۱ اگر دنباله‌ای چون $u_n = f(n)$ همگرا نباشد، واگراست. به بیان دیگر اگر در رابطه فوق L بی‌نهایت (نامعین) باشد، دنباله واگراست.

مثال دنباله $u_n = \frac{n}{۲n+۱}$ همگراست یا واگرا؟

حل

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{۲n+۱} = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow u_n \text{ همگرا به سمت } \frac{۱}{۲} \text{ است}$$

تست دنباله‌ی $u_n = \frac{[۳n]}{n+۱}$ همگرا به‌کدام عدد است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل گزینه‌ی ۴. بنابر خاصیت جزءصحیح داریم:

$$۳n - ۱ < [۳n] \leqslant ۳n \Longrightarrow \frac{۳n-۱}{n+۱} < \frac{[۳n]}{n+۱} \leqslant \frac{۳n}{n+۱}$$

با استفاده از قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۳n-۱}{n+۱} = \lim_{n\to\infty} \frac{۳n}{n+۱} = ۳ \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{[۳n]}{n+۱} = ۳$$

دنباله‌های خاص

۵ـ۱۱ تعریف: دنباله‌ای چون $\{u_n\}$ موسوم است به:

۱) صعودی اگر به‌ازای هر n داشته باشیم $u_n \leqslant \cdots \leqslant u_۲ \leqslant u_۱$ و یا به‌طور خلاصه $u_n \leqslant u_{n+۱}$.

۲) نزولی اگر به‌ازای هر n داشته باشیم $u_n \geqslant \cdots \geqslant u_۲ \geqslant u_۱$ و یا به‌طور خلاصه $u_n \geqslant u_{n+۱}$.

۳) یکنوا اگر دنباله صعودی یا نزولی باشد.

مثال صعودی یا نزولی بودن دنباله $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}$ را تعیین کنید.

حل

$$u_۱ = \frac{۱}{۲}, u_۲ = \frac{۲}{۳}, u_۳ = \frac{۳}{۴} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳} < \frac{۳}{۴} \Longrightarrow \text{دنباله صعودی است}$$

یا

$$u'_n = \frac{n+۱-n}{(n+۱)^۲} = \frac{۱}{(n+۱)^۲} > ۰ \Longrightarrow \text{دنباله صعودی است}$$

تست دنباله‌ی $u_n = n - \frac{۱}{n}$ دنباله‌ایست:

۱) صعودی و همگرا ۲) صعودی و واگرا ۳) نزولی و همگرا ۴) نزولی و واگرا

حل گزینه‌ی ۲.

$$u_۱ = ۰,\ u_۲ = \frac{۳}{۲},\ u_۳ = \frac{۸}{۳},\ \ldots \Longrightarrow ۰ < \frac{۳}{۲} < \frac{۸}{۳} < \ldots \Longrightarrow \text{دنباله صعودی است}$$

$$u'_n = ۱ + \frac{۱}{n^۲} > ۰ \Longrightarrow \text{دنباله صعودی است}$$

$$u_n = n - \frac{۱}{n} = \frac{n^۲-۱}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \Longrightarrow \text{دنباله واگراست}$$

کران بالا و کران پایین دنباله و دنباله‌ی کران‌دار

۱۱ـ۶ تعریف: عدد c را یک «کران بالای» دنباله $\{u_n\}$ می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n داشته باشیم[۱] $u_n \leqslant c$. و عدد c را یک «کران پایین» دنباله $\{u_n\}$ می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n داشته باشیم[۲] $u_n \geqslant c$.

۱۱ـ۷ تعریف: دنباله‌ای چون $\{u_n\}$ را کران‌دار می‌نامیم اگر و تنها اگر کران بالا و کران پایین داشته باشد.

مثال دنباله‌ی $u_n = \frac{1}{n}$، یا

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

از بالا کران‌دار است، چون همه‌ی جمله‌های دنباله کوچکتر از یا مساوی با ۱ هستند. در واقع، اگر n عدد طبیعی دلخواهی باشد، $n \geqslant 1$، و درنتیجه $u_n = \frac{1}{n} \leqslant 1$، پس ۱ کران بالا برای $\{u_n\}$ است. توجه کنید که دنباله‌ی $\{u_n\}$ از پایین هم کران‌دار است، چون همه‌ی جمله‌های دنباله مثبت‌اند و در نتیجه $n \in N$، $u_n = \frac{1}{n} > 0$، پس ۰ یک کران پایین برای u_n است. بنابراین، دنباله‌ی $\{u_n\}$ کران‌دار است. توجه کنید که ۱ تنها کران بالا برای دنباله نیست. هر عدد بزرگتر از ۱ هم کران بالای این دنباله است. همچنین، هر عدد کوچکتر از ۰ یک کران پایین برای دنباله است.

تست کران بالای دنباله‌ی $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

حل گزینه‌ی ۴.

$$u_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \Longrightarrow u_n < 1$$

تست بزرگترین کران پایین دنباله‌ی $u_n = n^2 - 4n$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) ۴ ۴) ۰

حل گزینه‌ی ۲.

$$u_n = n^2 - 4n = (n-2)^2 - 4 \Longrightarrow u_n \geqslant -4$$

(-4) و اعداد کوچکتر از (-4) کران پایین دنباله‌اند، زیرا جمله‌های دنباله، از این عدد بیشتر می‌باشند و بزرگترین کران پایین دنباله (-4) است.

۱۱ـ۸ چند قضیه‌ی مهم

۱) هر دنباله‌ی کران‌دار یکنوا، همگراست. یعنی دارای یک حد متناهی است.

۲) هر دنباله‌ی یکنوای همگرا، کران‌دار است.

۳) فرض کنید $\{u_n\}$ یک دنباله صعودی و c یک کران بالای آن باشد. در این‌صورت $\{u_n\}$ همگراست و $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant c$.

۴) فرض کنید $\{u_n\}$ یک دنباله نزولی و c یک کران پایین آن باشد، در این‌صورت $\{u_n\}$ همگراست و $\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant c$.

سری

۱۱ـ۹ اگر $\{u_n\}$ دنباله‌ای باشد و $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$، آنگاه دنباله $\{S_n\}$ را یک سری نامحدود و یا سری می‌نامند[۳]. اعداد u_1 و u_2 و u_3 و ... جملات سری نامحدود نام دارند. داریم $S_1 = u_1$ و $S_2 = u_1 + u_2$

---

۱. دراین‌صورت دنباله‌ی $\{u_n\}$ را از بالا کران‌دار می‌نامیم.

۲. دراین‌صورت دنباله‌ی $\{u_n\}$ را از پایین کران‌دار می‌نامیم.

۳. اگر تعداد جملات سری محدود باشد، سری را یک سری محدود نامند.

و ... و $S_k = \sum_{i=1}^{k} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$، "$S_k$" مجموع جزئی kام سری مفروض نام دارد.

مثال دنبالهٔ $\{\frac{1}{n}\}$ نزولی است:

$$\{\frac{1}{n}\} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

سری $\sum \frac{1}{n}$ صعودی است:

$$\left\{\sum \frac{1}{n}\right\} : \underbrace{1}_{S_1} , \underbrace{1+\frac{1}{2}}_{S_2} , \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{S_3} , \ldots$$

۱۰ـ۱۱ اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ سری نامحدود و با مجموع‌های جزئی $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ باشد، آنگاه چنانچه $\lim_{n\to+\infty} S_n$ وجود داشته باشد و برابر با S باشد، می‌گوییم سری مفروض همگراست و S مجموع این سری نامحدود است.

مثال نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ همگراست.

حل

$$S_1 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \quad , \quad S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{6}$$

$$S_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{24} \quad , \quad S_4 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} = \frac{119}{120}$$

به‌نظر می‌رسد که داریم $S_n = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$. چون

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)! - 1}{(m+1)!} = 1$$

بنابراین سری مزبور همگرا به ۱ است و داریم:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

مثال نشان‌دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ همگراست؟

حل

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$s_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, s_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}, \cdots,$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Longrightarrow s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1 \Longrightarrow u_n \text{ همگراست}$$

۱۱ـ۱۱ اگر $\lim_{n\to+\infty} S_n$ وجود نداشته باشد سری واگراست و مجموع ندارد. به بیان دیگر در سری واگرا S برابر بی‌نهایت بوده و یا اصولاً حد S وجود ندارد.

مثال نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ واگراست.

حل

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1-1 = 0,\ S_3 = 1-1+1 = 1,\ S_4 = 1-1+1-1 = 0,\ \ldots$$

پس $\{S_n\}$ دنبالهٔ مجموع‌های جزیی به‌صورت زیر است:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

ودنبالهٔ مزبور واگرا (نوسانی) است.

۱۲ـ۱۱ قاعده‌ی تلسکوپی در سیگما: اگر f تابعی بر مجموعه‌ی اعداد صحیح باشد. آنگاه

$$\sum_{k=1}^{n}(f(k)-f(k+1)) = f(1)-f(n+1)$$

مثال نشان‌دهید سری $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)$، واگراست؟

حل از قاعده‌ی $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ داریم:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+2)-\ln(k+1))$$

$$= \ln(n+2) - \ln 2 \qquad \text{بنابر قاعده‌ی تلسکوپی}$$

$$\sum_{k=}^{\infty}\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}(\ln(n+2)-\ln 2) = \ln\infty - \ln 2 = \infty$$

بنابراین سری مذکور واگراست.

تست سری $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}$:

۱) هم‌گرا به صفر است. ۲) هم‌گرا به ۱ است. ۳) هم‌گرا به $\frac{1}{2}$ است. ۴) واگراست.

حل گزینه‌ی ۳.

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \qquad \text{بنابر قاعده‌ی تلسکوپی}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

سری هارمونیک و سری هندسی

۱۱ـ۱۳ سری که به شکل زیر است، سری هارمونیک (همسازه) نامیده می‌شود.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

سری هارمونیک یک سری واگراست.

۱۱ـ۱۴ سری که به شکل زیر است، سری هندسی نامیده می‌شود.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

r قدر نسبت تصاعد هندسی است و برابر $r = \frac{u_n}{u_{n-1}}$ است.

۱۱ـ۱۵ قضیه: اگر $|r| < 1$، سری هندسی همگرا و به مجموع $\frac{a}{1-r}$ می‌گراید. و اگر $|r| \geqslant 1$، سری هندسی واگراست.

مثال سری $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ همگراست یا واگرا؟

حل

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

یک سری هندسی که $a = 1$ و $r = \frac{1}{2}$ است. سری همگراست زیرا $|r| < 1$ و مجموع سری ۲ است چون $\frac{a}{1-r} = 2$.

تست اگر $s = 4 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \ldots$، دراین‌صورت s کدام است؟

۱) $\frac{16}{5}$ ۲) $\frac{19}{25}$ ۳) $\frac{5}{17}$ ۴) این سری واگراست.

حل گزینه‌ی ۱. یک سری هندسی با $a = 4$ و $r = -\frac{1}{4}$ است. پس:

$$s = \frac{a}{1-r} = \frac{4}{1+\frac{1}{4}} = \frac{16}{5}$$

آزمون جمله nام

۱۱ـ۱۶ اگر سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ است[1]. از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ و یا اگر این حد وجود نداشته باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگراست.

مثال سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{4n+1}$ همگراست یا واگرا؟

---

۱. این قضیه شرط لازم همگرایی است. لازم به تذکر است که اگر $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ نتیجه‌ای نمی‌گیریم و باید به آزمون دیگری متوسل شویم.

حل

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{۲n}{۴n+۱} = \frac{۱}{۲} \neq ۰ \Longrightarrow u_n \text{ واگراست}$$

آزمون چندجمله‌ای

۱۱ـ۱۷ اگر $P(n)$ و $Q(n)$ به‌ترتیب چندجمله‌ای‌های با درجات p و q باشند، $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$، آنگاه:

۱) اگر $q > p+۱$، سری همگراست.

۲) اگر $q \leqslant p+۱$، سری واگراست.

مثال سری $\frac{۱}{۱\times۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + \cdots$ همگراست یا واگرا؟

حل

$$u_n = \frac{۱}{n(n+۱)}, \sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{n(n+۱)} = \sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{n^۲+n} \Longrightarrow P(n)=۱, Q(n)=n^۲+n$$

درجات $P(n)$ و $Q(n)$ به‌ترتیب $p=۰$ و $q=۲$، بنابراین سری همگراست.

آزمون مقایسه حد

۱۱ـ۱۸ فرض کنید $\sum_{n=۱}^{+\infty} u_n$ و $\sum_{n=۱}^{+\infty} v_n$ دو سری مثبت باشند:

۱) اگر $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = L > ۰$، آنگاه یا هر دو سری همگرا هستند یا هر دو واگرایند.

۲) اگر $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = ۰$، و اگر $\sum_{n=۱}^{+\infty} v_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{+\infty} u_n$ همگراست.

۳) اگر $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$، و اگر $\sum_{n=۱}^{+\infty} v_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{+\infty} u_n$ واگراست.

مثال سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{۳n+۱}$ همگراست یا واگرا؟

حل

$$u_n = \frac{۱}{۳n+۱}, v_n = \frac{۱}{n}, \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{۱}{۳n+۱}}{\frac{۱}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{۳n+۱} = \frac{۱}{۳} > ۰$$

بنابراین $\sum_{n=۱}^{+\infty} u_n$ و $\sum_{n=۱}^{+\infty} v_n$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند، اما $\sum_{n=۱}^{+\infty} v_n$ واگراست، در نتیجه سری مفروض واگراست.

آزمون p

۱۱ـ۱۹ در سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱^p}{n} = \frac{۱}{۱^p} + \frac{۱}{۲^p} + \cdots + \frac{۱}{n^p} + \cdots$ که در آن p ثابت دلخواه است:

۱) اگر $p > ۱$، نوع سری همگراست.

۲) اگر $p \leqslant ۱$، نوع سری واگراست.

مثال سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ هم‌گراست یا واگرا؟

حل $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ ، $p = \frac{1}{3} < 1$، بنابراین سری مفروض واگراست.

آزمون دالامبر[1]

۱۱ـ۲۰ در سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ عبارت $L = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ را تشکیل می‌دهیم:

۱) اگر $L < 1$، سری واگراست.

۲) اگر $L < 1$، سری هم‌گراست.

۳) اگر $L = 1$، نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

مثال سری $u_n = \frac{1}{n!}$ هم‌گراست یا واگرا؟

حل

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

در نتیجه u_n هم‌گراست.

سری‌های متناوب

۱۱ـ۲۱ سری‌هایی که جملاتشان به تناوب مثبت و منفی‌اند، سری‌های متناوب نامند، اگر به‌ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n، $u_n > 0$، آنگاه سری:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots$$

و سری:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots + (-1)^{n} u_n + \cdots$$

را سری متناوب گویند.

آزمون سری‌های متناوب

۱۱ـ۲۲ اگر اعداد u_1 و u_2 و u_3 و ... و u_n و ... یک در میان مثبت و منفی باشند و

اولاً: جملات از نظر قدرمطلق نزولی باشند، یعنی $|u_{n+1}| < |u_n|$ یا $|u_1| > |u_2| > |u_3| > \cdots$.

ثانیاً: حد جمله عمومی برابر صفر باشد، یعنی $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

آنگاه سری متناوب $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ هم‌گراست و مجموع جملات آن از جمله اول سری کوچک‌تر است.

---

۱. وقتی در سری‌ها با فاکتوریل مواجه باشیم، بهترین آزمون، آزمون دالامبر است.

مثال سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ همگراست یا واگرا؟

حل داریم $|u_n| = \frac{1}{n}$ بنابراین اولاً جملات از نظر قدرمطلق نزولی است زیرا $\cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$. ثانیاً $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. در نتیجه u_n همگراست.

آزمون نسبت[1]

۱۱ـ۲۳ فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ یک سری نامتناهی که در آن هر u_n ناصفر است، در این‌صورت:

۱) اگر $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < 1$، سری مفروض مطلقاً همگراست.

۲) اگر $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L > 1$ یا اگر $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = +\infty$، سری واگراست.

۳) اگر $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L = 1$، نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

مثال سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$ همگراست یا واگرا؟

حل داریم $u_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{n+1}{2^{n+1}}$ و $u_n = (-1)^n\frac{n}{2^n}$ بنابراین:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \text{سری همگرا} \Longrightarrow \text{سری مطلقاً همگراست}$$

سری‌های توانی

۱۱ـ۲۴ جملات یک سری تاکنون جملات یک دنباله بوده‌اند، یعنی، توابع حقیقی که دامنه آن‌ها اعداد صحیح غیرمنفی بوده‌اند. اکنون فرض می‌کنیم این جملات علاوه بر اینکه توابعی از اعداد صحیح‌اند، توابعی یک‌متغیره، از متغیر مستقل مانند x، هستند. تعریف سری توانی برحسب $(x-a)$، سریی به‌صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

حالت خاصی از سری فوق وقتی به‌دست می‌آید که $a = 0$ است، در این‌صورت سری به‌صورت یک سری توانی برحسب x درمی‌آید که عبارت است از:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} cx^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

موضوع همگرایی و واگرایی چنین سری‌هایی، به‌وضوح، به مقدار واقعی فرض شده برای x بستگی دارد. یک سری توانی برحسب x (یا برحسب $x = 0$) ممکن است به‌ازای تمام مقادیر x همگرا یا به‌ازای هیچ مقدار دیگر x به‌جز $x = 0$ همگرا نباشد و یا ممکن است به‌ازای بعضی از مقادیر x همگرا و برای بقیه واگرا باشد.

---

۱. آزمون نسبت غالباً برای تعیین اینکه یک سری مفروض مطلقاً همگراست یا نه، به‌کار می‌رود.

۱۱ـ۲۵ تعریف: اگر یک سری توانی به‌ازای مجموعه‌ی مقادیر x در فاصله $-R < x < R$ همگرا باشد، در این‌صورت فاصله $-R < x < R$ موسوم به فاصله همگرایی و R شعاع همگرایی است.

۱۱ـ۲۶ نکات مهم:

۱) اگر شعاع همگرای سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ برابر R باشد، فاصله همگرایی یکی از بازه‌های $(-R, R)$، $[-R, R]$، $[-R, R)$، یا $(-R, R]$ است.

۲) اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ برابر R باشد، فاصله همگرایی یکی از بازه‌های $(a-R, a+R)$، $[a-R, a+R]$، $[a-R, a+R)$ یا $(a-R, a+R]$ است.

آزمون دالامبر برای سری توانی

در به‌کار بردن آزمون دالامبر مجبوریم قدرمطلق جملات را درنظر بگیریم، زیرا نمی‌توانیم مطمئن باشیم که همه‌ی جملات سری مثبت هستند.

۱۱ـ۲۷ سری توانی برحسب x باشد، یعنی $u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$، اگر $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$ باشد، در این‌صورت:

۱) اگر $L = 0$، سری به‌ازای جمیع مقادیر x همگراست.

۲) اگر $L \neq 0$، سری به‌ازای جمیع مقادیر x واقع در فاصله $-\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L}$ همگرا و خارج از این فاصله واگراست، نقاط انتهایی نیز باید جداگانه بررسی شود.

۱۱ـ۲۸ سری توانی برحسب $(x-a)$ باشد، یعنی $u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$، اگر $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$ باشد، در این‌صورت:

۱) اگر $L = 0$، سری به‌ازای جمیع مقادیر x همگراست.

۲) اگر $L \neq 0$، سری به‌ازای جمیع مقادیر x واقع در فاصله $a - \frac{1}{L} < x < a + \frac{1}{L}$ همگرا و خارج از این فاصله همگراست، نقاط انتهایی نیز باید جداگانه بررسی شود.

مثال در سری توانی $u_n = \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$، اولاً: فاصله همگرایی را بیابید. ثانیاً: به‌ازای چه مقادیری از x سری توانی همگراست؟

حل

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+2}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|-\frac{n}{n+1}(x-1)\right| = |x-1|$$

بنابراین فاصله همگرایی $0 < x < 2$ است. نقاط انتهایی باید بررسی شود. اگر $x = 0$ باشد سری به‌صورت $u_n = \frac{-1}{n}$ است که با توجه به آزمون p، $(p = 1)$، واگراست. اگر $x = 2$ باشد سری به‌صورت $u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ است و $\lim_{u_n\to+\infty} u_n = 0$، $|u_{n+1}| < |u_n|$ بنابراین سری متناوب همگراست. از این رو سری اصلی به‌ازای $0 < x \leqslant 2$ همگراست.

سری تیلور

۱۱ـ۲۹ سری

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

به سری تیلور f در a موسوم است. در حالت خاص وقتی که $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

است که سری مک‌لورن، نامیده می‌شود.

مثال تابع $f(x) = \ln x$ را به سری تیلور، حول نقطه $x = 1$ بسط دهید.

حل

$$f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \cdots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^2}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

$$f(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}(x-a)^n + \cdots$$

مثال سری مک‌لورن مربوط به e^x را تعیین کنید.

حل

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \cdots, f^{(n)}(x) = e^x$$

در $a = 0$

$$f(0) = e^0 = 1, f''(0) = e^0 = 1, \cdots, f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

تست ضریب x^4 در بسط به‌سری تیلور تابع $y = e^{-x^2}$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل گزینه‌ی ۴.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

بنابراین ضریب $x^۴$ در بسط $e^{-x^۲}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

تست جمله‌ی چهارم بسط تیلور تابع $y = x^۵$ در نقطه‌ی $x = ۱$ کدام است؟

۱) $۱۰(x-۱)^۳$ ۲) $۱۰(x+۱)^۳$ ۳) $۲۰(x-۱)^۳$ ۴) $۶۰(x-۱)^۳$

حل گزینه‌ی ۱.

$$f(x) = x^۵ \Longrightarrow f'(x) = ۵x^۴,\ f^۶(x) = ۲۰x^۳,\ f'''(x) = ۶۰x^۲$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \frac{f'''(a)}{۳!}f(x-a)^۳ + \dots$$

$$f(x) = f(۱) + \frac{f'(۱)}{۱!}(x-۱) + \frac{f''(۱)}{۲!}(x-۱)^۲ + \frac{f'''(۱)}{۳!}(x-۱)^۳ + \dots$$

$$\text{جمله‌ی چهارم} = \frac{۶۰}{۳!}(x-۱)^۳ = ۱۰(x-۱)^۳$$

۱۱ـ۳۰ نکات مهم: در زیر بسط مک‌لورن چند تابع معرفی می‌شود:

$$\sin x = \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{(-۱)^n x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots, R = \infty \quad (۱$$

$$\cos x = \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{(-۱)^n x^{۲n}}{(۲n)!} = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \cdots, R = \infty \quad (۲$$

$$\sin hx = \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \frac{x^۷}{۷!} + \cdots, -\infty < R < +\infty \quad (۳$$

$$\cos hx = \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۶}{۶!} + \cdots, -\infty < R < +\infty \quad (۴$$

$$\sin^{-۱} x = x + \frac{۱}{۲}\frac{x^۳}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\frac{x^۵}{۵} + \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\frac{x^۲}{۷} + \cdots, |x| < ۱ \quad (۵$$

$$\cos^{-۱} x = \frac{\pi}{۲} - \left(x + \frac{۱}{۲}\frac{x^۳}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\frac{x^۵}{۵} + \cdots\right), |x| < ۱ \quad (۶$$

تست‌های فصل ۱۱

۱. کدام یک از گزاره‌های زیر درباره دنباله $\left\{\frac{۴n^۲}{۲n^۲+۱}\right\}$ صادق است؟

۱) هم‌گراست و به ۲ می‌گراید.
۲) واگراست.
۳) هم‌گراست و به ۴ می‌گراید.
۴) واگراست و به ۴ می‌گراید.

۲. دنباله‌ی $u_n = \frac{۲}{۱}, \frac{۳}{۳}, \frac{۴}{۵}, \frac{۵}{۷}, \cdots$:

۱) صعودی است
۲) واگراست
۳) هم‌گراست
۴) هیچ‌کدام

۳. دنباله‌ی $u_n = ۲^{n+۱} - ۲$:

۱) واگراست
۲) هم‌گراست
۳) گاهی صعودی و گاهی نزولی است
۴) نه صعودی و نه نزولی است

۴. بزرگ‌ترین جمله دنباله $u_n = \frac{n^۲}{۲^n}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۹}{۸}$
۴) $\frac{۳۶}{۶۴}$

۵. کدام یک از دنباله‌های زیر هم‌گرا نیست؟

۱) $\{\sqrt{n^۲+۱}-n\}$
۲) $\left\{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۲n}\right\}$
۳) $\left\{\frac{n+(-۱)^n}{\sqrt{n}}\right\}$
۴) $\{e^{-n}\}$

۶. کدام یک از دنباله‌های زیر صعودی است؟

۱) $\{(-۱)^n\}$
۲) $\left\{\frac{۲}{n^۲+۲}\right\}$
۳) $\left\{\frac{n-۴}{۲n+۱}\right\}$
۴) $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$

۷. در دنباله $u_n = \begin{cases} ۲n & n \text{ فرد}، \\ ۲u_{n-۱} & n \text{ زوج}، \end{cases}$ ، $u_۱ + ۳u_۶$ کدام است؟

۱) ۲۰
۲) ۶۲
۳) ۶۰
۴) ۲۴

۸. کدام یک از گزاره‌های زیر درباره دنباله $\left\{\frac{۱+۲(۱۰^n)}{۵+۳(۱۰^n)}\right\}$ صادق است؟

۱) هم‌گراست و به $\frac{۲}{۳}$ می‌گراید
۲) واگراست و به $\frac{۲}{۳}$ می‌گراید
۳) هم‌گراست و به $\frac{۳}{۸}$ می‌گراید
۴) واگراست و به $\frac{۳}{۸}$ می‌گراید

۹. کدام یک از دنباله‌های زیر هم‌گراست؟

۱) $u_n = \frac{\ln n}{n}$
۲) $u_n = \frac{۳n^۲}{e^{۲n}}$
۳) $u_n = \sqrt[n]{n}$
۴) همه موارد ۱ و ۲ و ۳

۱۰. دنباله‌ی $\{u_n\}$ با $u_1 = 3$ و $u_{n+2} = u_{n+1}$ مفروض است، جمله چهارم این دنباله کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۱. سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ مفروض است، مجموع جزئی سوم این سری کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۲. سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$:

۱) هم‌گراست و مجموع سری $\frac{3}{2}$ است.
۲) هم‌گراست و مجموع سری $\frac{2}{3}$ است.
۳) واگراست و مجموع سری $\frac{2}{3}$ است.
۴) واگراست و مجموع سری نامعین است.

۱۳. سری $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \cdots +$:

۱) هم‌گراست به ۱ ۲) واگراست ۳) هم‌گراست به ۲ ۴) هیچ‌کدام

۱۴. مقدار عبارت $S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots +$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱۲

۱۵. مجموع سری $6 + \cdots + \frac{8}{3} + 4 + 6 + \cdots +$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۸ ۳) ۶۴ ۴) ۱۸

۱۶. حد سری $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots +$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) حد ندارد

۱۷. مجموع سری هندسی $\sum_{n=1}^{5} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ کدام است؟

۱) $2\left(\frac{80}{81}\right)$ ۲) $2\left(\frac{121}{81}\right)$ ۳) $2\left(\frac{81}{100}\right)$ ۴) $2\left(\frac{81}{80}\right)$

۱۸. سری $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots +$:

۱) هم‌گراست به $\frac{1}{4}$ ۲) هم‌گراست به $\frac{1}{5}$ ۳) واگراست ۴) هیچ‌کدام

۱۹. برای سری توانی $\frac{1}{2}x - \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{3^2}{8}x^3 - \frac{4^2}{11}x^4 + \cdots +$ جمله عمومی کدام است؟

۱) $\frac{n^2}{3n-1}x^n$ ۲) $(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3n-1}x^n$
۳) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^n$ ۴) $(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2n-1}x^n$

۲۰. جمله دوم بسط مک‌لورن $f(x) = \sin x \cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}x^2$ ۲) $\frac{2}{3}x^2$ ۳) $-\frac{2}{3}x^3$ ۴) $-\frac{1}{2}x^3$

۲۱. تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{۱}{x^۲}} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$ تعریف شده است، سری مک‌لورن مربوط به f کدام است؟

۱) $۰+۰+۰+\cdots$
۲) $۰-۱+۰-۱+\cdots$
۳) $۰+۱+۰+\cdots$
۴) $۱-۱+۱-۱+\cdots$

۲۲. با استفاده از بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\ln(۱-x)$ کدام است؟

۱) $-x-\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}-\cdots$
۲) $x-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}-\frac{x^۴}{۴!}+\cdots$
۳) $x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots$
۴) $x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots$

۲۳. تابع $f(x)=\ln x$ را به سری تیلور، حول نقطه $x=۱$ بسط دهید.

۱) $(x-۱)+\frac{۱}{۲}(x-۱)^۲+\frac{۱}{۳}(x-۱)^۳+\cdots$
۲) $(x-۱)-\frac{۱}{۲!}(x-۱)^۲+\frac{۱}{۳!}(x-۱)^۳+\cdots$
۳) $(x-۱)-\frac{۱}{۲}(x-۱)^۲+\frac{۱}{۳}(x-۱)^۳+\cdots$
۴) $(x-۱)+\frac{۱}{۲!}(x-۱)^۲+\frac{۱}{۳!}(x-۱)^۳+\cdots$

۲۴. با استفاده از سری مک‌لورن تابع $f(x)=a^x$ کدام است؟

۱) $۱-x\ln a+\frac{x^۲}{۲!}\ln^۲ a-\cdots$
۲) $x+x\ln a+x^۲\ln^۲ a+\cdots$
۳) $۱+x\ln a+\frac{x^۲}{۲}\ln^۲ a+\cdots$
۴) $۱+x\ln a+\frac{x^۲}{۲!}\ln^۲ a+\cdots$

۲۵. بسط تابع $f(x,y)=e^{x+y}$ به سری مک‌لورن کدام است؟

۱) $۱+۱!(x+y)+۲!(x+y)+\cdots$
۲) $۱-\frac{۱}{۱!}(x+y)+\frac{۱}{۲!}(x+y)^۲-\cdots$
۳) $۱-۱!(x+y)+۲!(x+y)-\cdots$
۴) $۱+\frac{۱}{۱!}(x+y)+\frac{۱}{۲!}(x+y)^۲+\cdots$

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ۱۱

۱. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۴n^۲}{۲n^۲+۱}\approx\lim_{n\to+\infty}\frac{۴n^۲}{۲n^۲}=۲\Longrightarrow \text{هم‌گراست و به ۲ می‌گراید}$$

۲. گزینه‌ی ۳. هم‌گراست $\Longrightarrow$ $u_n=\frac{۲}{۱},\frac{۳}{۲},\frac{۴}{۵},\cdots,\frac{n+۱}{۲n-۱},\cdots$ ، $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+۱}{۲n-۱}=\frac{۱}{۲}$

۳. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(۲^{n+۱}-۲)=+\infty\Longrightarrow \text{دنباله واگراست}$$

۴. گزینه‌ی ۳. $u_n=\frac{۱}{۲},\frac{۴}{۴},\frac{۹}{۸},\frac{۱۶}{۱۶},\frac{۲۵}{۳۲},\cdots$، بعد از جمله $\frac{۹}{۸}$ جملات نزولی است.

۵. گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^۲+۱}-n)=۰ \Longrightarrow \text{هم‌گراست}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۲n}=e^{۱\times۲}=e^{۲} \Longrightarrow \text{هم‌گراست}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+(-۱)^n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n}}=+\infty \Longrightarrow \text{واگراست}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{e^{-n}}=\frac{۱}{e}=\frac{۱}{۲/۷۱۸}<۱ \Longrightarrow \text{هم‌گراست}$$

۶. گزینه‌ی ۳.

$$u_n=(-۱)^n=-۱,۱,-۱,۱\cdots, \Longrightarrow \text{نه صعودی و نه نزولی}$$

$$u_n=\frac{۲}{n^۲+۲} \Longrightarrow u'_n=\frac{-۲n(۲)}{(n^۲+۲)^۲}=-\frac{۴n}{(n^۲+۲)^۲}<۰ \Longrightarrow \text{نزولی است}$$

$$u_n=\frac{n-۴}{۲n+۱} \Longrightarrow u'_n=\frac{(۲n+۱)-۲(n-۴)}{(۲n+۱)^۲}=\frac{۹}{(۲n+۱)^۲}>۰ \Longrightarrow \text{صعودی است}$$

$$u_n=\frac{۱}{n} \Longrightarrow u'_n=-\frac{۱}{n^۲}<۰ \Longrightarrow \text{نزولی است}$$

۷. گزینه‌ی ۲.

$$u_۱=۲\times۱=۲, u_۶=۲u_۵=۲(۲\times۵)=۲۰ \Longrightarrow u_۱+۳u_۶=۲+(۳\times۲۰)=۶۲$$

۸. گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{۱+۲(۱۰^n)}{۵+۳(۱۰^n)}\right\}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱۰^n(۱۰^{-n}+۱)}{۱۰^n[۵(۱۰^{-n})+۳]}=\frac{۲}{۳} \Longrightarrow \text{هم‌گراست}$$

۹. گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{H}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{۱}{n}}{۱}=۰ \Longrightarrow \text{هم‌گراست}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۳n^۲}{e^{۲n}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{n\to+\infty}\frac{۶n}{۲e^{۲n}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{n\to+\infty}\frac{۶}{۴e^{۲n}}=۰ \Longrightarrow \text{هم‌گراست}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{۱}{n}}=\infty^{۰} \Longrightarrow \exp\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{۱}{n}}{۱}=۰ \Longrightarrow \text{هم‌گراست}$$

۱۰. گزینه‌ی ۳.

$$u_۱=۳, u_۲=u_۱+۲=۵, u_۳=u_۲+۲=۷, u_۴=u_۳+۲=۹$$

۱۱. گزینه‌ی ۴.

$$S_۱=u_۱=\frac{۱}{۱\times۲}=\frac{۱}{۲}, S_۲=S_۱+u_۲=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\times۳}=\frac{۲}{۳},$$

$$S_۳=S_۲+u_۳=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳\times۴}=\frac{۳}{۴}$$

۱۲. گزینه‌ی ۱.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdot s + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots \Longrightarrow a = 1, r = \frac{1}{3} < 1 \Longrightarrow \text{سری هم‌گرا}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

۱۳. گزینه‌ی ۲.

$$u_n = \frac{2^n - 1}{2^n}, \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{واگراست}$$

۱۴. گزینه‌ی ۳. عبارت داده شده حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی با $a = 2$ و $r = \frac{1}{3}$ است، بنابراین:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$$

۱۵. گزینه‌ی ۴. این سری یک سری هندسی نزولی نامتناهی با $a = 6$ و $r = \frac{2}{3}$ است بنابراین $S = \frac{a}{1-r} = \frac{6}{\frac{1-2}{3}} = 18$.

۱۶. گزینه‌ی ۲.

$$S_1 = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} = \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

۱۷. گزینه‌ی ۲.

$$\sum_{n=1}^{5} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 2\left(\frac{121}{81}\right)$$

۱۸. گزینه‌ی ۱. سری داده شده از نوع هندسی است با $a = \frac{1}{5}$ و $r = \frac{1}{5} < 1$ و در نتیجه هم‌گراست به $\frac{a}{1} - r = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$.

۱۹. گزینه‌ی ۲. به‌ازای $n = 2$ گزینه‌های داده شده را امتحان می‌کنیم:

۱) $\frac{2^2}{3\times 2-1}x^2 = \frac{2^2}{5}x^2$ ۲) $(-1)^{2+1}\frac{2^2}{3\times 2-1}x^2 = -\frac{2^2}{5}x^2$

۳) $\frac{(-1)^{2+1}}{2\times 2-1}x^2 = -\frac{1}{3}x^2$ ۴) $(-1)^{2+1}\frac{2^2}{2\times 2-1}x^2 = -\frac{2^2}{3}x^2$

۲۰. گزینه‌ی ۳. داریم $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$، از بسط $\sin t$ استفاده کرده و به‌جای t مقدار $2x$ قرار می‌دهیم:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \Longrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{2}\frac{(2x)^3}{3!} + \frac{1}{2}\frac{(2x)^5}{5!} - \cdots$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = x - \frac{2}{3}x^3 + \cdots$$

۲۱. گزینه‌ی ۱. سری مک‌لورن

$$f(x)=f(\circ)+f'(\circ)x+\frac{f''(\circ)}{۲!}x^{۲}+\cdots+\frac{f^{(n)}(\circ)}{n!}x^{n}+\cdots$$

برای محاسبه $f'(\circ)$، از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{e^{\frac{-۱}{x^{۲}}}-\circ}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{\frac{۱}{x}}{e^{\frac{۱}{x^{۲}}}}=\frac{+\infty}{+\infty}\xrightarrow{H}\lim_{x\to\circ}\frac{-\frac{۱}{x^{۲}}}{e^{\frac{۱}{x^{۲}}}\left(-\frac{۲}{x^{۳}}\right)}=\lim_{x\to\circ}\frac{x}{۲e^{\frac{۱}{x^{۲}}}}=\circ$$

با استفاده از تعریف مشتق و قاعده هوپیتال، برای همه‌ی مشتق‌ها مقدار ۰ به‌دست می‌آید لذا به‌ازای هر n، $f^{(n)}(\circ)=\circ$، پس سری مک‌لورن تابع مفروض به‌صورت $\cdots+\circ+\circ+\circ$ است.

۲۲. گزینه‌ی ۱. سری مک‌لورن

$$f(x)=f(\circ)+f'(\circ)x+\frac{f''(\circ)}{۲!}x^{۲}+\cdots+\frac{f^{(n)}(\circ)}{n!}x^{n}+\cdots$$

$$f(x)=\ln(۱-x)\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{۱-x}\Rightarrow f''(x)=-\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}\Rightarrow f'''(x)=-\frac{۲}{(۱-x)^{۳}}\Rightarrow\cdots$$

$$f(\circ)=\circ, f'(\circ)=-۱, f''(\circ)=-۱, f'''(\circ)=-۲$$

$$f(x)=\circ+(-۱)x+\frac{(-۱)}{۲!}x^{۲}+\frac{(-۲)}{۳!}x^{۳}+\cdots=-x-\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۳}}{۳}-\cdots$$

۲۳. گزینه‌ی ۳. سری تیلور:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲}+\cdots$$

$$f(x)=\ln x\Longrightarrow f'(x)=\frac{۱}{x}\Longrightarrow f''(x)=-\frac{۱}{x^{۲}}\Longrightarrow f'''(x)=\frac{۲}{x^{۳}}\Longrightarrow\cdots$$

$$f(۱)=\circ, f'(۱)=۱, f''(۱)=-۱, f'''(۱)=۲,\cdots$$

$$f(x)=\circ+۱(x-۱)-\frac{۱}{۲}(x-۱)^{۲}+\frac{۱}{۳}(x-۱)^{۳}-\cdots=(x-۱)-\frac{۱}{۲}(x-۱)^{۲}+\cdots$$

۲۴. گزینه‌ی ۴. سری مک‌لورن:

$$f(x)=f(\circ)+f'(\circ)x+\frac{f''(\circ)}{۲!}x^{۲}+\cdots+\frac{f^{(n)}(\circ)}{n!}x^{n}+\cdots$$

$$f(x)=a^{x}\Longrightarrow f'(x)=a^{x}\ln a\Longrightarrow f''(x)=a^{x}\ln^{۲}a\Longrightarrow f'''(x)=a^{x}\ln^{۳}a\Longrightarrow\cdots$$

$$f(\circ)=a^{\circ}=۱, f'(\circ)=a^{\circ}\ln a=\ln a, f''(\circ)=a^{\circ}\ln^{۲}a=\ln^{۲}a, f'''(\circ)=a^{\circ}\ln^{۳}a=\ln^{۳}a,\cdots$$

$$f(x)=۱+x\ln a+\frac{x^{۲}}{۲!}\ln^{۲}a+\cdots$$

۲۵. گزینه‌ی ۴. بسط تابع $f(z)=e^{z}$ را به سری مک‌لورن می‌نویسیم:

$$f(z)=e^{z}=۱+\frac{z}{۱!}+\frac{z^{۲}}{۲!}+\frac{z^{۳}}{۳!}+\cdots$$

در رابطه‌ی بالا z را به $x+y$ بدل می‌کنیم:

$$e^{x+y}=۱+\frac{(x+y)}{۱!}+\frac{(x+y)^{۲}}{۲!}+\frac{(x+y)^{۳}}{۳!}+\cdots$$

فصل ۱۲

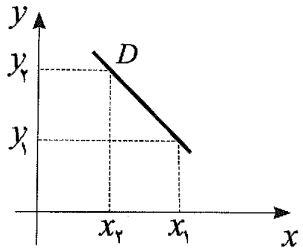
کاربرد ریاضیات

تابع تقاضا

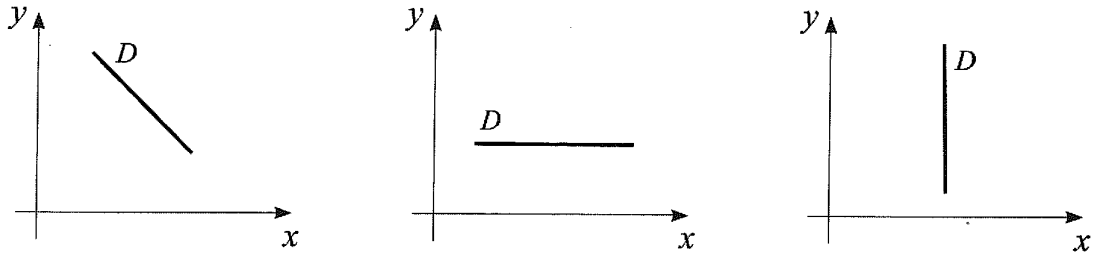
۱ـ۱۲ اگر مقدار تقاضا را با x و قیمت را با y نشان دهیم، هر اندازه قیمت کالایی اضافه شود، تقاضا برای خرید کاهش می‌یابد و برعکس هر اندازه قیمت کالایی کاسته شود، تقاضا برای خرید افزایش می‌یابد. اگر تابع تقاضا را با D نشان دهیم، داریم:

$$x = D(y)$$

در حالت کلی اگر $y_1 > y_2$ ، آنگاه $x_1 < x_2$. نتیجه می‌گیریم که تابع تقاضا یک تابع نزولی است.



۲ـ۱۲ در اکثر حالات، شیب منحنی تقاضا منفی است، یعنی زمانی که قیمت افزایش یابد، مقدار تقاضا کاهش پیدا می‌کند و هنگامی که قیمت کاهش پیدا کند، مقدار تقاضا افزایش می‌یابد. در حالت‌های معینی، شیب منحنی تقاضا ممکن است صفر باشد. مانند حالتی که قیمت بدون توجه به تقاضا ثابت بماند. در برخی از حالت‌ها، ممکن است شیب، تعریف نشده (نامعین) باشد. مانند حالتی که تقاضا بدون توجه به قیمت، ثابت بماند. شکل‌های زیر این سه حالت را نشان می‌دهد.



اگر تابع تقاضا خطی باشد، غالباً شیب آن منفی است.

مثال یک سازمان تولیدی، با تجزیه و تحلیل فروش خود به این نتیجه رسید، که اگر ۲ تومان از قیمت یک واحد کالای تولیدی خود کم کند، ۲۰٪ خرید مشتریان افزایش پیدا می‌کند. اگر قیمت ۱۲ تومان باشد، سازمان تولیدی ۵۰۰ واحد می‌فروشد. معادله‌ی تقاضای این کالا را تعیین کنید.

حل

$$(x_1 = ۵۰۰, y_1 = ۱۲) \Longrightarrow (x_2 = ۵۰۰ + ۰/۲ \times ۵۰۰ = ۶۰۰, y_2 = ۱۰)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Longrightarrow y - ۱۲ = \frac{-۲}{۱۰۰}(x - ۵۰۰)$$

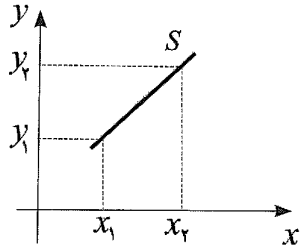
$$\Longrightarrow y = -\frac{۱}{۵۰}x + ۲۲ \qquad \text{تابع تقاضا}$$

تابع عرضه

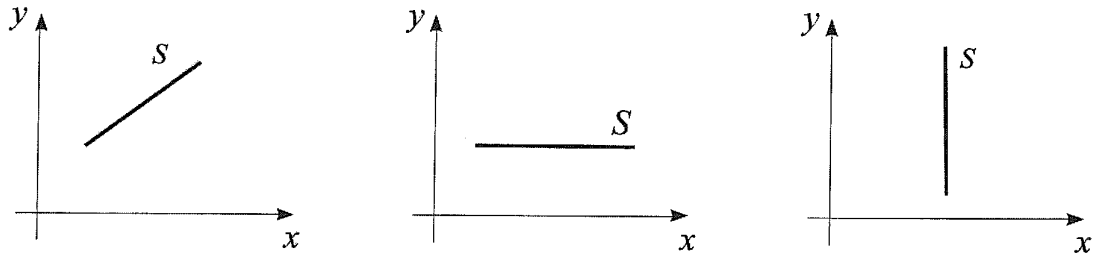
۱۲ـ۳ اگر مقدار عرضه را با x و قیمت را با y نشان دهیم، هر اندازه قیمت کالایی اضافه شود، عرضه برای فروش افزایش می‌یابد و برعکس هر اندازه قیمت کالایی کاسته شود، عرضه برای فروش کاهش می‌یابد. اگر تابع عرضه را با S نشان دهیم، داریم:

$$\boxed{x = S(y)}$$

در حالت کلی اگر $y_1 < y_2$، آنگاه $x_1 < x_2$. نتیجه می‌گیریم که تابع عرضه یک تابع صعودی است.



۱۲ـ۴ در اکثر حالات، شیب منحنی عرضه مثبت است، یعنی زمانی که قیمت افزایش یابد، مقدار عرضه افزایش پیدا می‌کند و هنگامی که قیمت کاهش پیدا کند، مقدار عرضه نیز کم می‌شود. در حالت‌های معینی، شیب منحنی عرضه ممکن است صفر باشد. قیمت ثابت بدون توجه به میزان عرضه، این حالت را پیش می‌آورد. در برخی از حالت‌ها، ممکن است شیب، تعریف نشده (نامعین) باشد، مانند حالتی که عرضه بدون توجه به قیمت ثابت بماند. شکل‌های زیر این سه حالت را نشان می‌دهد.



اگر تابع عرضه خطی باشد، غالباً شیب آن مثبت است.

مثال یک سازمان تولیدی تعداد ۵۰۰۰ شکلات با قیمت ۵ تومان برای هر واحد عرضه می‌کند. اگر قیمت هر عدد ۳/۵ تومان باشد، ۲۰۰۰ واحد عرضه می‌شود. معادله‌ی تابع عرضه برای این واحد تولیدی را به‌دست آورید.

حل

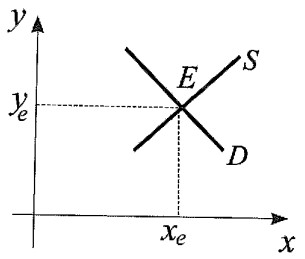
$$(x_۱ = ۵۰۰۰, y_۱ = ۵), (x_۲ = ۲۰۰۰, y_۲ = ۳/۵)$$

$$y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱) \Longrightarrow y - ۵ = \frac{-۱/۵}{-۳۰۰۰}(x - ۵۰۰۰)$$

$$\Longrightarrow y = \frac{x}{۲۰۰۰} + \frac{۵}{۲} \quad \text{تابع عرضه}$$

تعادل بازار

۵ـ۱۲ محل تلاقی منحنی‌های عرضه و تقاضا، «نقطه‌ی تعادل بازار» است که در شکل زیر آن را با E نشان داده‌ایم. از لحاظ جبری، مقدار و قیمت تعادل به‌وسیله‌ی حل دستگاه معادله‌های عرضه و تقاضا به‌دست می‌آید.



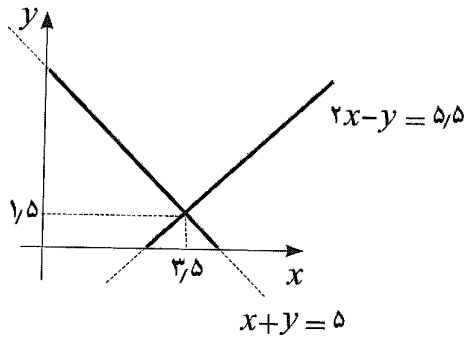
۶ـ۱۲ در حالت کلی، تعادل، زمانی بامعناست که x و y هردو مثبت یا صفر باشند، یعنی منحنی‌های عرضه و تقاضا یکدیگر را در ربع اول قطع کنند و این حالت، زمانی و فقط زمانی رخ می‌دهد که عرض نقطه‌ی تلاقی منحنی تقاضا، بیشتر یا مساوی عرض نقطه‌ی تلاقی منحنی عرضه با محور yها بوده و همچنین طول نقطه‌ی تلاقی منحنی تقاضا بیشتر یا مساوی با طول نقطه‌ی تلاقی منحنی عرضه با محور xها باشد.[۱]

مثال نقطه‌ی تعادل منحنی‌های عرضه و تقاضای زیر را بیابید و شکل آن را رسم کنید.

منحنی عرضه: $x + y = ۵$ منحنی تقاضا: $۲x - y = ۵/۵$

حل

$$\begin{cases} x + y = ۵ \\ ۲x - y = ۵/۵ \end{cases} \Longrightarrow ۳x = ۱۰/۵ \Longrightarrow x = ۳/۵, y = ۱/۵$$



۱. منحنی‌های عرضه و تقاضا همواره خط نیستند، بلکه ممکن است به‌صورت منحنی‌های گوناگونی باشند و یا نقطه‌ی تعادل وجود نداشته باشد.

مثال در معادلات عرضه و تقاضای زیر نقطه‌ی تعادل بازار را بیابید.

حل

منحنی عرضه: $y = ۲ + ۲x$ منحنی تقاضا: $y = ۱۰ - x^۲$

$$y = ۲ + ۲x \Longrightarrow ۲ + ۲x = ۱۰ - x^۲ \Longrightarrow x^۲ + ۲x - ۸ = ۰$$

$$\Longrightarrow (x+۴)(x-۲) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x = -۴ & \text{غ ق ق} \\ x = ۲ & \text{ق ق} \end{cases}$$

به ازای $x = ۲$ داریم $y = ۲ + ۴$ یا $y = ۶$.

تابع درآمد

۱۲ـ۷ تولیدکننده‌ای کالای A را به مقدار x تولید می‌کند. تابع تقاضا برای این تولیدکننده، $y = D(x)$ است که در آن y قیمت است و مقدار فروش، که آن را «دریافت و یا درآمد کل» می‌نامیم، برابر است با:

$$TR = x \cdot y = x \cdot D(x)$$

در حالت کلی $TR(۰) = ۰$ است، یعنی منحنی درآمد کل از مبداء می‌گذرد.

۱۲ـ۸ «درآمد متوسط» ، در واقع درآمد حاصل از فروش یک واحد است که همان تابع تقاضاست:

$$AR = \frac{TR}{x} = \frac{x \cdot D(x)}{x} = D(x)$$

۱۲ـ۹ «درآمد نهایی» با مشتق تابع درآمد کل برابر است:

$$MR = \frac{dTR}{dx}$$

MR نرخ تغییر درآمد کل است، یعنی اگر مقدار تقاضای یک واحد تغییر کند، درآمد کل به اندازه‌ی MR تغییر می‌کند.

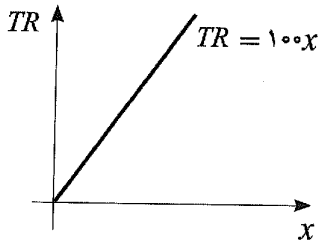
۱۲ـ۱۰ روشن است که با داشتن درآمد نهایی می‌توانیم درآمد کل را به روش انتگرال‌گیری به‌دست آوریم:

$$TR = \int MR\, dx$$

برای تعیین یک تابع درآمد کل منحصر به فرد، یک شرط اولیه لازم است. در بسیاری از حالات درآمد کل به ازای $x = ۰$ برابر صفر است، یعنی $TR(۰) = ۰$.

مثال یک کارخانه‌دار محصول خود را هر عدد ۱۰۰ ریال می‌فروشد، درآمد کل برای فروش ۵۰۰۰ واحد تولید شده چه مقدار است؟ معادله‌ی تابع درآمد را تعیین کنید. شکل تابع درآمد را رسم کنید.

$$TR = x.y \Longrightarrow TR = ۱۰۰x$$
$$x = ۵۰۰۰ \Longrightarrow TR = ۱۰۰ \times ۵۰۰۰ = ۵۰۰۰۰۰$$



مثال در یک شرکت، معادله‌ی تقاضا برای کالایی خاص به صورت $x = ۲۰۰ - ۲y$ است که در آن x تعداد واحد کالایی است که مصرف‌کنندگان در یک ماه خریداری می‌کنند و y (برحسب ریال) قیمت هر واحد کالا است.

۱) معادله‌ی درآمد را به‌دست آورید و رسم کنید.

۲) تابع درآمد متوسط و درآمد نهایی را تعیین کنید و رسم کنید.

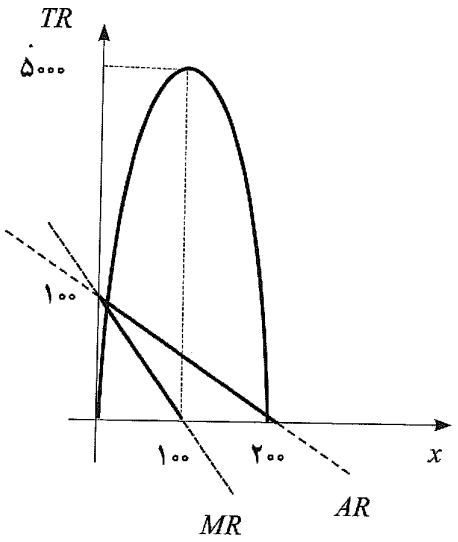
حل

۱)

$$x = ۲۰۰ - ۲y \Longrightarrow ۲y = ۲۰۰ - x \Longrightarrow y = ۱۰۰ - \frac{۱}{۲}x$$
$$TR = x.y = x\left(۱۰۰ - \frac{۱}{۲}x\right) \Longrightarrow TR = ۱۰۰x - \frac{۱}{۲}x^{۲}$$

۲)

$$AR = \frac{TR}{x} = \frac{۱۰۰x - \frac{۱}{۲}x^{۲}}{x} \Longrightarrow AR = ۱۰۰ - \frac{۱}{۲}x$$
$$MR = \frac{dTR}{dx} \Longrightarrow MR = ۱۰۰ - x$$



مثال اگر تابع درآمد نهایی به صورت $MR = ۱ + ۲x - x^۲$ باشد، با در نظرگرفتن $c = ۰$، تابع درآمد کل و تابع تقاضا را به‌دست آورید.

حل

$$TR = \int MR dx = \int (۱ + ۲x - x^۲) dx \Longrightarrow TR = x + x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳ + c$$

$$c = ۰ \Longrightarrow TR = x + x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳ \quad \text{تابع درآمد کل}$$

$$TR = x.y \Longrightarrow x + x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳ = xy \Longrightarrow x\left(۱ + x - \frac{۱}{۳}x^۲\right) = xy$$

$$\Longrightarrow y = ۱ + x - \frac{۱}{۳}x^۲ \quad \text{تابع تقاضا}$$

مثال در یک شرکت تولیدی، y قیمت هر واحد کالا و x تعداد واحد کالاست. معادله‌ی تقاضا آن به صورت $x = ۲۴۰ - ۱۵y$ است.

۱) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین درآمد به‌دست آید؟

۲) بیشترین درآمد قابل حصول شرکت را تعیین کنید.

حل

$$= ۲۴۰ - ۱۵y \Longrightarrow ۱۵y = ۲۴۰ - x \Longrightarrow y = ۱۶ - \frac{۱}{۱۵}x$$

$$TR = x.y = x\left(۱۶ - \frac{۱}{۱۵}x\right) = ۱۶x - \frac{۱}{۱۵}x^۲$$

۱)

$$\frac{dTR}{dx} = ۰ \Longrightarrow ۱۶ - \frac{۲}{۱۵}x = ۰ \Longrightarrow x = ۱۲۰ \quad \text{(تعداد واحد کالا)}$$

$$x = ۱۲۰ \Longrightarrow y = ۱۶ - \frac{۱}{۱۵} \times ۱۲۰ \Longrightarrow y = ۸ \quad \text{(قیمت کالا)}$$

۲)

$$x = ۱۲۰, y = ۸ \Longrightarrow TR = x.y = ۱۲۰ \times ۸ = ۹۶۰ \quad \text{(بیشترین درآمد)}$$

تابع هزینه‌ی کل

۱۱ـ۱۲ در حالت کلی هزینه از دو بخش ثابت و متغیر تشکیل شده است. «هزینه‌ی ثابت» با تغییر سطح تولید ثابت می‌ماند و عموماً شامل هزینه‌هایی مانند بهره، اجاره، استهلاک کارخانه و لوازم آن است. این هزینه را با FC نشان می‌دهیم. «هزینه‌ی متغیر» با سطح تولید تغییر می‌کند و شامل پرداخت به نیروی کار، مواد اولیه و غیره می‌باشد. این هزینه را با VC نمایش می‌دهیم. اگر TC هزینه کل تولید و بازاریابی x واحد از یک کالا باشد و فرض شود که تنها تابعی از x است. معادله‌ی آن

$$\boxed{TC = FC + VC}$$

است. در حالت کلی منحنی هزینه‌ی کل دارای خواص زیر است:

۱) اگر تولید صفر شود، هزینه‌ی کل صفر یا مثبت است. یعنی داریم $TC(۰) \geqslant ۰$. اگر داشته باشیم $TC(۰) > ۰$ مقدار $TC(۰)$ هزینه‌ی ثابت تولید است.

۲) هزینه‌ی کل با افزایش مقدار تولید x افزایش می‌یابد، بنابراین $TC'(x)$ همواره مثبت است.

۳) هزینه‌ی کل تولید به‌ازای مقادیر زیادی از تولید هر کالا به نقطه‌ای می‌رسد که از آن به بعد با نرخ صعودی افزایش می‌یابد، از این‌رو تقعر منحنی هزینه به سمت بالاست، یعنی $TC''(x) > ۰$.

۱۲ـ۱۲ «هزینه‌ی متوسط»، هزینه‌ی یک واحد از کالای بالا است و برابر است با:

$$AC = \frac{TC}{x}$$

۱۲ـ۱۳ «هزینه نهایی» با مشتق تابع هزینه‌ی کل برابر است:

$$MC = \frac{dTC}{dx}$$

MC نرخ تغییر هزینه‌ی کل است، یعنی اگر مقدار تولید یک واحد تغییر کند، هزینه‌ی کل به‌اندازه‌ی MC تغییر می‌کند.

۱۲ـ۱۴ روشن است که با داشتن هزینه نهایی می‌توانیم هزینه‌ی کل را با روش انتگرال‌گیری به‌دست آوریم.

$$TC = \int MC\,dx$$

مثال فرض می‌کنیم، هزینه‌ی ثابت برای تولید یک کالا، ۴۵۰۰۰ تومان، و هزینه‌ی متغیر ۴۰٪ فروش و قیمت هر واحد ۱۵ تومان باشد. معادله‌ی هزینه‌ی کل را تعیین کنید.

حل

$$FC = ۴۵۰۰۰ \ , \ \text{فروش} = TR = ۱۵x \ , \ VC = ۰/۴ \times ۱۵x = ۶x$$
$$TC = FC + VC \Longrightarrow TC = ۴۵۰۰۰ + ۶x$$

مثال تابع هزینه‌ی کل به صورت $TC = x^۲ + ۴x + ۴$، که در آن x مقدار تولید است. به‌ازای چه مقدار از تولید، هزینه نهایی و متوسط با هم برابرند؟

حل

$$AC = \frac{TC}{x} = \frac{x^۲ + ۴x + ۴}{x} \Longrightarrow AC = x + ۴ + \frac{۴}{x}$$
$$MC = \frac{dTC}{dx} = ۲x + ۴$$

هزینه‌ی نهایی و هزینه‌ی متوسط با هم برابرند، پس:

$$MC = AC \Longrightarrow ۲x + ۴ = x + ۴ + \frac{۴}{x} \Longrightarrow x = \frac{۴}{x} \Longrightarrow x^۲ = ۱۶ \Longrightarrow \begin{cases} x = ۴ & \text{ق ق} \\ x = -۴ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

مثال اگر تابع هزینه نهایی بنگاهی $MC = ۲x + ۶$ و هزینه‌ی ثابت $FC = ۱۰۰$ فرض شود، هزینه‌ی کل به ازای $x = ۵$ را تعیین کنید.

حل

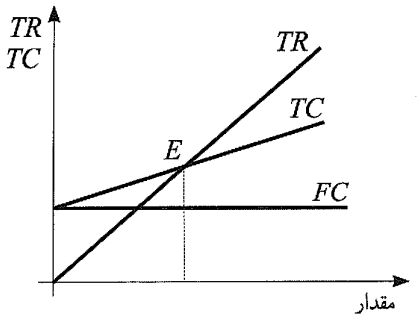
$$TC = \int MC dx = \int (۲x + ۶)dx \Longrightarrow TC = x^۲ + ۶x + c$$

$$TC(۰) = ۱۰۰ \Longrightarrow ۰ + ۰ + c = ۱۰۰ \Longrightarrow c = ۱۰۰$$

$$TC = x^۲ + ۶x + ۱۰۰ \overset{x=۵}{\Longrightarrow} TC = ۲۵ + ۳۰ + ۱۰۰ \Longrightarrow TC = ۱۵۵$$

تحلیل سر به سر

۱۵ـ۱۲ «نمودار سر به سر»، عموماً جهت تصمیم‌گیری درباره‌ی قیمت و میزان تولید در بازرگانی و اقتصاد به‌کار می‌رود. نمودار سر به سر در شکل زیر نشان داده شده است.



۱۶ـ۱۲ در شکل، خط TR، درآمد کل یا فروش کل، از مبدأ می‌گذرد و شیب آن برابر است با قیمت فروش یک واحد، با این فرض که قیمت برای فروش هر تعداد از کالا ثابت است. خط مستقیم FC نمایش هزینه‌ی ثابت است. این خط مستقیم، که شیب آن نیز صفر است، محور yها را در نقطه‌ای به اندازه‌ی هزینه‌ی ثابت (یعنی نقطه‌ای که تولید صفر است) قطع می‌کند. خط TC نمایش هزینه‌ی کل، و تلاقی آن با محور yها، به اندازه‌ی هزینه‌ی ثابت است و شیب آن برابر با افزایش هزینه‌ی متغیر به‌ازای افزایش هر واحد تولید است.

۱۷ـ۱۲ «نقطه‌ی سربه‌سر» نقطه‌ای است که میزان درآمد کل برابر هزینه‌ی کل است. یعنی

$$\boxed{TR = TC}$$

این نقطه نشان‌دهنده‌ی سر به سر بودن کامل مقدار کالا برای تولیدکننده است، یعنی در این نقطه، فروش، کلِ هزینه‌ها را می‌پوشاند.

مثال فرض کنیم هزینه‌ی ثابت تولید برای یک کالا ۴۵۰۰۰ تومان باشد و هزینه‌ی متغیر ۶۰٪ فروش و قیمت فروش هر واحد ۲۰ تومان باشد، نقطه‌ی سر به سر را تعیین کنید.

حل

$$TR = y.x \Longrightarrow TR = ۲۰x$$
$$TC = FC + VC \Longrightarrow TC = ۴۵۰۰۰ + ٪۶۰ \times ۲۰x \Longrightarrow TC = ۴۵۰۰۰ + ۱۲x$$

پس در نقطه‌ی سر به سر داریم:

$$TR = TC \Longrightarrow ۲۰x = ۴۵۰۰۰ + ۱۲x \Longrightarrow ۸x = ۴۵۰۰۰ \Longrightarrow x = ۵۶۲۵$$

مثال اگر تابع هزینه‌ی کل $TC = ۲x^۲ + ۳x + ۸$ و تابع تقاضا $y = -x + ۱۷$ باشد که در آن x مقدار و y قیمت است، نقطه‌ی سر به سر را تعیین کنید.

حل

$$TR = y.x = (-x + ۱۷)x \Longrightarrow TR = -x^۲ + ۱۷x$$

پس در نقطه‌ی سربه‌سر داریم.

$$TR = TC \Longrightarrow -x^۲ + ۱۷x = ۲x^۲ + ۳x + ۸ \Longrightarrow ۳x^۲ - ۱۴x + ۸ = ۰$$
$$\Longrightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a} = \frac{۷ \pm \sqrt{۴۹ - ۲۴}}{۳} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

مثال اگر تابع هزینه‌ی کل $TC = ۱۰x + ۵$ و درآمد کل $TR = e^{۲x} + ۱۰x$ باشد، در نقطه‌ی سربه‌سر مقدار x را تعیین کنید.

حل

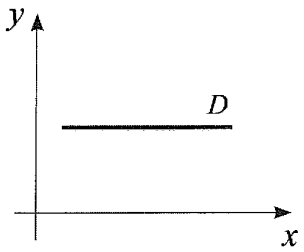
$$TR = TC \Longrightarrow e^{۲x} + ۱۰x = ۱۰x + ۵ \Longrightarrow e^{۲x} = ۵ \Longrightarrow ۲x = \ln ۵$$
$$\Longrightarrow x = \frac{۱}{۲} \ln ۵ \Longrightarrow x = \ln \sqrt{۵}$$

کشش

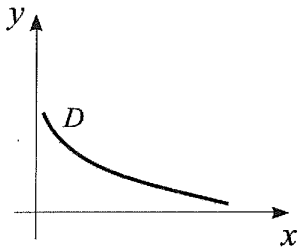
۱۲ـ۱۸ در تئوری اقتصاد، کشش غالباً در مورد حساسیت تقاضا برای یک کالا در برابر قیمت آن می‌باشد. فرض می‌کنیم $x = D(y)$ تابع تقاضا باشد، که در آن y، قیمت و x، مقدار می‌باشد. طبق تعریف کشش x نسبت به y برابر است با:

$$\frac{Ex}{Ey} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{y}{x} \quad \text{یا} \quad \frac{Ex}{Ey} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}$$

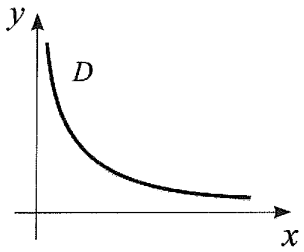
چون شیب منحنی تقاضا منفی است، لذا برای تابع تقاضا $\eta \leqslant ۰$ است. از طرفی چون کشش به واحدی بستگی ندارد، می‌توان حساسیت تقاضا نسبت به تغییر قیمت برای کالاهای مختلف را با یکدیگر مقایسه کرد. همانطورکه در شکل نشان داده شده است، منحنی‌های تقاضا کشش‌های مختلفی دارند.



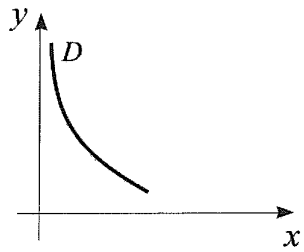
کاملاً با کشش $(\eta = -\infty)$



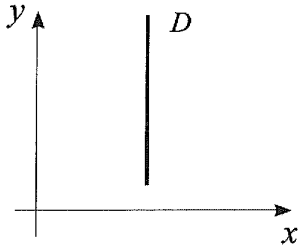
با کشش $(\eta < -1)$



کشش واحد $(\eta = -1)$



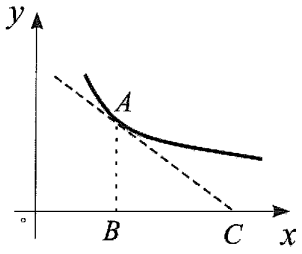
کم کشش $(-1 < \eta < 0)$



کاملاً بی کشش واحد $(\eta = 0)$

توجه شود که کشش به‌طورکلی در بُرد یک تابع، ثابت نیست.

۱۹ـ۱۲ می‌توان با داشتن تابع تقاضا، از روی شکل نیز کشش را به‌دست آورد. شکل زیر را ملاحظه کنید.



طبق تعریف،

$$\frac{Ex}{Ey} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{y}{x}$$

بدیهی است که

$$\frac{Ex}{Ey} = -\frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{OB} = -\frac{BC}{OB}$$

یعنی $-\frac{BC}{OB}$، کشش تقاضای x نسبت به قیمت y است.

مثال تابع تقاضا برای کالایی خاص برابر $x = ۱۰ - ۵y^۲$ است. کشش کمانی را در نقطه‌ی $(x = ۵, y = ۱)$ و با افزایش قیمت ۱۰٪، تعیین کنید.

حل

$$y_۱ = ۱ \Longrightarrow y_۲ = ۱ + (٪۱۰ \times ۱) = ۱/۱ \Longrightarrow \Delta y = ۰/۱$$

$$x_۱ = ۵ \Longrightarrow x_۲ = ۱۰ - ۵ \times ۱/۱^۲ = ۳/۹۵ \Longrightarrow \Delta x = -۱/۰۵$$

$$\frac{Ex}{Ey} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{y_۱}{x_۱} = \frac{-۱/۰۵}{۰/۱} \times \frac{۱}{۵} = -۲/۱$$

مثال اگر تابع تقاضای کالایی $x = ۱۰ - y^۲$ باشد، کشش تقاضا نسبت به قیمت در نقطه‌ی $y = ۳$ را تعیین کنید.

حل

$$y = ۳ \Longrightarrow x = ۱۰ - ۹ \Longrightarrow x = ۱$$
$$\frac{Ex}{Ey} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x} = -۲y \times ۳ = -۶y$$
$$\frac{Ex}{Ey}\Big|_{y=۳} = -۶ \times ۳ = -۱۸$$

مثال تابع تقاضا کالایی خاص به‌صورت $x = \frac{۱}{y^m}$ است. کشش تقاضا به قیمت را برای این تابع تعیین کنید.

حل

$$x = \frac{۱}{y^m} \Longrightarrow x = y^{-m}$$
$$\frac{Ex}{Ey} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x} = -my^{-m-۱} \times \frac{y}{y^{-m}} = -my^{-m-۱} \times y^{۱+m} \Longrightarrow \frac{Ex}{Ey} = -m$$

همانطورکه ملاحظه می‌شود، کشش این تابع ثابت است.

تابع درآمد، درآمد نهایی و کشش تقاضا

۱۲ـ۲۰ برای هر تابع تقاضا به‌صورت $y = D(x)$ که در آن x مقدار تقاضا و y قیمت می‌باشد، درآمد کل برابر است با:

$$TR = x \cdot y = x \cdot D(x)$$

تابع درآمد نهایی، که به‌صورت مشتق تابع درآمد کل است، برابر است با:

$$MR = TR' \Longrightarrow MR = D(x) + x \cdot D'(x)$$

بین تابع درآمد نهایی و کشش تقاضا رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$MR = y(۱ + \frac{۱}{\frac{Ex}{Ey}})$$

یعنی درآمد نهایی برابر است با قیمت واحد کالا ضربدر یک، به علاوه‌ی معکوس کشش تقاضا نسبت به قیمت. چون x و y هر دو صفر یا مثبت‌اند، درآمد کل درنتیجه صفر یا مثبت خواهد بود، ولی درآمد نهایی ممکن است مثبت یا منفی باشد.

مثال تابع تقاضا برای کالایی خاص برابر است با: $y = ۱۰۰ - ۶x^۲$، که در آن x مقدار و y قیمت هر واحد است. برای این تابع تقاضا، صحت رابطه بین درآمد نهایی و کشش تقاضا را نشان دهید.

حل

$$\frac{Ex}{Ey} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x} = -\frac{۱}{۱۲x} \cdot \frac{y}{x} = -\frac{y}{۱۲x^۲}$$

$$TR = x \cdot y = ۱۰۰x - ۶x^۳ \Longrightarrow MR = \frac{dTR}{dx} = ۱۰۰ - ۱۸x^۲$$

پس:

$$y(۱ + \frac{۱}{\frac{Ex}{Ey}}) = y(۱ - \frac{۱۲x^۲}{y}) = y - ۱۲x^۲ = ۱۰۰ - ۶x^۲ - ۱۲x^۲$$

$$= ۱۰۰ - ۱۸x^۲ = MR$$

تابع سود

۱۲ـ۲۱ فرض می‌کنیم تولیدکننده‌ای دارای تابع هزینه کل TC و تابع درآمد کل TR باشد که در آن x مقدار تولید باشد. سود این تولید کننده که آن را با π نشان می‌دهیم، برابر است با درآمد کل، منهای هزینه‌ی کل، یعنی:

$$\boxed{\pi = TR - TC}$$

مثال برای یک انحصارگر، تابع هزینه‌ی کل $TC = ۲x - x^۲$ و تابع تقاضا به‌صورت $y = ۶ - ۲x$ است. تابع سود این انحصارگر را تعیین کنید.

حل

$$TR = x \cdot y = x(۶ - ۲x) \Longrightarrow TR = ۶x - ۲x^۲$$

$$\pi = TR - TC = ۶x - ۲x^۲ - (۲x - x^۲) \Longrightarrow \pi = ۴x - x^۲$$

مثال یک شرکت، x واحد کالا در ماه تولید می‌کند و به فروش می‌رساند. تابع هزینه و تابع سود ماهانه، با معادلات زیر داده شده است:

$$TC = ۷۲۰۰۰ + ۶۰x\ ,\quad \pi = -\frac{۱}{۳۰}x^۲ + ۱۴۰x - ۷۲۰۰۰$$

معادله‌ی تقاضای این شرکت را تعیین کنید.

حل

$$\pi = TR - TC \Longrightarrow -\frac{۱}{۳۰}x^۲ + ۱۴۰x - ۷۲۰۰۰ = TR - ۷۲۰۰۰ - ۶۰x$$

$$\Longrightarrow TR = -\frac{۱}{۳۰}x^۲ + ۲۰۰x$$

$$TR = x \cdot y \Longrightarrow -\frac{۱}{۳۰}x^۲ + ۲۰۰x = x \cdot y \Longrightarrow x(-\frac{۱}{۳۰}x + ۲۰۰) = x \cdot y$$

$$\Longrightarrow y = -\frac{۱}{۳۰}x + ۲۰۰ \quad \text{معادله‌ی تقاضا}$$

مثال اگر x تعداد واحد کالای مورد تقاضا باشد و معادلات درآمد و هزینه به‌صورت $TR = ۲۰۰x - \frac{x^۲}{۳}$ و $TC = ۵۰۰ + ۲۰x$ باشند،

۱) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین سود به‌دست آید؟

۲) بیشترین سود قابل حصول شرکت چقدر است؟

حل

۱)

$$\pi = TR - TC = ۲۰۰x - \frac{x^۲}{۳} - ۵۰۰ - ۲۰x \Longrightarrow \pi = -\frac{x^۲}{۳} + ۱۸۰x - ۵۰۰$$

$$\frac{d\pi}{dx} = ۰ \Longrightarrow -\frac{۲}{۳}x + ۱۸۰ = ۰ \Longrightarrow x = ۲۷۰ \quad \text{(تعداد واحد کالا)}$$

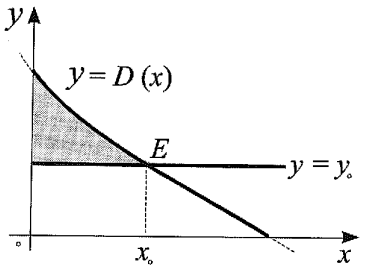
$$x \cdot y = ۲۰۰x - \frac{x^۲}{۳} \Longrightarrow y = ۲۰۰ - \frac{x}{۳} \xrightarrow{x=۲۷۰} y = ۲۰۰ - ۹۰ \Longrightarrow y = ۱۱۰ \quad \text{(قیمت واحد کالا)}$$

۲)

$$x = ۲۷۰ \Longrightarrow \pi = -\frac{۲۷۰^۲}{۳} + (۱۸۰ \times ۲۷۰) - ۵۰۰ \Longrightarrow \pi = ۲۳۸۰۰$$

مازاد مصرف‌کننده

۱۲ـ۲۲ هر تابع تقاضا نشان‌دهنده‌ی مقادیر مختلف از کالایی است که در قیمت‌های مختلف خریداری می‌شود. فرض کنید معادله‌ی تقاضا به صورت $y = D(x)$ باشد، اگر نقطه‌ی تعادل بازار $E(x_۰, y_۰)$ فرض شود، در این صورت مصرف‌کننده‌هایی که مایل به پرداخت قیمت بیشتری از قیمت بازار، $y_۰$، باشند از این که قیمت $y_۰$ است، سود می‌برند. کل نفع مصرف‌کننده به‌وسیله‌ی سطح محصور بین منحنی تابع تقاضا و خط $y = y_۰$ نشان داده می‌شود. شکل زیر را ملاحظه کنید. این مساحت موسوم به «مازاد مصرف‌کننده» بوده و برابر است با:



$$\text{مازاد مصرف‌کننده} = \int_۰^{x_۰} [D(x) - y_۰]dx$$

یا

$$\text{مازاد مصرف‌کننده} = \int_۰^{x_۰} D(x)dx - x_۰y_۰$$

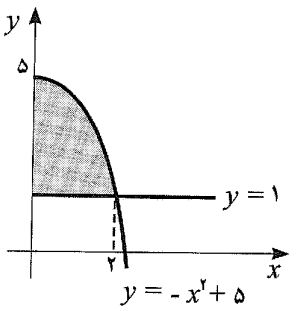
مثال اگر تابع تقاضا به صورت $y = -x^۲ + ۵$ و قیمت تعادل بازار $y = ۱$ فرض شود، مازاد مصرف‌کننده را تعیین کنید.

حل

$$\begin{cases} y = -x^۲ + ۵ \\ y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow -x^۲ + ۵ = ۱ \Longrightarrow x^۲ = ۴ \Longrightarrow \begin{cases} x = ۲ & \text{ق ق} \\ x = -۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

شکل زیر را که نمودار این منحنی تقاضا است، ملاحظه کنید.

$$\text{مازاد مصرف‌کننده} = \int_۰^۲ (-x^۲ + ۵ - ۱)dx$$
$$= \int_۰^۲ (-x^۲ + ۴)dx$$
$$= \left(-\frac{x^۳}{۳} + ۴x\right)\Big|_۰^۲ = \frac{۱۶}{۳}$$



مثال اگر تابع تقاضا $y = -۲x + ۱۰$ باشد،

اولاً: به ازای $x = ۱$ مازاد مصرف‌کننده را تعیین کنید.

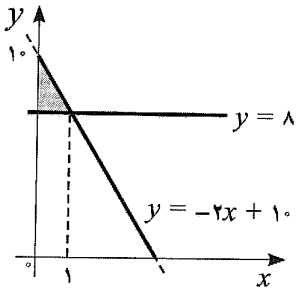
ثانیاً: به ازای چه مقدار از x مازاد مصرف‌کننده برابر ۱۲٫۵ خواهد بود.

حل

اولاً:

$$x = ۱ \Longrightarrow y = -۲ + ۱۰ \Longrightarrow y = ۸$$

شکل زیر را که نمودار این منحنی تقاضا است، ملاحظه کنید.



$$\text{مازاد مصرف‌کننده} = \int_۰^۱ (-۲x + ۱۰ - ۸)dx = \int_۰^۱ (-۲x + ۲)dx$$
$$= (-x^۲ + ۲x)\Big|_۰^۱ = ۱$$

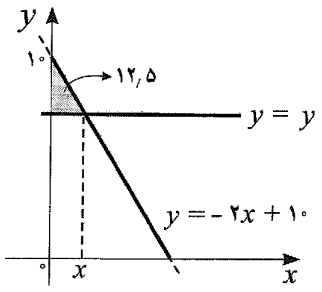
ثانیاً:

$$\text{مازاد مصرف‌کننده} = \int_{۰}^{x_۰} (-۲x + ۱۰)dx - x_۰y_۰$$

$$۱۲/۵ = (-x^۲ + ۱۰x)\Big|_{۰}^{x_۰} - x_۰(-۲x_۰ + ۱۰)$$

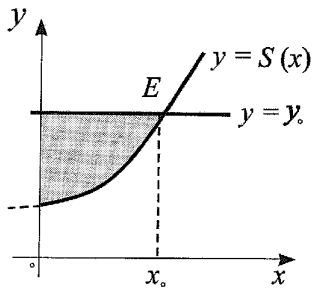
$$۱۲/۵ = -x_۰^۲ + ۱۰x_۰ + ۲x_۰^۲ - ۱۰x_۰$$

$$۱۲/۵ = x_۰^۲ \Longrightarrow x_۰ = ۳/۵$$



مازاد تولیدکننده

۱۲ـ۲۳ هر تابع عرضه نشان‌دهنده‌ی مقادیری از کالاست که در قیمت‌های گوناگونی عرضه می‌شود. فرض می‌کنیم معادله‌ی عرضه به صورت $y = S(x)$ باشد، اگر نقطه‌ی تعادل بازار $E(x_۰, y_۰)$ فرض شود در این صورت تولیدکننده‌هایی که مایل به عرضه کالا زیر قیمت $y_۰$ نیز می‌باشند از این که قیمت $y_۰$ است، سود می‌برند. کل نفع تولیدکننده به‌وسیله‌ی سطح محصور بین منحنی تابع عرضه و خط $y = y_۰$ نشان داده می‌شود. شکل زیر را ملاحظه کنید. این مساحت موسوم به «مازاد تولیدکننده» بوده و برابر است با:



$$\text{مازاد تولیدکننده} = \int_{۰}^{x_۰} [y_۰ - S(x)]dx$$

یا:

$$\text{مازاد تولیدکننده} = x_۰y_۰ - \int_{۰}^{x_۰} S(x)dx$$

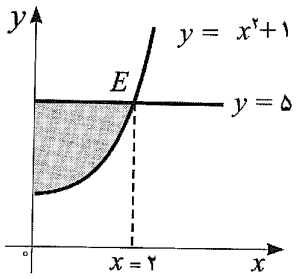
مثال اگر تابع عرضه به صورت $y = x^۲ + ۱$ و قیمت تعادل بازار $y = ۵$ باشد، مازاد تولیدکننده را تعیین کنید.

حل

$$\begin{cases} y = x^۲ + ۱ \\ y = ۵ \end{cases} \Longrightarrow x^۲ + ۱ = ۵ \Longrightarrow x^۲ = ۴ \Longrightarrow \begin{cases} x = ۲ & \text{ق ق} \\ x = -۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

شکل زیر که نمودار این منحنی عرضه است، ملاحظه کنید.

$$\text{مازاد تولیدکننده} = \int_{۰}^{۲} (۵ - x^۲ - ۱)dx = \int_{۰}^{۲} (۴ - x^۲)dx$$
$$= \left(۴x - \frac{۱}{۳}x^۳\right)\Big|_{۰}^{۲} = \frac{۱۶}{۳}$$



توابع تولید

۱۲ـ۲۴ اگر مقدار z از یک کالا با استفاده از دو عامل تولید به مقادیر x و y، تولید گردد، در این صورت تابع تولید $z = f(x, y)$ است. بدیهی است که باید x، y و z مثبت باشند.

۱۲ـ۲۵ اگر تابع تولید به‌صورت $z = f(x, y)$ داده شده باشد:

۱) $\frac{\partial z}{\partial x}$، تولید نهایی نسبت به x است. یعنی اگر y ثابت فرض شود، x به اندازه‌ی یک واحد افزایش یابد، مقدار تولید به‌اندازه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ افزایش می‌یابد.

۱) $\frac{\partial z}{\partial y}$، تولید نهایی نسبت به y است. یعنی اگر x ثابت فرض شود، y به‌اندازه‌ی یک واحد افزایش یابد، مقدار تولید به‌اندازه‌ی $\frac{\partial z}{\partial y}$ افزایش می‌یابد.

مثال تابع تولید $z = ۴xy - x^۲ - ۲y^۲$ مفروض است.

۱) تولید نهایی نسبت به عوامل تولید x و y را تعیین کنید.

۲) اگر عوامل تولید $x = ۴$ و $y = ۴$ باشد، مقدار محصول را تعیین نمایید.

حل

۱)

$$\text{تولید نهایی نسبت به } x = MP_x = \frac{\partial z}{\partial x} = ۴y - ۲x$$
$$\text{تولید نهایی نسبت به } y = MP_y = \frac{\partial z}{\partial y} = ۴x - ۴y$$

۲)

$$x = ۴, y = ۴ \Longrightarrow z = (۴ \times ۴ \times ۴) - ۴^۲ - ۲ \times ۴^۲ = ۶۴ - ۱۶ - ۳۲ \Longrightarrow z = ۱۶$$

نسبت بازده به مقیاس

۱۲ـ۲۶ «نسبت بازده به مقیاس» بیان‌کننده‌ی تغییر محصول با افزایش متناسب در تمامی عوامل تولید است. فرض کنیم تابع تولید همگن، و به‌صورت $z = f(x, y)$ باشد. اگر عوامل تولید با نسبتی مساوی λ افزایش یابد، دراین‌صورت داریم:

$$z_1 = f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x, y) = \lambda^n \cdot z$$

یعنی در این حالت مقدار محصول λ^n برابر محصول حالت قبل می‌باشد، بدیهی است که اگر

۱) $n = 1$ باشد، «نسبت بازده به مقیاس ثابت» است، یعنی محصول در این حالت به همان نسبت افزایش می‌یابد.

۲) $n > 1$ باشد، «نسبت بازده به مقیاس صعودی» است، یعنی محصول در این حالت با نسبتی بیشتر افزایش می‌یابد.

۳) $n < 1$ باشد، «نسبت بازده به مقیاس نزولی» است، یعنی محصول در این حالت با نسبتی کمتر افزایش می‌یابد.

مثال تابع تولید $z = xy - 3x^2 - y^2$ مفروض است.

۱) نسبت بازده به مقیاس این تابع تولید چگونه است؟

۲) اگر عوامل تولید سه برابر گردند، محصول چند برابر می‌گردد؟

حل

$$\begin{aligned} z_1 = f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)(\lambda y) - 3(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 \\ &= \lambda^2 xy - 3\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (xy - 3x^2 - y^2) = \lambda^2 \cdot z \end{aligned}$$

۱) $n = 2 > 1$، نسبت بازده به مقیاس این تابع تولید، صعودی است.

۲) به‌ازای $\lambda = 3$ داریم $9z$. بنابراین اگر عوامل تولید ۳برابر شود، محصول ۹ برابر می‌شود.

درآمد ملی، مصرف ملی و پس انداز ملی

۱۲ـ۲۷ فرض می‌کنیم تابع مصرف به صورت $C = f(x)$ باشد که در آن C مصرف ملی و x درآمد ملی است. در این صورت میل نهایی به مصرف (MPC) مساوی مشتق تابع مصرف، نسبت به x است، یعنی:

$$MPC = \frac{dC}{dx} = f'(x)$$

اگر S پس انداز ملی باشد، در این صورت داریم:

$$x = C + S$$

از این رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم، داریم:

$$1 = \frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx}$$

یا

$$1 = MPC + MPS$$

$\frac{dC}{dx}$ موسوم به «میل نهایی مصرف» و $\frac{dS}{dx}$ «میل نهایی به پس‌انداز» است. با معلوم بودن میل نهایی به مصرف یا پس‌انداز، با استفاده از انتگرال نامعین می‌توان تابع مصرف یا پس‌انداز را تعیین کرد. اگر $\frac{dC}{dx}$ معلوم باشد، داریم:

$$\frac{dC}{dx} = f'(x) \ , \ C = \int f'(x)dx = f(x) + k$$

با معلوم بودن یک شرط اولیه می‌توان ثابت k را تعیین نمود. با معلوم بودن تابع مصرف ملی می‌توان پس‌انداز ملی را تعیین کرد.

مثال میل نهایی به مصرف برابر، $\frac{dC}{dx} = ۵\sqrt{x} + ۲$. هنگامی که درآمد صفر است، مصرف برابر ۶ میلیارد تومان است. تابع مصرف پس انداز را تعیین کنید.

$$\frac{dC}{dx} = ۵\sqrt{x} + ۲ \Longrightarrow C = \int (۵x^{\frac{۱}{۲}} + ۲)dx \Longrightarrow C = \frac{۱۰}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + ۲x + k$$

داریم $C = ۶$ ، $x = ۰$. پس $k = ۶$ ، و

$$C = \frac{۱۰}{۳}\sqrt{x^۳} + ۲x + ۶ \Longrightarrow S = x - C \Longrightarrow S = -\frac{۱۰}{۳}\sqrt{x^۳} - ۲x - ۶$$

مثال میل نهایی به پس‌انداز برابر است با $\frac{dS}{dx} = e^{-x} + \frac{۱}{۵}x$، هنگامی که درآمد صفر است. مصرف ملی ۲۰ میلیارد تومان است. تابع مصرف و پس‌انداز را تعیین کنید.

حل

$$\frac{dS}{dx} = e^{-x} + \frac{۱}{۵}x \Longrightarrow S = \int (e^{-x} + \frac{۱}{۵}x)dx \Longrightarrow S = -e^{-x} + \frac{۱}{۱۰}x + k$$

$$x = S + C \Longrightarrow C = x - S \Longrightarrow C = x + e^{-x} - \frac{۱}{۱۰}x - k$$

از شرط اولیه استفاده می‌کنیم، داریم $x = ۰$ و $C = ۲۰$، پس:

$$۲۰ = ۰ + ۱ - k \Longrightarrow k = -۱۹$$

به این ترتیب مصرف ملی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = x + e^{-x} - \frac{۱}{۱۰}x^۲ + ۱۹$$

اما پس‌انداز برابر است با:

$$S = -e^{-x} + \frac{۱}{۱۰}x^۲ - ۱۹$$

مسیر متغیرها در طول زمان

۱۲ـ۲۸ هنگامی که متغیری در طول زمان با نرخ ثابتی افزایش یا کاهش می‌یابد، می‌توان یک قاعده و فرمول برای حرکت آن متغیر در طول زمان بیان کرد.

۱۲ـ۲۹ در حالت کلی اگر A متغیری می‌باشد که در طول زمان با نرخ ثابت r رشد می‌کند، می‌توان مقدار A را در هر زمان دلخواه با یکی از روابط زیر به‌دست آورد:

۱) حالت ناپیوسته:

$$A_t = A_۰(۱ + r)^t$$

تبصره: می‌توانیم به‌جای آهنگ رشد سالانه، آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به‌دست آوریم که به واقعیت نیز نزدیک‌تر است. اگر سال را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، یعنی $\frac{۱}{n}$، آن‌گاه فرمول رشد به‌صورت زیر خواهد بود:

$$A_t = A_۰(۱ + \frac{r}{n})^{nt}$$

۲) حالت پیوسته:

$$A_t = A_۰e^{rt}$$

در این روابط،

$A_۰$: مقدار متغیر A در زمان شروع

A_t : مقدار متغیر A در زمان t

r : نرخ ثابت رشد

t : تعداد سال‌ها

$e \simeq ۲/۷۱۸$: عدد نپر

مثال شخصی مبلغ ۵۰۰۰ ریال با بهره‌ی ۴درصد به حساب سپرده گذاشته است. پس از ۱۰ سال چه مبلغی دریافت می‌کند؟

حل

$$A_۰ = ۵۰۰۰,\ \ r = ۰/۰۴,\ \ t = ۱۰$$

$$A_{۱۰} = A_۰(۱ + r)^t = (۵۰۰۰)(۱ + ۰/۰۴)^{۱۰} = ۵۰۰۰ \times (۱/۰۴)^{۱۰} = ۷۳۹۶/۶۷$$

مثال دو سال طول می‌کشد تا جمعیت منطقه‌ای ۱۰ برابر شود. آهنگ رشد جمعیت در این منطقه تقریباً چنددرصد است؟

حل

$$t = ۲,\ \ A_t = ۱۰A,$$

$$A_t = A_۰(۱ + r)^t \Longrightarrow ۱۰A_۰ = A_۰(۱ + r)^۲ \Longrightarrow ۱۰ = (۱ + r)^۲$$

$$\Longrightarrow \sqrt{۱۰} = ۱ + r \Longrightarrow r = ۳/۱ - ۱ = ۲/۱$$

مثال اگر نرخ تولیدات کشاورزی ۲۰ درصد و میزان تولید آن x باشد، پس از چند سال میزان تولیدات این کشور $۱۲۰x$ خواهد شد؟ ($\log ۳ \approx ۰/۵$، $\log ۲ \approx ۰/۳$)

حل

$$A_۰ = x, \quad A_t = ۱۲۰x, \quad r = ۰/۲$$

$$A_t = A_۰(۱+r)^t \Longrightarrow ۱۲۰x = x(۱+۰/۲)^t \Longrightarrow ۱۲۰ = ۱/۰۲^t$$

$$\Longrightarrow t = \log_{۱/۰۲} ۱۲۰ = \frac{\log ۱۲۰}{\log ۱/۲} = \frac{\log(۲^۲ \times ۳ \times ۱۰)}{\log(۲^۲ \times ۳) - \log ۱۰}$$

$$\Longrightarrow t = \frac{۲\log ۲ + \log ۳ + \log ۱۰}{۲\log ۲ + \log ۳ - ۱} = \frac{۰/۶ + ۰/۵ + ۱}{۰/۶ + ۰/۵ - ۱} = ۲۱$$

مثال اگر با نرخ ۱۲ درصد آخر هرماه سود بر سرمایه افزوده شود، پس از ۵ سال سرمایه‌ای فعلی در چه عددس ضرب می‌شود؟

حل

$$r = ۰/۱۲, \ n = ۱۲, \ t = ۵$$

$$A_t = A_۰(۱ + \frac{r}{n})^{nt} \Longrightarrow A_t = A_۰(۱ + \frac{۰/۱۲}{۱۲})^{۱۲\times ۵} = A_۰(۱ + ۰/۰۱)^{۶۰}$$

بنابراین سرمایه‌ی فعلی پس از ۵سال در $(۱/۰۱)^{۶۰}$ ضرب می‌شود.

مثال چنانچه بدانیم نرخ سود ۱۰٪ به‌طور پیوسته بر سرمایه اضافه گردد. ارزش فعلی، یک میلیون ریال در ۲۰ سال آینده چقدر است؟

حل

$$A_t = A_۰e^{rt} \Longrightarrow ۱۰^۶ = A_۰ \times e^{۰/۱\times ۲۰} \Longrightarrow A_۰ = ۱۰^۶ \times e^{-۲}$$

مثال در یک سرمایه‌گذاری سود به‌طور پیوسته بر سرمایه اضافه می‌شود. اگر نرخ سود ۱۰ درصد باشد، پس از چند سال سرمایه دوبرابر می‌شود؟

حل

$$A_t = A_۰e^{rt} \Longrightarrow ۲A_۰ = A_۰e^{۰/۱t} \Longrightarrow ۲ = e^{۰/۱t}$$

$$\Longrightarrow ۰/۱t = \ln ۲ \Longrightarrow t = ۱۰ \ln ۲$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

مدیریت

۱. اگر تابع هزینه کل $TC = x(x+1) + e^{2}$ و درآمد کل $TR = x(5x+1)$ باشد، در نقطه سربه‌سر مقدار x کدام است؟ [۱۳۷۱]

۱) $\frac{1}{4}e^{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}e$

۲. اگر درآمد نهایی $MR = \frac{1}{x+1}$ باشد، درآمد کل برابر است با: [۱۳۷۱]

۱) $\ln(x+1)$ ۲) $\frac{1}{(x+1)^{2}}$ ۳) $(x+1)^{2}$ ۴) $\frac{-1}{(x+1)^{2}}$

۳. اگر تابع درآمد کل و هزینه کل به ترتیب $TR = 5e^{2x}$ و $TC = 10e^{x}$ باشد، طول نقطه سربه‌سر کدام است؟ [۱۳۷۳]

۱) $\ln 2$ ۲) ۲ ۳) e ۴) e^{2}

۴. اگر تابع درآمد کل $TR = \frac{1}{3}x\ln x$ و تابع هزینه کل $TC = 2\ln x$، باشد آن‌گاه در نقطه سربه‌سر، مقدار تولید x کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۲

۵. اگر تابع هزینه کل $TC = 7x^{2} + 4$ باشد، که در آن x مقدار تولید است، با افزایش یک واحد تولید هزینه نهایی چه مقدار تغییر می‌کند؟ [۱۳۷۵]

۱) ۷ ۲) $7x$ ۳) ۱۴ ۴) $14x$

۶. اگر هزینه کل $TC = 5x$ و درآمد کل $TR = xe^{x}$ باشد، که در آن x مقدار تولید است، مقدار تولید در نقطه‌ی سربه‌سر برابر است با: [۱۳۷۶]

۱) $\ln 5$ ۲) e ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۵

۷. اگر سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه شود ارزش فعلی یک میلیون ریال با نرخ سود ۱۰ درصد طی ۱۰ سال برابر کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) $e(10)^{6}$ ۲) $2(10)^{6}$ ۳) $\frac{1}{2}(10)^{6}$ ۴) $\frac{1}{e}(10)^{6}$

۸. تابع هزینه کل به صورت $y = x^{2} + 2$ است (x مقدار تولید، y هزینه کل) ماکزیمم هزینه به ازای تولید در فاصله $[0, 5]$ کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۲۷ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۲

۹. هزینه کل به صورت $TC = 5e^{x} + \ln(x+1)$ است، هزینه ثابت کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۰ ۲) $\ln 2$ ۳) ۵ ۴) $5e$

۱۰. اگر تابع درآمد ملی $TR = ۲\ln(x+۱)$ و هزینه کل $TC = \ln(۲x+۱۰)$ باشد، نقطه سربه‌سر کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱. اگر سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه شود و نرخ سالیانه ۱۰ درصد باشد، پس از چند سال سرمایه ۲ برابر می‌شود؟ [۱۳۷۹]

۱) $۱۰\ln ۲$ ۲) $۱۰e$ ۳) $۶e^{۲}$ ۴) $۸e$

۱۲. جمعیت تهران در سال ۷۰ برابر ۷ میلیون نفر و در سال ۸۰ برابر ۸/۴ میلیون نفر است. نرخ رشد جمعیت در تهران به طور متوسط چند درصد است؟ [۱۳۸۰]

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۴ ۳) $\frac{۱}{۱۰}\ln ۱/۲$ ۴) $۱/۱e^{۱۰}$

۱۳. در یک بنگاه هزینه ثابت ۱۰۰۰۰۰ تومان و هزینه متغیر ۶۰% فروش و قیمت فروش ۴۰ تومان، نقطه سربه‌سر کدام است؟ [۱۳۸۰]

۱) ۲۴۰۰ ۲) ۶۲۵۰ ۳) ۷۲۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰

۱۴. اگر تابع درآمد کل $TR = e^{۲x} - ۱$ و هزینه کل $TC = e^{x} + ۹$ باشد، که در آن x مقدار تولید است، به ازای چه مقدار x سود بنگاه برابر ۱۰۰ می‌شود؟ [۱۳۸۱]

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) $\ln ۱۱$ ۴) $e^{۱۰}$

۱۵. هزینه نهایی بنگاهی $MC = xe^{x}$ است. هزینه کل بنگاه TC کدام است؟ در صورتی که هزینه ثابت ۱۰۰ باشد. [۱۳۸۱]

۱) $xe^{x} - x + ۱۰۰$ ۲) $x + e^{x} + ۹۹$ ۳) $xe^{x} + ۱۰۰$ ۴) $xe^{x} - e^{x} + ۱۰۱$

۱۶. اگر تابع درآمد کل $TR = e^{۲x}$ و هزینه کل $TC = e^{x} + ۲۰$ باشد، که در آن x مقدار است، نقطه سربه‌سر کدام است؟ [۱۳۸۲]

۱) e ۲) ۵ ۳) $e^{۲}$ ۴) $\ln ۵$

۱۷. چنانچه بدانیم نرخ سود ۱۵% به طور پیوسته بر سرمایه اضافه می‌گردد. ارزش فعلی، a ریال در ۲۰ سال آینده چقدر است؟ [۱۳۸۲]

۱) $ae^{-۲}$ ۲) $ae^{-۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}ae$ ۴) $۲ae^{-۱}$

۱۸. بازپرداخت وام مسکن P تابعی از سه متغیر $P = f(A, r, N)$ که در آن A مقدار وام دریافتی به ریال، r نرخ بهره و N شماره سال‌های بازپرداخت وام است، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ [۱۳۸۲]

۱) $\frac{\partial P}{\partial N} < ۰, \frac{\partial P}{\partial r} > ۰, \frac{\partial P}{\partial A} > ۰$ ۲) $\frac{\partial P}{\partial N} > ۰, \frac{\partial P}{\partial r} < ۰, \frac{\partial P}{\partial A} > ۰$

۳) $\frac{\partial P}{\partial N} < ۰, \frac{\partial P}{\partial r} > ۰, \frac{\partial P}{\partial A} < ۰$ ۴) $\frac{\partial P}{\partial N} > ۰, \frac{\partial P}{\partial r} < ۰, \frac{\partial P}{\partial A} < ۰$

۱۹. تابع سود تولیدکننده‌ای برای دو نوع کالای x و y به صورت زیر و حداکثر ظرفیت تولیدی آن ۱۲ واحد است. چه مقادیری از x و y سود او را به حداکثر می‌رسانند؟ [۱۳۸۲]

$$\pi = ۸۰x - ۲x^{۲} - xy - ۳y^{۲} + ۱۰۰y$$

۱) $x = ۱, y = ۳$ ۲) $x = ۳, y = ۴$ ۳) $x = ۲, y = ۵$ ۴) $x = ۵, y = ۷$

۲۰. هزینه تولید هر واحد کالا ۱۰۰ تومان و هزینه ثابت ۱۰۰۰۰۰ تومان است، در صورتی که هر واحد کالا ۱۲۰ تومان فروخته شود، به ازای چه مقدار تولید سود بنگاه به ۱۰۰۰۰۰ تومان می‌رسد؟ [۱۳۸۳]

۱) ۱۰۰۰۰ ۲) ۱۲۰۰۰ ۳) ۲۰۰۰۰ ۴) ۲۴۰۰۰

۲۱. قرار است بعد از گذشت ۴ سال مبلغ ۱۵۰۰۰۰۰ تومان دریافت کنیم در صورتی که ارزش فعلی این مبلغ یک میلیون تومان و سود به طور پیوسته بر سرمایه افزوده شود، نرخ سود سرمایه‌گذاری چقدر است؟ [۱۳۸۳]

۱) $\frac{۱}{۴}\ln ۱/۵$ ۲) $\ln \frac{۱/۵}{۴}$ ۳) $۴\ln ۱/۵$ ۴) $\ln ۶$

۲۲. نرخ رشد سالانه جمعیتی ۱/۵ درصد است، اگر این نرخ ثابت بماند، پس از چند سال جمعیت دو برابر می‌شود؟ [۱۳۸۴]
$(\ln ۲ = ۰/۷۰۵)$

۱) ۴۳ ۲) ۴۵ ۳) ۴۷ ۴) ۴۹

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۴

$$TR = TC \Longrightarrow x(۵x+۱) = x(x+۱) + e^{۲}$$
$$\Longrightarrow ۵x^{۲} + x = x^{۲} + x + e^{۲} \Longrightarrow ۴x^{۲} = e^{۲}$$
$$\Longrightarrow x^{۲} = \frac{۱}{۴}e^{۲} \Longrightarrow x = \frac{۱}{۲}e$$

۲. گزینه‌ی ۱

$$TR = \int MR dx = \int \frac{۱}{x+۱}dx \Longrightarrow TR = \ln(x+۱)$$

۳. گزینه‌ی ۱

$$TR = TC \Longrightarrow ۵e^{۲x} = ۱۰e^{x} \Longrightarrow e^{x} = ۲ \Longrightarrow x = \ln ۲$$

۴. گزینه‌ی ۳

$$TR = TC \Longrightarrow \frac{۱}{۳}x\ln x = ۲\ln x \Longrightarrow \frac{۱}{۳}x = ۲ \Longrightarrow x = ۶$$

۵. گزینه‌ی ۴

$$MC = \frac{dTC}{dx} \Longrightarrow MC = ۱۴x$$

۶. گزینه‌ی ۱

$$TR = TC \Longrightarrow xe^{x} = ۵x \Longrightarrow e^{x} = ۵ \Longrightarrow x = \ln ۵$$

۷. گزینه‌ی ۴

$$P_{(t)} = P_{(۰)}e^{rt} \Longrightarrow ۱۰۰۰۰۰۰ = P_{(۰)}e^{۰/۱\times ۱۰}$$
$$\Longrightarrow ۱۰۰۰۰۰۰ = P_{(۰)} \cdot e \Longrightarrow P_{(۰)} = \frac{۱۰^{۶}}{e}$$

۸. گزینه‌ی ۱

$$\frac{dy}{dx} = ۲x = ۰ \implies x = ۰$$

x	۰	۵
y	۲	۲۷

۹. گزینه‌ی ۳

$$FC = TC(۰) \implies FC = ۵e^{۰} + \ln(۰ + ۱) \implies FC = ۵$$

۱۰. گزینه‌ی ۲

$$TR = TC \implies ۲\ln(x+۱) = \ln(۲x+۱۰) \implies \ln(x+۱)^{۲} = \ln(۲x+۱۰)$$
$$(x+۱)^{۲} = ۲x + ۱۰ \implies x^{۲} + ۲x + ۱ = ۲x + ۱۰ \implies x^{۲} = ۹ \implies x = ۳$$

۱۱. گزینه‌ی ۱

$$P_{(t)} = P_{(۰)}e^{rt} \implies ۲P_{(۰)} = P_{(۰)}e^{۰/۱t} \implies e^{۰/۱t} = ۲$$
$$\implies ۰/۱t = \ln ۲ \implies t = ۱۰\ln ۲$$

۱۲. گزینه‌ی ۳

$$P_{(t)} = P_{(۰)}e^{rt} \implies ۸/۴ = ۷e^{۱۰r} \implies e^{۱۰r} = ۱/۲ \implies ۱۰r = \ln ۱/۲ \implies r = \frac{۱}{۱۰}\ln ۱/۲$$

۱۳. گزینه‌ی ۲

$$TR = p \cdot x = ۴۰x$$
$$TC = FC + VC \implies TC = ۱۰۰۰۰۰ + (۰/۶ \times ۴۰x) \implies TC = ۱۰۰۰۰۰ + ۲۴x$$
$$TR = TC \implies ۴۰x = ۱۰۰۰۰۰ + ۲۴x \implies ۱۶x = ۱۰۰۰۰۰ \implies x = ۶۲۵۰$$

۱۴. گزینه‌ی ۳

$$\pi = TR - TC = e^{۲x} - ۱ - e^{x} - ۹ \implies \pi = e^{۲x} - e^{x} - ۱۰$$
$$\pi = ۱۰۰ \implies e^{۲x} - e^{x} - ۱۰ = ۱۰۰ \implies e^{۲x} - e^{x} - ۱۱۰ = ۰$$
$$\implies (e^{x})^{۲} - e^{x} - ۱۱۰ \implies (e^{x} - ۱۱)(e^{x} + ۱۰) = ۰ \implies e^{x} - ۱۱ = ۰ \implies x = \ln ۱۱$$

۱۵. گزینه‌ی ۴

$$TC = \int MC dx = \int xe^{x} dx$$
$$TC = xe^{x} - e^{x} + c$$
$$TC(۰) = FC \implies ۰ - e^{۰} + c = ۱۰۰ \implies c = ۱۰۱$$
$$TC = xe^{x} - e^{x} + ۱۰۱$$

x و مشتق‌هایش		e^x و انتگرال‌هایش
x	−	e^x
۱	+	e^x
۰		e^x

۱۶. گزینه‌ی ۴

$$TR = TC \implies e^{۲x} = e^x + ۲۰ \implies (e^x)^۲ - e^x - ۲۰ = ۰$$
$$\implies (e^x - ۵)(e^x + ۴) = ۰ \implies e^x - ۵ = ۰ \implies e^x = ۵ \implies x = \ln ۵$$

۱۷. گزینه‌ی ۲

$$P_{(t)} = P_{(۰)}e^{rt} \implies a = P_{(۰)}e^{۰/۱۵\times ۲۰} \implies a = P_{(۰)}e^{۳} \implies P_{(۰)} = \frac{a}{e^{۳}} = ae^{-۳}$$

۱۸. گزینه‌ی ۱

۱۹. گزینه‌ی ۴

$$x + y = ۱۲ \implies y = ۱۲ - x$$
$$\pi = ۸۰x - ۲x^۲ - x(۱۲ - x) - ۳(۱۲ - x)^۲ + ۱۰۰(۱۲ - x)$$
$$\frac{d\pi}{dx} = ۰ \implies ۸۰ - ۴x - ۱۲ + ۲x - ۶x + ۷۲ - ۱۰۰ = ۰ \implies x = ۵\ ,\ y = ۷$$

۲۰. گزینه‌ی ۱

$$TC = FC + VC = ۱۰۰x + ۱۰۰۰۰۰\ ,\ TR = p \cdot x = ۱۲۰x$$
$$\pi = ۱۰۰۰۰۰ \implies TR - TC = ۱۰۰۰۰۰ \implies ۱۲۰x - ۱۰۰x - ۱۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰$$
$$\implies ۲۰x = ۲۰۰۰۰۰ \implies x = ۱۰۰۰۰$$

۲۱. گزینه‌ی ۱

$$P_{(t)} = P_{(۰)}e^{rt} \implies ۱۵۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰e^{۴r} = e^{۴r} = ۱/۵$$
$$\implies ۴r = \ln ۱/۵ \implies r = \frac{۱}{۴}\ln ۱/۵$$

۲۲. گزینه‌ی ۳

$$P_{(t)} = P_{(۰)}e^{rt} \implies ۲P_{(۰)} = P_{(۰)}e^{۰/۰۱۵t} \implies e^{۰/۰۱۵t} = ۲$$
$$\implies ۰/۰۱۵t = \ln ۲ \implies t = \frac{۰/۷۰۵}{۰/۰۱۵} \implies t = \frac{۷۰۵}{۱۵} = ۴۷$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

حسابداری

۱. اگر هزینه کل $TC = e^{x-۳} + x + ۱$، درآمد کل $TR = x + ۲$، در آن x مقدار تولید در نقطه سربه‌سر کدام است؟ [۱۳۷۲]

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲. چهار سال بعد می‌بایست مبلغ ۷۵۰۰۰۰ تومان از بانک بگیریم. اگر سود به طور پیوسته و نرخ آن $r = \%۱۰$ باشد، ارزش فعلی این پول کدام است؟ $(e^{۰/۴} = ۱/۵)$ [۱۳۷۳]

۱) ۴۵۰۰۰۰ ۲) ۵۰۰۰۰۰ ۳) ۶۰۰۰۰۰ ۴) ۷۰۰۰۰۰

۳. اگر تابع درآمد کل $TR = ۷۵x - ۲۵x^۲$ و هزینه کل $TC = ۲۵x + ۱۰$، ماکزیمم سود کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۵۰

۴. اگر تابع درآمد کل $TR = \frac{۱}{۲}xe^x$ و تابع هزینه کل $TC = ۲e^x$، که در آن x مقدار تولید است، x در نقطه سربه‌سر کدام است؟ [۱۳۷۴]

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵. یک فروشنده از n عدد کالا، $\frac{n}{۲}$ را به قیمت خرید، $\frac{n}{۴}$ را به نصف قیمت خرید و $\frac{n}{۴}$ را به دو برابر قیمت خرید، فروخته است. این فروشنده چند درصد خرید سود برده است؟ [۱۳۷۵]

۱) صفر ۲) ۴/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۲/۵

۶. اگر تابع درآمد کل $TR = ۱۰x - x^۲$ و هزینه کل $TC = ۴ + ۲x$ باشد، به ازای کدام مقدار x، سود ماکزیمم است؟ [۱۳۷۵]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۷. در تابع تولید کل $z = ax^۲y$ که در آن x و y عوامل تولیدند. تولید نهایی نسبت به x در $x = ۲$ و $y = ۲$ چه مقدار است؟ [۱۳۷۵]

۱) a ۲) $۲a$ ۳) $۴a$ ۴) $۸a$

۸. اگر هزینه کل $TC = ۵x + ۱$ و درآمد کل $TR = xe^x + ۱$ باشد، که در آن x مقدار تولید است. مقدار تولید در نقطه سربه‌سر برابر است با: [۱۳۷۶]

۱) ۱ ۲) e ۳) $\ln ۵$ ۴) ۵

۹. اگر سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه شود، ارزش فعلی یک میلیون ریال که قابل دریافت ۱۰ سال آینده با نرخ سود ۱۰% کدام است؟ [۱۳۷۶]

۱) $\frac{۱۰^۶}{e}$ ۲) $۱۰^۷$ ۳) $۱۰^۶e$ ۴) ۲×۱۰^۶

۱۰. اگر هزینه ثابت تولید ۶۰۰۰۰ ریال، هزینه متغیر ۴۰ درصد فروش و قیمت هر واحد فروش ۵۰ ریال است، نقطه سربه‌سر کدام است؟ [۱۳۷۷]

۱) ۱۵۰۰ ۲) ۲۰۰۰ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۳۰۰۰

۱۱. اگر درآمد کل $TR = e^x + 5x$ و هزینه کل $TC = 5x + 2$ باشد، در نقطه سربه‌سر مقدار x، کدام است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\ln 2$ ۴) e

۱۲. در سپرده بانکی سود در پایان هر ماه بر سرمایه اضافه می‌شود، با نرخ سود مشارکت ۱۲٪ سرمایه‌ای پس از ۳ سال چند برابر می‌شود؟ [۱۳۷۸]

۱) $(1/012)^{36}$ ۲) $(1/01)^{36}$ ۳) $(1/12)^3$ ۴) $(1/03)^{12}$

۱۳. اگر درآمد کل $TR = 8x - x^2$ و هزینه کل $TC = 2x + 1$ است، به ازای کدام مقدار x، سود بنگاه ماکزیمم است؟ [۱۳۷۸]

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴. اگر تابع درآمد کل $TR = 6^x$ و تابع هزینه کل $TC = 16 \times 3^x$ باشد نقطه سربه‌سر کدام است؟ [۱۳۷۹]

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۵. اگر تابع هزینه کل $TC = 80x + 100$ و درآمد کل $TR = 100x$ باشد، به ازای چه مقدار از تولید x، سود بنگاه، ۱۰۰۰۰ واحد پول است؟ [۱۳۸۰]

۱) ۵۰۵ ۲) ۱۰۱۰ ۳) ۵۰۵۰ ۴) ۱۰۱۰۰

۱۶. در سرمایه‌گذاری بنگاهی، سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه می‌شود. اگر نرخ سود ۲۰ درصد باشد پس از چند سال سرمایه دو برابر می‌شود؟ [۱۳۸۰]

۱) $\frac{15}{4}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $5 \ln 2$ ۴) $8 \ln 2$

۱۷. در تابع مقید $Max : z = xy$ نسبت به $x + 2y = 100$ با استفاده از روش لاگرانژ، مقدار ضریب λ ضریب لاگرانژ برابر است با: [۱۳۸۰]

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۸. اگر تابع هزینه کل برابر $TC = 10 + (x-3)e^{x-3}$، که در آن x مقدار تولید باشد، به ازای چه مقداری از x هزینه کل می‌نیمم است؟ [۱۳۸۱]

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۹. اگر سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه شود، ارزش یک سرمایه با نرخ ۵ درصد پس از ۲۰ سال چند برابر می‌شود؟ [۱۳۸۱]

۱) ۲ ۲) e ۳) e^2 ۴) e^5

۲۰. فرض می‌کنیم هزینه ثابت برای تولید یک کالا ۶۰۰۰۰ تومان و هزینه متغیر ۶۰ درصد فروش و قیمت هر واحد کالا ۱۵ تومان است، مقدار تولید سربه‌سر برابر است با: [۱۳۸۲]

۱) ۹۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰۰ ۳) ۱۱۰۰۰ ۴) ۱۲۰۰۰

۲۱. سود ماهیانه بر سرمایه اضافه می‌شود طی چند سال با نرخ ۱۲ درصد این سرمایه دو برابر می‌شود؟ [۱۳۸۲]

۱) $\frac{\ln 2}{12 \ln 1/01}$ ۲) $\frac{\ln 2}{\ln 1/01}$ ۳) $\frac{\ln 2}{\ln 1/1}$ ۴) $\frac{12 \ln 1/1}{\ln 2}$

۲۲. اگر هزینه تولید هر واحد کالا ۱۰۰ تومان و هزینه ثابت ۲۰۰۰۰۰ تومان باشد برای رسیدن به نقطه سربه‌سر چه مقدار کالا باید تولید کرد، در صورتی که هر واحد کالا را ۱۲۰ تومان بفروشیم؟ [۱۳۸۳]

۱) ۱۰۰۰۰ ۲) ۱۲۰۰۰ ۳) ۲۰۰۰۰ ۴) ۲۴۰۰۰

۲۳. در یک شرکت مبلغ $۱۰^۶$ تومان با نرخ سود مشارکت ۱۰ درصد سرمایه‌گذاری شده است، اگر سود به طور پیوسته بر سرمایه افزوده شود، پس از گذشت ۴ سال سود این سرمایه کدام است؟ [۱۳۸۳]

۱) $۱۰^۶(e^{۰/۴۸}-۱)$ ۲) $۱۰^۶(e^{۰/۴}-۱)$

۳) $۱۰^۶((۱/۰۴)^۴-۱)$ ۴) $۱۰^۶((۱/۰۴)^{۴۸}-۱)$

۲۴. سود با نرخ ۱۲ درصد در پایان هر ماه بر سرمایه افزوده می‌شود. پس از چه مدت این سرمایه ۳ برابر می‌شود؟ ($\log_۳ ۱/۰۱ = ۰/۰۰۹۰$) [۱۳۸۴]

۱) ۸ سال و ۵ ماه ۲) ۸ سال و ۱۰ ماه ۳) ۹ سال و ۳ ماه ۴) ۹ سال و ۱۱ ماه

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۲

$$TR=TC \Longrightarrow x+۲=e^{x-۳}+x+۱ \Longrightarrow e^x-۳=۱$$
$$\Longrightarrow x-۳=۰ \Longrightarrow x=۳$$

۲. گزینه‌ی ۲

$$P_{(t)}=P_{(۰)}e^{rt} \Longrightarrow ۷۵۰۰۰۰=P_{(۰)}e^{۰/۱\times ۴} \Longrightarrow ۷۵۰۰۰۰=P_{(۰)}\times ۱/۵$$
$$\Longrightarrow P_{(۰)}=\frac{۷۵۰۰۰۰}{۱/۵} \Longrightarrow P_{(۰)}=۵۰۰۰۰۰$$

۳. گزینه‌ی ۲

$$\pi=TR-TC=۷۵x-۲۵x^۲-۲۵x-۱۰ \Longrightarrow \pi=-۲۵x^۲+۵۰x-۱۰$$
$$\frac{d\pi}{dx}=۰ \Longrightarrow =۰ \Longrightarrow -۵۰x+۵۰ \Longrightarrow x=۱ \Longrightarrow \pi=-۲۵+۵۰-۱۰ \Longrightarrow \pi=۱۵$$

۴. گزینه‌ی ۱

$$TR=TC \Longrightarrow \frac{۱}{۲}xe^x=۲e^x \Longrightarrow xe^x-۴e^x=۰$$
$$\Longrightarrow e^x(x-۴)=۰ \Longrightarrow x-۴=۰ \Longrightarrow x=۴$$

۵. گزینه‌ی ۴

$$\text{قیمت خرید کل کالاها}=nP$$
$$\text{قیمت فروش } \frac{n}{۲} \text{ کالاها}=\frac{n}{۲}\times P$$
$$\text{قیمت فروش } \frac{n}{۴} \text{ کالاها}=\frac{n}{۴}\times \frac{P}{۲}$$
$$\text{قیمت فروش } \frac{n}{۴} \text{ کالاها}=\frac{n}{۴}\times ۲P$$
$$\text{قیمت فروش کل کالاها}=\frac{۹nP}{۸}$$
$$\text{سود}=TR-TC=\frac{۹nP}{۸}-nP=\frac{nP}{۸}$$

۶. گزینه‌ی ۳

$$\pi = TR - TC = ۱۰x - x^۲ - ۴ - ۲x - ۴ - ۲x \Longrightarrow \pi = -x^۲ + ۸x - ۴$$
$$\frac{d\pi}{dx} = ۰ \Longrightarrow -۲x + ۸ = ۰ \Longrightarrow x = ۴$$

۷. گزینه‌ی ۴

$$MP_x = \frac{dz}{dx} \Longrightarrow MP_x = ۲axy \xrightarrow[y=۲]{x=۲} MP = ۸a$$

۸. گزینه‌ی ۳

$$TR = TC \Longrightarrow xe^x + ۱ = ۵x + ۱ \Longrightarrow xe^x = ۵x \Longrightarrow e^x = ۵$$
$$\Longrightarrow x = \ln ۵$$

۹. گزینه‌ی ۱

$$P_{(t)} = P_{(۰)}e^{rt} \Longrightarrow ۱۰۰۰۰۰۰ = P_{(۰)}e^{۰/۱\times ۱۰}$$
$$\Longrightarrow ۱۰۰۰۰۰۰ = P_{(۰)} \cdot e \Longrightarrow P_{(۰)} = \frac{۱۰^۶}{e}$$

۱۰. گزینه‌ی ۲

$$TR = P \cdot x \Longrightarrow TR = ۵۰x$$
$$TC = FC + VC = ۶۰۰۰۰ + (۰/۴ \times ۵۰x) \Longrightarrow TC = ۶۰۰۰۰ + ۲۰x$$
$$TR = TC \Longrightarrow ۵۰x = ۶۰۰۰۰ + ۲۰x \Longrightarrow ۳۰x = ۶۰۰۰۰ \Longrightarrow x = ۲۰۰۰$$

۱۱. گزینه‌ی ۳

$$TR = TC \Longrightarrow e^x + ۵x = ۵x + ۲ \Longrightarrow e^x = ۲ \Longrightarrow x = \ln ۲$$

۱۲. گزینه‌ی ۲

$$A_t = A_۰\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt} \Longrightarrow A_t = A_۰\left(۱ + \frac{۰/۱۲}{۱۲}\right)^{۱۲\times ۳} \Longrightarrow A_t = A_۰(۱/۰۱)^{۳۶}$$

۱۳. گزینه‌ی ۳

$$\pi = TR - TC = ۸x - x^۲ - ۲x - ۱ \Longrightarrow \pi = -x^۲ + ۶x - ۱$$
$$\frac{d\pi}{dx} = ۰ \Longrightarrow -۲x + ۶ = ۰ \Longrightarrow x = ۳$$

۱۴. گزینه‌ی ۳

$$TR = TC \Longrightarrow ۶^x = ۱۶ \times ۳^x \Longrightarrow ۳^x \times ۲^x = ۱۶ \times ۳^x \Longrightarrow ۲^x = ۱۶ \Longrightarrow x = ۴$$

۱۵. گزینه‌ی ۱

$$\pi = TR - TC = ۱۰۰x - ۸۰x - ۱۰۰ \Longrightarrow \pi = ۲۰x - ۱۰۰$$
$$\pi(x) = ۱۰۰۰۰ \Longrightarrow ۲۰x - ۱۰۰ = ۱۰۰۰۰ \Longrightarrow ۲۰x = ۱۰۱۰۰ \Longrightarrow x = ۵۰۵$$

۱۶. گزینه‌ی ۳

$$P_{(t)} = P_{(\circ)}e^{rt} \implies ۲P_{(\circ)} = P_{(\circ)}e^{\circ/۲t} \implies ۲ = e^{\circ/۲t}$$
$$\implies \circ/۲t = \ln ۲ \implies t = ۵\ln ۲$$

۱۷. گزینه‌ی ۴

$$L = xy + \lambda(۱۰۰ - x - ۲y)$$
$$L_x = y - \lambda = \circ \implies \lambda = y$$
$$L_y = x - ۲\lambda = \circ \implies \lambda = -\frac{x}{۲} \implies y = \frac{x}{۲} \implies x = ۲y$$
$$L_\lambda = ۱۰۰ - x - ۲y = \circ \implies ۱۰۰ - ۲y - ۲y = \circ \implies y = ۲۵ \implies \lambda = ۲۵$$

۱۸. گزینه‌ی ۱

$$\frac{dTC}{dx} = \circ \implies e^{x-۳} + (x-۳)e^{x-۳} = \circ \implies (۱ + x - ۳)e^{x-۳} = \circ$$
$$x - ۲ = \circ \implies x = ۲$$

۱۹. گزینه‌ی ۲

$$P(t) = P(\circ)e^{rt} \implies P(۲\circ) = P(\circ)e^{\circ/\circ۵\times ۲\circ} \implies P(۲\circ) = P(\circ)e$$

۲۰. گزینه‌ی ۲

$$TR = Px \implies TR = ۱۵x\ ,\ TC = FC + VC = ۶\circ\circ\circ\circ + (\circ/۶ \times ۱۵x)$$
$$TC = ۶\circ\circ\circ\circ + ۹x$$
$$TR = TC \implies ۱۵x = ۶\circ\circ\circ\circ + ۹x \implies ۶x = ۶\circ\circ\circ\circ \implies x = ۱\circ\circ\circ\circ$$

۲۱. گزینه‌ی ۱

$$A_t = A_\circ\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt} \implies ۲A_\circ = A_\circ\left(۱ + \frac{\circ/۱۲}{۱۲}\right)^{۱۲t} \implies ۲ = (۱ + \circ/\circ۱)۱۲t$$
$$\implies \ln ۲ = \ln(۱/\circ۱)^{۱۲t} \implies \ln ۲ = ۱۲t\ln ۱/\circ۱ \implies t = \frac{\ln ۲}{۱۲\ln ۱/\circ۱}$$

۲۲. گزینه‌ی ۱

$$TR = P\cdot x \implies = ۱۲\circ x\ ,\ TC = FC + VC = ۲\circ\circ\circ\circ\circ + ۱\circ\circ x$$
$$TR = TC \implies ۱۲\circ x = ۲\circ\circ\circ\circ\circ + ۱\circ\circ x \implies ۲\circ x = ۲\circ\circ\circ\circ\circ \implies x = ۱\circ\circ\circ\circ$$

۲۳. گزینه‌ی ۲

$$P_{(t)} = P_{(\circ)}e^{rt} = ۱\circ^۶(e^{\circ/۱\times ۴}) = ۱\circ^۶e^{\circ/۴}$$
$$\text{سود} = P_{(t)} - P_{(\circ)} = ۱\circ^۶e^{\circ/۴} - ۱\circ^۶ = ۱\circ^۶(e^{\circ/۴} - ۱)$$

۲۴. گزینه‌ی ۳

$$A_t = A_\circ\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt} \implies ۳A_\circ = A_\circ\left(۱ + \frac{\circ/۱۲}{۱۲}\right)^{۱۲t} \implies ۳ = (۱/\circ۱)^{۱۲t}$$
$$\log_۳ ۳ = \log_۳(۱/\circ۱)^{۱۲t} \implies ۱۲t\log_۳(۱/\circ۱) \implies t = \frac{۱}{۱۲\times \circ/\circ\circ۹} = ۹/۲۵$$

پس از ۹ سال و ۳ ماه

فصل ۱۳

آزمون‌های جامع

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۵)

«رشته‌های مدیریت و حسابداری»

۱. مجموعه $(A \cap B \cap C) \cup (A - B) \cup (A - C)$، برابر کدام است؟

۱) A ۲) $\varnothing$ ۳) $B \cup C$ ۴) $B \cap C$

۲. با استفاده از حروف کلمه بازرگان بدون توجه به معنا چند کلمه سه حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۳۵

۳. مجموع ضرایب جملات گویا در بسط $(2x + \sqrt{x})^5$ که متغیر x در آن عدد گویا می‌باشد، کدام است؟

۱) 2^5 ۲) 3^5 ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۲۲

۴. اگر f و g توابعی حقیقی در R باشند و داشته باشیم $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$ و $f \circ g(x) = \frac{4+x}{2x}$، مقدار $g(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{4x-8}{3x+4}$ ۲) $\frac{3x+4}{2x+1}$ ۳) $\frac{3x-4}{2x+5}$ ۴) $\frac{2x+2}{2x-1}$

۵. اگر $f(x)$ تابعی حقیقی در R باشد، کدام مورد صحیح نیست؟

۱) تابع $f(x) = x^2 + 1$، $x \in [-1, 2]$ تابعی زوج است.

۲) تابع $f(x) = \sin x$، فرد و غیر یک به یک

۳) تابع $f(x) = \cos x$ زوج و غیر یک به یک

۴) تابع $f(x) = \ln x$ نه فرد و نه زوج

۶. تولید کننده‌ای کالایی را تولید می‌کند، هزینه هر واحد ۵۰۰ تومان و هزینه ثابت ۱۰۰۰۰۰ تومان است. اگر قیمت فروش هر واحد ۶۰۰ تومان باشد، به ازای چه مقدار تولید سود بنگاه ۱۰۰۰۰۰ تومان خواهد شد؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۱۶۰۰ ۴) ۲۰۰۰

۷. به ازای کدام مقدار a حد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x \geq 2 \\ \frac{ax+5}{bx-1} & x < 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$، برابر ۹ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{3}{2}$

۸. نرخ تغییر تابع $\sqrt{x^۲+۳x}$ نسبت به $\frac{x}{x+۱}$ در نقطه $x=۱$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹. شرکتی می‌خواهد سود خود را از سطح ۸ میلیون تومان به ۲۰ میلیون تومان برساند، اگر افزایش سود، سالی ۱۵ در صد باشد، این کار چند سال طول می‌کشد؟

۱) $\frac{\ln ۱/۵}{\ln ۲/۵}$ ۲) $\frac{\ln ۲/۵}{\ln ۱/۱۵}$ ۳) $\frac{\ln ۲۰}{۱/۱۵ \ln ۸}$ ۴) $\frac{\ln ۲۰}{۸ \ln ۱/۱۵}$

۱۰. میزان قیمت یک کالا با نرخ ۶ درصد و میزان تولید ۴ در صد در سال افزایش یافته است. میزان فروش بنگاه چند درصد افزایش می‌یابد؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۱۱. اگر تابع حقیقی با ضابطه $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$ باشد $f^{-۱}(۱)$، کدام است؟

۱) $\ln(۱+\sqrt{۲})$ ۲) $\ln(۱+\sqrt{۵})$ ۳) $\ln(۲+\sqrt{۵})$ ۴) $\ln(۳+\sqrt{۲})$

۱۲. تابع $y=xe^{-x}$ در چه فاصله‌ای مقعر است؟

۱) $(-\infty,۴)$ ۲) $(-\infty,۳)$ ۳) $(-\infty,۲)$ ۴) R

۱۳. اگر هزینه‌ی کل تولید $TC=x^۲+۴$ باشد، می‌نیمم هزینه‌ی متوسط کدام است و بر روی کدام تابع قرار دارد؟

۱) $(۱,۲)$، هزینه نهایی ۲) $(۲,۴)$، هزینه کل ۳) $(۲,۴)$، هزینه نهایی ۴) $(۱,۵)$، هزینه کل

۱۴. حاصل $\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۳}{۴}x)^{\frac{۱}{۳x}}$ کدام است؟

۱) $e^{\frac{۲}{۴}}$ ۲) $e^{\frac{۴}{۴}}$ ۳) $\sqrt[۲]{e}$ ۴) $\sqrt[۴]{e}$

۱۵. مقدار انتگرال $\int_۰^۲ \frac{x^۲-۲}{x+۲}dx$، کدام است؟

۱) $\ln ۲-۱$ ۲) $۲\ln ۲-۲$ ۳) $\ln ۴-۱$ ۴) $۲\ln ۴-۲$

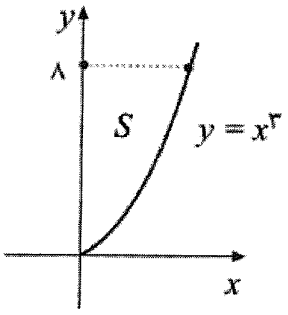
۱۶. اگر $\int \ln(۱+x^۲)dx=F(x)+c$، آنگاه $F(۱)$ کدام است؟

۱) $\ln ۲+(۱+\frac{\pi}{۴})$ ۲) $\ln ۲+۲(۱+\frac{\pi}{۴})$ ۳) $\ln ۲-۲(۱-\frac{\pi}{۴})$ ۴) $\ln ۲+(۱-\frac{\pi}{۴})$

۱۷. در نقطه $M(x,y)$ واقع بر منحنی تابع $y=f(x)$ شیب مماس به صورت $\frac{dy}{dx}=(x+۲)e^x$ است، اگر این منحنی از نقطه $(۰,۱)$ عبورکند، مقدار تابع در نقطه $x=\ln ۲$ کدام است؟

۱) $\ln ۲+۲$ ۲) $\ln ۲-۲$ ۳) $۲(\ln ۲+۱)$ ۴) $۲(\ln ۲-۱)$

۱۸. مساحت ناحیه S در شکل زیر، کدام است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۲
۳) ۱۰
۴) ۸

۱۹. دستگاه معادلات $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ x-y+2z=-3 \\ 2x-y+kz=2 \end{cases}$، به‌ازای کدام مقدار k فاقد جواب است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۲۰. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های قطری ماتریس A^{-1} است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۲۱. از نامساوی $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} > 0$، مقدار x کدام است؟

۱) $x<-2$ ۲) $x<-1$ ۳) $x<1$ ۴) $x<3$

۲۲. اگر $z=xf(\frac{y}{x})+yg(\frac{x}{y})$، در این صورت $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$، کدام است؟

۱) z ۲) $2z$

۳) $-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})+g'(\frac{x}{y})$ ۴) $-\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})+g'(\frac{x}{y})$

۲۳. طول و عرض نقطه بحرانی تابع با ضابطه $z=x^2+xy+4y-x$، کدام است؟

۱) $(-1,-2)$ ۲) $(-2,3)$ ۳) $(-3,-1)$ ۴) $(-4,9)$

۲۴. مختصات نقطه بحرانی تابع $z=x^2+y^2$ با شرط $x+3y=10$، کدام است؟

۱) $(1,3,10)$ ۲) $(4,2,18)$ ۳) $(7,1,50)$ ۴) $(10,0,100)$

۲۵. اگر داشته باشیم $x^3+y^2-3xy+xyz=0$، $z'_x+z'_y$ در نقطه $(1,1,1)$، کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۱. بخش (۱-۳۳)، صفحه‌ی ۱۰

$$\begin{aligned}(A\cap B\cap C)\cup(A-B)\cup(A-C) &= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B')\cap(A\cap C') \\ &= [A\cap(B\cap C)]\cup[A\cap(B'\cup C')] \\ &= [A\cap(B\cap C)]\cup[A\cap(B\cap C)'] \\ &= A\cap[(B\cap C)\cup(B\cap C)'] = A\cap M = A\end{aligned}$$

۲. گزینه‌ی ۴. چون حرف «الف»، ۲ بار تکرار شده است، ابتدا تعداد کلمات ۳ حرفی که می‌توان با حروف «الف، ب، ز، ر، گ، ن» نوشت پیدا می‌کنیم.

$$\boxed{6}\boxed{5}\boxed{4}=6\times5\times4=120$$

اکنون تعداد کلمات ۳ حرفی که شامل دو تا «الف» است، تعیین می‌کنیم.

$$\frac{۳!}{۲!} \times ۵ = ۱۵$$

پس ۱۳۵ = ۱۵ + ۱۲۰.

۳. گزینه‌ی ۴. بخش (۲-۱۷)، صفحه‌ی ۳۸

جملات اول و سوم و پنجم، جملات گویای بسط می‌باشند، زیرا در این جملات توانِ $(\sqrt{x})$، مضارب ۲ هستند.

$$\binom{۵}{۰}(۲x)^۵(\sqrt{x})^۰ + \binom{۵}{۲}(۲x)^۳(\sqrt{x})^۲ + \binom{۵}{۴}(۲x)(\sqrt{x})^۴ = ۳۲x^۵ + ۸۰x^۴ + ۱۰x^۳$$

$$\text{مجموع ضرایب جملات گویا} = ۳۲ + ۸۰ + ۱۰ = ۱۲۲$$

۴. گزینه‌ی ۱. بخش (۳-۹۰)، صفحه‌ی ۹۸

$$f \circ g(x) = \frac{۴ + x}{۲x} \Longrightarrow \frac{۳ - g(x)}{۲ + g(x)} = \frac{۴ + x}{۲x} \Longrightarrow ۸ + ۴g(x) + ۲x + xg(x) = ۶x - ۲xg(x)$$

$$\Longrightarrow ۴g(x) + ۳xg(x) = ۴x - ۸ \Longrightarrow g(x) = \frac{۴x - ۸}{۳x + ۴}$$

۵. گزینه‌ی ۱. بخش (۳-۹۴)، صفحه‌ی ۹۹

دامنه‌ی تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ یعنی $x \in [-۱, ۲]$ متقارن نیست، زیرا $۱/۵ \in D_f$ ولی $-۱/۵ \notin D_f$. پس این تابع نه زوج است و نه فرد.

۶. گزینه‌ی ۴. بخش (۱۲-۲۱). صفحه‌ی ۷۳۴

$$TC = ۱۰۰۰۰۰ + ۵۰۰x \ , \ TR = ۶۰۰x$$

$$\pi = TR - TC = ۶۰۰x - ۱۰۰۰۰۰ - ۵۰۰x = ۱۰۰x - ۱۰۰۰۰۰$$

$$۱۰۰۰۰۰ = ۱۰۰x - ۱۰۰۰۰۰ \Longrightarrow ۱۰۰x = ۲۰۰۰۰۰ \Longrightarrow x = ۲۰۰۰$$

۷. گزینه‌ی ۲. بخش (۴-۱۰)، صفحه‌ی ۱۶۶

$$\lim_{x \to ۲+} f(x) = \lim_{x \to ۲-} f(x) = ۹ \Longrightarrow ۴a + ۲b - ۱ = \frac{۲a + ۵}{۲b - ۱} = ۹ \Longrightarrow \begin{cases} ۴a + ۲b = ۱۰ \\ ۲a - ۱۸b = -۱۴ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۳۶a + ۱۸b = ۹۰ \\ ۲a - ۱۸b = -۱۴ \end{cases} \Longrightarrow ۳۸a = ۷۶ \Longrightarrow a = ۲$$

۸. گزینه‌ی ۴. بخش (۵-۳۵)، صفحه‌ی ۲۷۷

$$\frac{(\sqrt{x^۲ + ۳x})'}{(\frac{x}{x+۱})'} = \frac{\frac{۲x + ۳}{۲\sqrt{x^۲ + ۳x}}}{\frac{(x+۱) - x}{(x+۱)^۲}} \xrightarrow{x=۱} \frac{\frac{۵}{۲\sqrt{۴}}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

۹. گزینه‌ی ۲. بخش (۱۲-۲۹)، صفحه‌ی ۷۴۱

$$A_t = A_\circ(1+r)^t \Longrightarrow ۲\circ = ۸(۱+\circ/۱۵)^t \Longrightarrow ۲/۵ = (۱/۱۵)^t \Longrightarrow \ln ۲/۵ = t\ln ۱/۵$$
$$\Longrightarrow t = \frac{\ln ۲/۵}{\ln ۱/۱۵}$$

۱۰. گزینه‌ی ۳.

$$\text{فروش} = \text{قیمت} \times \text{میزان تولید} \Longrightarrow T = p\times x \Longrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta x}{x}$$
$$\Longrightarrow \dot{T} = \dot{p} + \dot{x} = ۶ + ۴ = ۱\circ$$

۱۱. گزینه‌ی ۱. بخش (۳-۱۱۲)، صفحه‌ی ۱۱۰

$$(a,b)\in f \Longrightarrow (b,a)\in f^{-۱}$$
$$\frac{e^x - e^{-x}}{۲} = ۱ \Longrightarrow e^x - \frac{۱}{e^x} = ۲ \Longrightarrow (e^x)^۲ - ۲(e^x) - ۱ = \circ \Longrightarrow e^x = \frac{۱\pm\sqrt{۱+۱}}{۱},\ e^x > \circ$$
$$\Longrightarrow e^x = ۱+\sqrt{۲} \Longrightarrow x = \ln(۱+\sqrt{۲})$$

۱۲. گزینه‌ی ۳. بخش (۵-۹۹)، صفحه‌ی ۳۱۵

$$y = xe^{-x} \Longrightarrow y' = e^{-x} - xe^{-x} \Longrightarrow y'' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (-۲+x)e^{-x}$$
$$y'' = \circ \Longrightarrow e^{-x} > \circ\ ,\ -۲+x = \circ \Longrightarrow x = ۲ \Longrightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & ۲ & \infty \\ \hline y'' & & - \ \circ\ + & \end{array}$$

۱۳. گزینه‌ی ۳. بخش (۱۲-۱۲)، صفحه‌ی ۷۲۹

$$AC = \frac{TC}{x} = x + \frac{۴}{x} \Longrightarrow AC' = \circ \Longrightarrow ۱ - \frac{۴}{x^۲} = \circ \Longrightarrow x = ۲$$
$$AC = ۲ + ۲ = ۴$$

نقطه می‌نیمم هزینه‌ی متوسط (AC) روی تابع هزینه نهایی (MC) قرار دارد.

۱۴. گزینه‌ی ۴. بخش (۴-۷۴)، صفحه‌ی ۲۰۵

$$\lim_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۳}{۴}x\right)^{\frac{۱}{۴x}} = \infty^{\circ}$$
$$\lim_{x\to\infty}(\text{توان})(\text{پایه}-۱) = \lim_{x\to\infty}(\frac{۱}{۳x})(۱+\frac{۳}{۴}x-۱) = \lim_{x\to\infty}\frac{۳x}{۱۲x} = \frac{۱}{۴}$$
$$\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۳}{۴}x)^{\frac{۱}{۴x}} = e^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{e}$$

۱۵. گزینه‌ی ۲. بخش (۶-۲۵)، صفحه‌ی ۳۹۹

$$\int \frac{x^۲-۲}{x+۲}dx = \int\left((x-۲)+\frac{۲}{x+۲}\right)dx$$

$$= \int (x-۲)dx + ۲\int \frac{۱}{x+۲}dx = \frac{x^۲}{۲} - ۲x + ۲\ln(x+۲) + C$$

$$\int_۰^۲ \frac{x^۲-۲}{x+۲}dx = \left(\frac{x^۲}{۲} - ۲x + ۲\ln(x+۲)\right)\Big]_۰^۲$$

$$= (۲ - ۴ + ۲\ln ۴) - (۰ - ۰ + ۲\ln ۲) = -۲ + ۲\ln ۲$$

۱۶. گزینه‌ی ۳. بخش‌های (۶-۳۳) و (۶-۳۴)، صفحه‌ی ۴۰۸

$$\begin{cases} u = \ln(۱+x^۲) \\ dv = dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \frac{۲x}{۱+x^۲}dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(۱+x^۲)dx = x\ln(۱+x^۲) - ۲\int \frac{x^۲}{۱+x^۲}dx = x\ln(۱+x^۲) - ۲\int \left(۱ - \frac{۱}{۱+x^۲}\right)dx$$

$$= x\ln(۱+x^۲) - ۲(x - \arctan x) + c = F(x) + c$$

$$F(۱) = \ln ۲ - ۲(۱ - \frac{\pi}{۴})$$

۱۷. گزینه‌ی ۳. بخش‌های (۶-۳۳) و (۶-۳۴)، صفحه‌ی ۴۰۸

$$dy = (x+۲)e^x dx \Longrightarrow y = \int (x+۲)e^x dx$$

$$\begin{cases} u = x+۲ \\ dv = e^x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$y = (x+۲)e^x - \int e^x dx = (x+۲)e^x - e^x + c \xrightarrow{(۰,۱)} ۲e^۰ - e^۰ + c = ۱ \Longrightarrow c = ۰$$

$$f(x) = (x+۲)e^x - e^x \Longrightarrow f(\ln ۲) = (\ln ۲ + ۲)e^{\ln ۲} - e^{\ln ۲} = (\ln ۲ + ۲)(۲) - ۲ = ۲(\ln ۲ + ۱)$$

۱۸. گزینه‌ی ۲. بخش (۶-۷۱)، صفحه‌ی ۴۳۵

$$y = ۸ \Longrightarrow x^۳ = ۸ \Longrightarrow x = ۲$$

$$S = \int_۰^۲ (۸ - x^۳)dx = (۸x - \frac{x^۴}{۴})\Big]_۰^۲ = (۱۶ - ۴) - ۰ = ۱۲$$

۱۹. گزینه‌ی ۳. بخش (۸-۱۰۷)، صفحه‌ی ۵۵۱

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & k \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (-k - ۱ + ۸) - (-۲ - ۲ + ۲k) = ۰ \Longrightarrow -۳k + ۱۱ = ۰ \Longrightarrow k = \frac{۱۱}{۳}$$

۲۰. گزینه‌ی ۲. بخش (۸-۷۲)، صفحه‌ی ۵۳۸

$$|A| = (۰ + ۲ + ۲) - (۰ + ۰ + ۱) = ۳$$

$$a_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۱ \ , \ a_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۱ \ , \ a_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} = -۴$$

مجموع عناصر قطر اصلی ماتریس A^{-1} با توجه به فرمول $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$ برابر است با:

$$\frac{1}{3}(-1-1-4) = -\frac{6}{3} = -2$$

۲۱. گزینه‌ی ۲. بخش (۸-۲۲)، صفحه‌ی ۵۱۷

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 0 & 1\\ 1 & 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} < 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix}1+2x+1 & -1+0+0 & 1+2+x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} < 0$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}2+2x & -1 & 3+x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} < 0$$

$$\Longrightarrow 2+2x-2+3+x < 0 \Longrightarrow 3x+3 < 0 \Longrightarrow x < -1$$

۲۲. گزینه‌ی ۱. بخش (۹-۳۵)، صفحه‌ی ۶۲۱

$$z(\lambda x, \lambda y) = \lambda x f(\frac{\lambda y}{\lambda x}) + \lambda y g(\frac{\lambda x}{\lambda y}) = \lambda(x f(\frac{y}{x}) + y g(\frac{x}{y})) \Longrightarrow n = 1$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz = 1 \times z = z$$

۲۳. گزینه‌ی ۴. بخش (۹-۴۵)، صفحه‌ی ۶۲۶

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y-1=0 \Longrightarrow -8+y-1=0 \Longrightarrow y=9 \\ x+4=0 \Longrightarrow x=-4 \end{cases} \Longrightarrow (-4,9)$$

۲۴. گزینه‌ی ۱. بخش (۹-۵۶)، صفحه‌ی ۶۳۶

$$x+3y=10 \Longrightarrow x=10-3y$$

$$z=(10-3y)^2+y^2=100-60y+9y^2+y^2=10y^2-60y+100$$

$$z'_y=0 \Longrightarrow 20y-60=0 \Longrightarrow y=3, x=10-9=1, z=1+9=10 \Longrightarrow (1,3,10)$$

۲۵. گزینه‌ی ۱. بخش (۹-۳۳)، صفحه‌ی ۶۱۹

$$z'_x = -\frac{3x^2-3y+yz}{xy},\ z'_y = -\frac{2y-3x+xz}{xy}$$

$$z'_x + z'_y \xrightarrow{(1,1,1)} = -\frac{3-3+1}{1} - \frac{2-3+1}{1} = -1-0 = -1$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۶)

«رشته‌های مدیریت و حسابداری»

۱. اگر A و B دو مجموعه غیر تهی و M مجموعه جهانی باشد، آنگاه $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A \cap B)']$، کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) M ۴) ϕ

۲. اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \sin \pi x$ باشد، برد تابع $g \circ f$، کدام است؟

۱) $[-۱, ۱]$ ۲) $[-۱, ۰]$ ۳) $[۰, ۱]$ ۴) $[۰, \frac{۱}{۲}]$

۳. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log \frac{x+۲}{x^۲}}$، کدام است؟

۱) $(۰, ۲]$ ۲) $(-۲, ۰)$ ۳) $(-۲, ۰) \cup (۰, ۱)$ ۴) $[-۱, ۰) \cup (۰, ۲]$

۴. اگر $x > ۰$; $f(x) = x - \frac{۱}{x}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(\frac{۳}{۲})$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۲

۵. در یک همایش، ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند، چندطریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد به‌طوری که بین سخنرانی دو فرد موردنظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۶. در بسط دو جمله‌ای $(۱ + \sqrt{۲})^{۱۵}$، مجموع جملات گویا را به کدام صورت می‌توان نوشت؟

۱) $\sum_{p=۰}^{۱۴} C_{۱۵}^{p} ۲^p$ ۲) $\sum_{p=۲}^{۱۴} C_{۱۵}^{p} (\sqrt{۲})^p$ ۳) $\sum_{p=۰}^{۷} C_{۱۵}^{۲p} ۲^p$ ۴) $\sum_{p=۰}^{۸} C_{۱۵}^{۲p-۱} ۲^p$

۷. در یک کارگاه تولیدی هر دستگاه در روز حداکثر ۵۰ واحد کالا تولید می‌کند، هزینه کارکرد هر دستگاه ۴۰۰ واحد پول و هزینه مواد اولیه هر واحد کالا ۵ واحد پول است. اگر هر واحد کالا ۱۵ واحد پول به فروش رود، تعداد کالا در نقطه سربه‌سر کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۸۰

۸. حد عبارت $\ln(\frac{۲-h}{۲})^{\frac{۱}{h}}$ وقتی $h \to ۰$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۹. حاصل $\lim_{n \to \infty} (\frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{n+۴} - \frac{n}{۲})$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۰. خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^۲ . \ln(x-۲)$ در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۲۷ ۲) -۲۴ ۳) -۱۸ ۴) -۱۵

۱۱. اگر $y = t^۳ - ۳t$ و $x = t^۲ + t$ باشد، مقدار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ به‌ازای $t = ۱$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۱۲. در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ae^{-x} & x\geqslant ۰ \\ x+\dfrac{b}{۱-x} & x<۰ \end{cases}$، مقدار $f'(۰)$ موجود است. $a\cdot b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۱۳. سود به‌طور پیوسته با نرخ ۱۲ درصد بر سرمایه‌ای افزوده می‌شود، پس از چه مدت سرمایه‌ای دو برابر خواهد شد؟ $(\ln ۲ = ۰/۶۹)$

۱) ۵ سال و ۶ ماه ۲) ۵ سال و ۹ ماه ۳) ۶ سال و ۳ ماه ۴) ۶ سال و ۵ ماه

۱۴. اگر x مقدارکالا و y قیمت یک واحد کالا باشد تابع تقاضا $y=-x^۲+۸x+۱۶$ و تابع هزینه $y=۲x^۲+x$ است. ماکزیمم سود چقدر است؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۷۵

۱۵. در تابع دومتغیری $z=\frac{x}{x+y}+\ln\sqrt{x^۲+y^۲}$، مقدار دیفرانسیل کامل z در نقطه $(۱,۲)$ به‌ازای $\Delta x=۰/۰۱$ و $\Delta y=۰/۰۲$، چقدر است؟

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۰۳ ۴) ۰/۰۴

۱۶. از رابطه $e^{۲x+y-z}=\frac{x^۲z}{y}-x$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(۱,۲,۴)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۷. بیشترین مقدار تابع $Z=x^۲+۲y^۲+۶xy$ با شرط $x+y=۱۲$، کدام است؟

۱) ۲۸۶ ۲) ۲۹۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۳۳۶

۱۸. اگر $f(x,y)=x^۲-y^۲+xy$ و $x=s^۲-\frac{۱}{t}$ و $y=۲s+\sqrt{t}$ باشد، مقدار $\frac{\partial f}{\partial t}$ به ازای $t=۱$ و $s=۲$، کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۶/۵ ۴) ۷/۵

۱۹. اگر $\ln A=\int_۲^۳\frac{dx}{x^۳+x}$ باشد، عدد A کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

۲۰. مساحت ناحیه محدود به دو منحنی به معادله $y=x^۲$ و $y=\sqrt{x}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۲۱. اگر x مقدارکالا و y قیمت یک واحد کالا و توابع عرضه و تقاضا به‌ترتیب $y=۲x+۳$ و $y=۱۸-x^۲$ باشند، مازاد مصرف کننده در نقطه تعادل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۲. شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در هر نقطه $M(x,y)$ واقع بر آن دو برابر حاصل‌ضرب طول در عرض آن نقطه است، نقطه عطف این منحنی درکدام ناحیه محورهای مختصات است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) فاقد عطف

۲۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۳ & -۱\\ ۰ & ۶ & -۲\\ ۰ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، به‌ازای کدام مقادیر λ ماتریس $A-\lambda I$ وارون‌پذیر نیست؟ (I ماتریس واحد است)

۱) $۲,۳,۵$ ۲) $۱,۴,۳$ ۳) $۲,۴,۵$ ۴) $۳,۴,۵$

۲۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، حاصل ماتریس $A^۲-۵A+۱۲I$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$

۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس X از معادله ماتریسی $A\cdot X=A^{-۱}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۲. بخش (۱-۳۳)، صفحه‌ی ۱۰

$$A\cap(A'\cup B)=(A\cap A')\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)=A\cap B$$
$$B\cap(A\cap B)'=B\cap(A'\cup B')=(B\cap A')\cup(B\cap B')=(B\cap A')\cup\phi=B\cap A'$$

بنابراین:

$$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A\cap B)']=(A\cap B)\cup(B\cap A')=B\cap(A\cup A')=B\cap M=B$$

۲. گزینه‌ی ۳. بخش‌های (۳-۳۹) و (۳-۷۷)، صفحه‌ی ۶۴ و ۸۷

$$g\circ f(x)=\sin\pi(x-\lfloor x\rfloor)$$
$$۰\leqslant x-\lfloor x\rfloor<۱\Longrightarrow ۰\leqslant\pi(x-\lfloor x\rfloor)<\pi$$

در بازه‌ی $[۰,\pi)$ کمترین مقدار سینوس صفر و بیشترین مقدار آن یک است.

$$\sin ۰=۰\quad,\quad \sin\frac{\pi}{۲}=۱$$

۳. گزینه‌ی ۴. بخش (۳-۶۵)، صفحه‌ی ۷۷

$$\log\frac{x+۲}{x^۲}\geqslant ۰\Longrightarrow\frac{x+۲}{x^۲}\geqslant ۱\Longrightarrow\frac{-x^۲+x+۲}{x^۲}\geqslant ۰\Longrightarrow$$

x		-۱		۰		۲	
p	$-$	۰	$+$	∞	$+$	۰	$-$

$$\Longrightarrow -۱\leqslant x<۰\ ,\ ۰<x\leqslant ۲ \qquad (۱)$$

$$\frac{x+۲}{x^۲}>۰\Longrightarrow$$

x		-۲		۰	
p	$-$	۰	$+$	∞	$+$

$$\Longrightarrow -۲<x<۰\quad \text{یا}\quad x>۰ \qquad (۲)$$

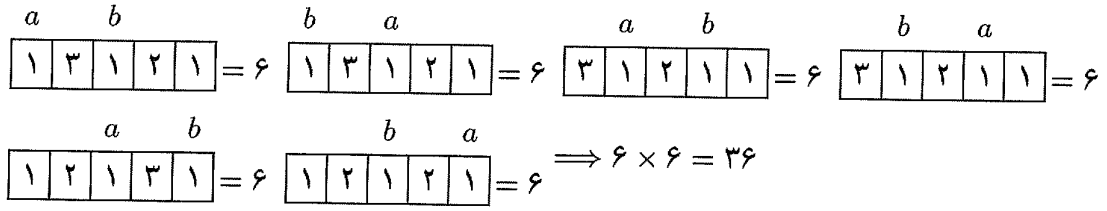
از مجموعه جواب‌های (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم:

$$D_f=[-۱,۰)\cup(۰,۲]$$

۴. گزینه‌ی ۴. بخش (۳-۱۱۲)، صفحه‌ی ۱۱۰

$$(a,b)\in f \Longrightarrow (b,a)\in f^{-1}\ ,\ x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}\Longrightarrow x=2\Longrightarrow f^{-1}(\frac{3}{2})=2$$

۵. گزینه‌ی ۳.



$$\Longrightarrow 6\times 6=36$$

۶. گزینه‌ی ۳. بخش (۲-۱۷)، صفحه‌ی ۳۸

بسط دو جمله‌ای دارای ۱۶ جمله به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{15} &= 1^{15}\times\sqrt{2}^{0}+C_{15}^{1}\times 1^{14}\times\sqrt{2}+C_{15}^{2}\times 1^{13}\times\sqrt{2}^{2}\\ &\quad +C_{15}^{3}\times 1^{12}\times\sqrt{2}^{3}+\cdots+C_{15}^{14}\times 1\times\sqrt{2}^{14}+1\times\sqrt{2}^{15}\\ &= 1+C_{15}^{1}\times\sqrt{2}+C_{15}^{2}\times 2+C_{15}^{3}\times 2\sqrt{2}+\cdots+C_{15}^{14}\times 2^{7}+128\sqrt{2}\end{aligned}$$

بنابراین جملات اول، سوم، پنجم، ...و پانزدهم، جملات گویای بسط دو جمله‌ای هستند.

$$\text{مجموع جملات گویا}=\sum_{p=0}^{7}C_{15}^{2p}2^{p}=C_{15}^{0}\times 2^{0}+C_{15}^{2}\times 2^{1}+C_{15}^{4}\times 2^{2}+\cdots+C_{15}^{14}\times 2^{7}$$

۷. گزینه‌ی ۳. بخش (۱۲-۱۷)، صفحه‌ی ۷۳۰

$$TR=p\cdot x\Longrightarrow TR=15x\ ;\ TC=FC+VC$$

اگر تعداد دستگاه‌ها برابر ۴ باشد، داریم:

$$TC=(4\times 400)+5x\Longrightarrow TC=1600+5x$$

در نقطه‌ی سربه‌سر:

$$TR=TC\Longrightarrow 15x=1600+5x\Longrightarrow 10x=1600\Longrightarrow x=160$$

۸. گزینه‌ی ۲. بخش (۴-۷۳)، صفحه‌ی ۲۰۴

$$\lim_{h\to 0}\ln(\frac{2-h}{2})^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\ln(1-\frac{1}{2}h)^{\frac{1}{h}}=\ln e^{-\frac{1}{2}\times 1}=-\frac{1}{2}\ln e=-\frac{1}{2}$$

۹. گزینه‌ی ۱. بخش‌های (۴-۶۱) و (۴-۷۱)، صفحه‌ی ۱۹۵ و ۲۰۲

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+2+\cdots+n}{n+4}-\frac{n}{2})=\lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+4}-\frac{n}{2})=\lim_{n\to\infty}(\frac{n^{2}+n}{2(n+4)}-\frac{n}{2})=\infty-\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^{2}+n}{2(n+4)}-\frac{n}{2})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2}+n-n(n+4)}{2(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{2n}=\frac{-3}{2}$$

۱۰. گزینه‌ی ۱. بخش‌های (۵-۵۱) و (۵-۵۴)، صفحه‌ی ۲۸۵ و ۲۸۷

$$x = ۳ \Longrightarrow y = ۹\ln ۱ = ۹ \times ۰ = ۰ \Longrightarrow \text{نقطه‌ی تماس } (۳, ۰)$$

$$f'(x) = ۲x\ln(x-۲) + x^۲ \cdot \frac{۱}{x-۲} \ , \quad m = f'(۳) = ۶\ln ۱ + ۹ \Longrightarrow m = ۹$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Longrightarrow y - ۰ = ۹(x - ۳) \ , \quad \text{محور } y\text{ها} : x = ۰ \Longrightarrow y = -۲۷$$

۱۱. گزینه‌ی ۱. بخش (۵-۳۴)، صفحه‌ی ۲۷۶

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{۳t^۲ - ۳}{۲t + ۱} = T$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{dT}{dx} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{۶t(۲t+۱) - ۲(۳t^۲ - ۳)}{(۲t+۱)^۲}}{۲t + ۱}$$

$$t = ۱ \Longrightarrow \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{\frac{۶(۲+۱) - ۲(۳-۳)}{(۲+۱)^۲}}{۲ + ۱} = \frac{۲}{۳}$$

۱۲. گزینه‌ی ۲. بخش (۵-۴۴)، صفحه‌ی ۲۸۲

$f'(۰)$ موجود است، بنابراین اولاً: مشتق راست و مشتق چپ در $x_۰ = ۰$ با هم برابرند:

$$f'(x_۰^+) = f'(x_۰^-) \Longrightarrow -ae^{-x} = ۱ + \frac{۰ + b}{(۱ - x)^۲} \Longrightarrow f'(۰^+) = f'(۰^-) \Longrightarrow -a = ۱ + b$$

ثانیاً: حد راست و حد چپ در نقطه‌ی $x_۰ = ۰$ با هم برابرند:

$$\lim_{x \to ۰^+} ae^{-x} = \lim_{x \to ۰^-} (x + \frac{b}{۱ - x}) \Longrightarrow a = b$$

در نتیجه:

$$-a = ۱ + a \Longrightarrow a = -\frac{۱}{۲} \ , \ b = -\frac{۱}{۲} \Longrightarrow a.b = \frac{۱}{۴}$$

۱۳. گزینه‌ی ۲. بخش (۱۲-۲۹)، صفحه‌ی ۷۴۱

$$k(t) = k(۰)e^{rt} \Longrightarrow ۲k(۰) = k(۰)e^{۰/۱۲t} \Longrightarrow ۲ = e^{۰/۱۲t} \Longrightarrow ۰/۱۲t = \ln ۲$$

$$\Longrightarrow t = \frac{\ln ۲}{۰/۱۲} = \frac{۰/۶۹}{۰/۱۲} = ۵/۷۵ \Longrightarrow \text{۵ سال و ۹ ماه}$$

۱۴. گزینه‌ی ۳. بخش (۱۲-۲۱)، صفحه‌ی ۷۳۴

$$TC = y = ۲x^۲ + x$$

$$TR = y \cdot x = -x^۳ + ۸x^۲ + ۱۶x$$

$$\pi = TR - TC = -x^۳ + ۸x^۲ + ۱۶x - ۲x^۲ - x = -x^۳ + ۶x^۲ + ۱۵x$$

$$\frac{d\pi}{dx} = ۰ \Longrightarrow -۳x^۲ + ۱۲x + ۱۵ = ۰ \Longrightarrow x = -۱ \text{ غ‌ق‌ق} \ , x = ۵$$

$$\max : \pi = -۱۲۵ + ۱۵۰ + ۷۵ = ۱۰۰$$

۱۵. گزینه‌ی ۱. بخش (۹-۲۴)، صفحه‌ی ۶۱۳

$$dz = z_x \cdot dx + z_y \cdot d_y$$

$$dz = (\frac{x+y-x}{(x+y)^۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲x}{x^۲+y^۲})dx + (\frac{-x}{(x+y)^۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲y}{x^۲+y^۲})dy$$

به ازای $(x=۱, y=۲)$ ، $\Delta x = ۰/۰۱$ ، $\Delta y = ۰/۰۲$

$$dz = (\frac{۱۹}{۴۵} \times \frac{۱}{۱۰۰}) + (\frac{۱۳}{۴۵} \times \frac{۲}{۱۰۰}) = \frac{۴۵}{۴۵۰۰} = \frac{۱}{۱۰۰} = ۰/۰۱$$

۱۶. گزینه‌ی ۲. بخش (۹-۳۳)، صفحه‌ی ۶۱۹

$$e^{۲x+y-z} = \frac{x^۲z}{y} - x \Longrightarrow \frac{x^۲z}{y} - x - e^{۲x+y-z} = ۰$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{۲xz}{y} - ۱ - ۲e^{۲x+y-z}}{\frac{x^۲}{y} + e^{۲x+y-z}}$$

به‌ازای $(x=۱, y=۲, z=۴)$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{۴ - ۱ - ۲e^{۰}}{\frac{۱}{۲} + e^{۰}} = -\frac{۲}{۳}$$

۱۷. گزینه‌ی ۴. بخش (۹-۵۶)، صفحه‌ی ۶۳۶

$$x + y = ۱۲ \Longrightarrow y = ۱۲ - x$$

$$z = x^۲ + ۲y^۲ + ۶xy = x^۲ + ۲(۱۲-x)^۲ + ۶x(۱۲-x) = -۳x^۲ + ۲۴x + ۲۸۸$$

$$z' = ۰ \Longrightarrow -۶x + ۲۴ = ۰ \Longrightarrow x = ۴, y = ۸$$

$$\max : z = ۱۶ + ۱۲۸ + ۱۹۲ = ۳۳۶$$

۱۸. گزینه‌ی ۴. بخش (۹-۳۲)، صفحه‌ی ۶۱۷

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (۲x + y) \cdot (\frac{۱}{t^۲}) + (-۲y + x) \cdot (\frac{۱}{۲\sqrt{t}})$$

$$t = ۱ \ , \ s = ۲ \Longrightarrow x = ۳ \ , \ y = ۵$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (۶ + ۵) \cdot (۱) + (-۱۰ + ۳) \cdot (\frac{۱}{۲}) = ۱۱ - \frac{۷}{۲} = ۷/۵$$

۱۹. گزینه‌ی ۴. بخش (۶-۲۹)، صفحه‌ی ۴۰۲

$$\int \frac{dx}{x^۳ + x} = \int \frac{dx}{x(x^۲+۱)}$$

$$x^۲ + ۱ = t \Longrightarrow ۲x\,dx = dt \Longrightarrow dx = \frac{dt}{۲x} \ , \ x^۲ = t - ۱$$

$$\int \frac{dx}{x(x^۲+۱)} = \int \frac{۱}{xt} \cdot \frac{dt}{۲x} = \int \frac{dt}{۲x^۲t} = \int \frac{dt}{۲(t-۱)t} = \frac{۱}{۲}\int \frac{dt}{(t-۱)t}$$

$$= \frac{۱}{۲}\int (\frac{۱}{t-۱} - \frac{۱}{t})dt = \frac{۱}{۲}[\ln(t-۱) - \ln t] = \frac{۱}{۲}\ln\frac{t-۱}{t}$$

$$= \frac{۱}{۲}\ln\frac{x^۲+۱-۱}{x^۲+۱} = \frac{۱}{۲}\ln\frac{x^۲}{x^۲+۱}$$

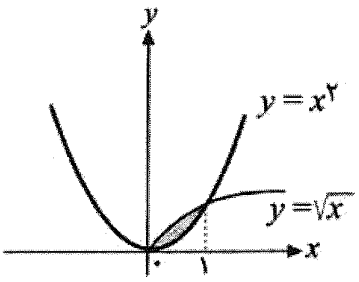
$$\int_{۲}^{۳} \frac{dx}{x^۳+x} = \frac{۱}{۲}\ln\frac{x^۲}{x^۲+۱}\Big]_{۲}^{۳} = \frac{۱}{۲}(\ln\frac{۹}{۱۰} - \ln\frac{۴}{۵}) = \frac{۱}{۲}\ln\frac{\frac{۹}{۱۰}}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۹}{۸}$$

$$= \ln\sqrt{\frac{۹}{۸}} = \ln\frac{۳}{۲\sqrt{۲}} = \ln\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \ln\frac{۳\sqrt{۲}}{۴} = \ln A \Longrightarrow A = \frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

۲۰. گزینه‌ی ۱. بخش (۶-۷۱)، صفحه‌ی ۴۳۵

$$S = \int_{۰}^{۱}(\sqrt{x} - x^۲)dx = \int_{۰}^{۱}(x^{\frac{۱}{۲}} - x^۲)dx$$

$$S = (\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۳}x^۳)\Big]_{۰}^{۱} = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$



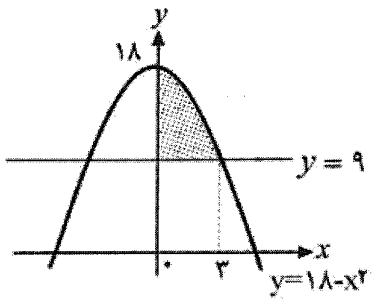
۲۱. گزینه‌ی ۴. بخش (۶-۷۱)، صفحه‌ی ۴۳۵

تعادل $۱۸ - x^۲ = ۲x + ۳ \Longrightarrow x^۲ + ۲x - ۱۵ = ۰ \Longrightarrow$

$(x+۵)(x-۳) = ۰ \Longrightarrow x = -۵, x = ۳$

مازاد مصرف کننده $= \int_{۰}^{۳}(۱۸ - x^۲ - ۹)dx = \int_{۰}^{۳}(۹ - x^۲)dx$

$$= (۹x - \frac{x^۳}{۳})\Big]_{۰}^{۳} = (۲۷ - ۹) - (۰) = ۱۸$$



۲۲. گزینه‌ی ۴. تست صفحه‌ی ۳۹۱، بخش (۵-۱۰۳)، صفحه‌ی ۳۱۹

$$m = ۲xy \Longrightarrow y' = ۲xy \Longrightarrow \frac{y'}{y} = ۲x \Longrightarrow \int\frac{dy}{y} = \int ۲x\,dx$$

$$\ln y = x^۲ + c \Longrightarrow y = e^{x^۲+c} = e^{x^۲}\cdot e^c \Longrightarrow y = ae^{x^۲}$$

$$y' = ۲axe^{x^۲} \Longrightarrow y'' = ۲ae^{x^۲} + ۴ax^۲e^{x^۲}$$

$y'' = ۰ \Longrightarrow ۲ae^{x^۲}(۱ + ۲x^۲) = ۰ \Longrightarrow$ ریشه‌ندارد

۲۳. گزینه‌ی ۳. بخش (۸-۶۹)، صفحه‌ی ۵۳۷

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} ۴ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۶ & -۲ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴-\lambda & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۶-\lambda & -۲ \\ ۰ & ۲ & ۱-\lambda \end{pmatrix}$$

ماتریس $A - \lambda I$ درصورتی وارون‌پذیر نیست که $|A - \lambda I| = ۰$ باشد.

$$\begin{vmatrix} ۴-\lambda & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۶-\lambda & -۲ \\ ۰ & ۲ & ۱-\lambda \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۴-\lambda)(۶-\lambda)(۱-\lambda) + ۴(۴-\lambda) = ۰$$

$$\Longrightarrow (۴-\lambda)[(۶-\lambda)(۱-\lambda)+۴]=۰$$
$$\Longrightarrow (۴-\lambda)(\lambda^{۲}-۷\lambda+۱۰)=۰ \Longrightarrow (۴-\lambda)(\lambda-۵)(\lambda-۲)=۰$$
$$\Longrightarrow \lambda=۴,۵,۲$$

۲۴. گزینه‌ی ۱. بخش‌های (۸-۲۲) و (۸-۱۸) و (۸-۱۵)، صفحه‌ی ۵۱۷ و ۵۱۶

$$A^{۲}-۵A+۱۲I=\begin{pmatrix}۲ & ۵\\ -۱ & ۳\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۲ & ۵\\ -۱ & ۳\end{pmatrix}-۵\begin{pmatrix}۲ & ۵\\ -۱ & ۳\end{pmatrix}+۱۲\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-۱ & ۲۵\\ -۵ & ۴\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۱۰ & ۲۵\\ -۵ & ۱۵\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۱۲ & ۰\\ ۰ & ۱۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}$$

۲۵. گزینه‌ی ۳. بخش (۸-۷۳)، صفحه‌ی ۵۳۸

$$A=\begin{pmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۴-۶}\begin{pmatrix}۴ & -۲\\ -۳ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۲ & ۱\\ \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{pmatrix}$$
$$AX=A^{-۱}\Longrightarrow |A\cdot X|=|A^{-۱}|\Longrightarrow |A|\cdot|X|=|A^{-۱}|\Longrightarrow (۴-۶)\cdot|X|=(۱-\frac{۳}{۲})$$
$$\Longrightarrow -۲|X|=-\frac{۱}{۲}\Longrightarrow |X|=\frac{۱}{۴}$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۷)

«رشته‌های مدیریت و حسابداری»

۱. دو مجموعه A و B به ترتیب دارای ۵ و ۹ عضو می‌باشند. به‌طوری‌که $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$ است. تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه $A\cap B$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲. به چند طریق می‌توان ۹ مهره یکسان را در شش قفسه که در یک ردیف قرار دارد جای داد به طوری که هیچ قفسه‌ای بدون مهره باقی نماند؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۴۲ ۴) ۵۶

۳. در بسط عبارت $(x^{۲}-\frac{۱}{x}+۳)^{۵}$، جمله‌ی فاقد x، کدا م است؟

۱) ۵۱۳ ۲) ۵۱۷ ۳) ۵۱۹ ۴) ۵۲۱

۴. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\text{Arcsin}\frac{۱+x^{۲}}{۲x}$، کدام است؟

۱) $\{-۱,۱\}$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $R-(-۱,۱)$

۵. برد تابع با ضابطه $f(x)=\log(x+\sqrt{x^{۲}-۱})$، کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $(-\infty,+\infty)$

۶. دو تابع f و g، با کدام ضابطه‌ها با یکدیگر برابرند؟

۱) $f(x)=۱$ و $g(x)=\frac{x}{x}$ ۲) $f(x)=x$ و $g(x)=(\sqrt{x})^{۲}$

۳) $f(x)=\log x^{۲}$ و $g(x)=۲\log x$ ۴) $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=(\frac{x-|x|}{۲})^{۲}$

۷. حاصل عبارت $\frac{۱}{x^{۲}}(\ln(۱+x)+\ln(۱-x))$ وقتی $x\to ۰$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) e

۸. اگر $\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۴}{۳}$ باشد، مشتق $f(\frac{۲}{x})$ به‌ازای $x=۲$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۹. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $\begin{cases}x=t^{۲}+۳t-۸\\ y=۲t^{۲}-۲t-۵\end{cases}$ در نقطه نظیر $t=۲$، نیمساز ناحیه سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۷ ۲) -۱۲ ۳) -۱۵ ۴) -۱۹

۱۰. حاصل $\lim_{x\to -۱}\frac{۱+\sqrt[۳]{۱+۲x}}{x+\sqrt{۲+x}}$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۱. هزینه‌ی ثابت برای تولید کالایی ۱۶۲۰۰ واحد پول و هزینه متغیر آن ۷۰ درصد فروش است. اگر قیمت فروش هر واحد کالا ۱۲۰ واحد پول باشد، تعداد واحد کالا در نقطه‌ی سربه‌سر، کدام است؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۲۰

۱۲. اگر $y = \frac{۲x+۱}{x-۲}$، $x = t^۲ - t$ و $t = \sqrt{۲p+۱}$ باشد، مقدار $\frac{dp}{dy}$ به‌ازای $p = ۴$، کدام است؟

۱) $-۱/۹۲$ ۲) $-۱/۳۶$ ۳) $۱/۰۸$ ۴) $۱/۷۲$

۱۳. جمعیت فعلی کشوری ۵۰ میلیون نفر است، نسبت متولدین ۳۲ در هزار و نسبت درگذشتگان ۱۲ در هزار این جمعیت است. اگر این روند به‌طور ثابت ادامه یابد جمعیت تقریبی این کشور بعد از ۳۰ سال چند میلیون نفر خواهد شد؟ $(e^{۰/۳} = ۱/۳)$

۱) ۷۹ ۲) ۸۲ ۳) ۷۸/۵ ۴) ۸۴/۵

۱۴. خطی به معادله‌ی $x + y = a$ قائم بر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۲x + \ln(x-۱)$ است. a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) صفر ۴) ۱

۱۵. از رابطه‌ی $e^{۲z-y} + x^۲z - xy^۳ = ۳۴$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(-۳, ۲, ۱)$، کدام است؟

۱) $\frac{-۱۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{-۳۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{-۳۵}{۱۱}$ ۴) $\frac{-۳۴}{۹}$

۱۶. دیفرانسیل کامل تابع $z = \frac{x-۲y}{x+y}$ در نقطه‌ی $(۱, ۲)$ به‌ازای $\Delta x = ۰/۰۵$ و $\Delta y = ۰/۰۱$، کدام است؟

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۰۱

۱۷. نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y) = ۲x^۳ - ۶xy + ۳y^۲$، چگونه است؟

۱) $(۰, ۰)$ می‌نیمم ۲) $(۰, ۰)$ ماکسیمم ۳) $(۱, ۱)$ می‌نیمم ۴) $(۱, ۱)$ ماکسیمم

۱۸. ماکسیمم مقدار تابع $f(x,y,z) = xyz$ با شرط $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱۲$، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۱۹. اگر $U = r^۲ \cdot \ln r$ و $r^۲ = x^۲ + y^۲$ باشد، حاصل $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$، کدام است؟

۱) $۴\ln r + ۴$ ۲) $۴\ln r + ۲$ ۳) $۲\ln r + ۴$ ۴) $\ln r + ۲$

۲۰. حاصل $\int_{-\infty}^{۰} e^x \sqrt{۱۶ + ۹e^x}\,dx$، کدام است؟

۱) $\frac{۶۱}{۹}$ ۲) $\frac{۵۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱۲۲}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۰۴}{۲۷}$

۲۱. مساحت ناحیهء محدود به منحنی به معادله‌ی $y = (x+۲)e^{-x}$ و محورهای مختصات واقع در ناحیه دوم، کدام است؟

۱) $e^۲ - ۱$ ۲) $e^۲ - ۳$ ۳) $۲e^۲ - ۴$ ۴) $\frac{۱}{۲}e^۲ - ۱$

۲۲. حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲ + ۲n}$، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۳. به‌ازای کدام مقدار a از دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x+y-z=۰ \\ x+ay+۳z=۰ \\ ۸x-y+۳z=۰ \end{cases}$، ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$، است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۲۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۳ \\ ۱ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، عنصر $a_{۳۲}$ در ماتریس $A^{-۱}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $-\frac{۲}{۹}$

۲۵. امتداد ویژه‌ی ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ نظیر مقدار ویژه کوچکتر، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} a \\ ۲a \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} a \\ -۲a \end{bmatrix}$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۲. بخش‌های (۱-۳۲) و (۱-۱۴)، صفحه‌ی ۹ و ۳

$$(A-B)\cup(B-A)=A\cup B \Longrightarrow A\cap B=\phi$$

$$(A\cap B)\text{ تعداد زیرمجموعه‌های } = ۲^{۰}=۱$$

۲. گزینه‌ی ۴.

$$\binom{۶}{۱}+۲\times\binom{۶}{۲}+\binom{۶}{۳}=۶+۳۰+۲۰=۵۶$$

۳. گزینه‌ی ۱. بخش‌های (۲-۲) و (۲-۱۳)، صفحه‌ی ۳۳ و ۳۶

با فرض $a=x^{۲}-\frac{۱}{x}$ و $b=۳$ داریم

$$(x^{۲}-\frac{۱}{x}+۳)^{۵}=(x^{۲}-\frac{۱}{x})^{۵}+\binom{۵}{۱}(x^{۲}-\frac{۱}{x})^{۴}(۳)+\binom{۵}{۲}(x^{۲}-\frac{۱}{x})^{۳}(۳)^{۲}+\binom{۵}{۳}(x^{۲}-\frac{۱}{x})^{۲}(۳)^{۳}+$$

$$\binom{۵}{۴}(x^{۲}-\frac{۱}{x})(۳)^{۴}+(۳)^{۵}=\cdots+\cdots+(۱۰)(۹)(۳)\cdots+\cdots+۲۴۳=۵۱۳$$

۴. گزینه‌ی ۱. بخش (۳-۷۰)، صفحه‌ی ۸۰

$$-۱ \leqslant \frac{۱+x^۲}{۲x} \leqslant ۱ \Longrightarrow \frac{۱+x^۲}{۲x} \leqslant ۱ \Longrightarrow \frac{۱+x^۲-۲x}{۲x} \leqslant ۰ \Longrightarrow \frac{(۱-x)^۲}{۲x} \leqslant ۰$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
p		$-$	∞	$+$	۰	$+$	

$$\Longrightarrow x \in (-\infty, ۰) \cup \{۱\} \quad (۱)$$

$$\frac{۱+x^۲}{۲x} \geqslant -۱ \Longrightarrow \frac{۱+x^۲+۲x}{۲x} \geqslant ۰ \Longrightarrow \frac{(۱+x)^۲}{۲x} \geqslant ۰$$

x	$-\infty$		-۱		۰		$+\infty$
p		$-$	۰	$-$	∞	$+$	

$$\Longrightarrow x \in (۰, +\infty) \cup \{-۱\} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Longrightarrow D_f = \{-۱, ۱\}$$

۵. گزینه‌ی ۳. بخش (۳-۷۵)، صفحه‌ی ۸۵

$$y = \log(x + \sqrt{x^۲ - ۱}) \Longrightarrow D_f : x \geqslant ۱$$

$$y' = \frac{۱ + \frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}}{x + \sqrt{x^۲ - ۱}} = \frac{\sqrt{x^۲ - ۱} + x}{(\sqrt{x^۲ - ۱})(x + \sqrt{x^۲ - ۱})}$$

y' همواره مخالف صفر است و y' به‌ازای $x = ۱$ وجود ندارد، پس

x	۱		$+\infty$
y'		$+$	
y	۰		$+\infty$

$$\Longrightarrow R_f = [۰, +\infty)$$

۶. گزینه‌ی ۴. بخش (۳-۷۹)، صفحه‌ی ۸۹

گزینه‌ی ۱: $D_f = \mathbb{R}$، $D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$، پس $f \neq g$. گزینه‌ی ۲: $D_f = \mathbb{R}$، $D_g = [۰, +\infty)$، پس $f \neq g$.

گزینه‌ی ۳: $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$، $D_g = (۰, +\infty)$، پس $f \neq g$. گزینه‌ی ۴: $D_f = \mathbb{R}$، $D_g = \mathbb{R}$ و می‌دانیم $|x|^۲ = x^۲$، پس:

$$g(x) = \frac{x^۲ + |x|^۲ + ۲x|x|}{۴} + \frac{x^۲ + |x|^۲ - ۲x|x|}{۴} = \frac{۴x^۲}{۴} = x^۲ = f(x)$$

۷. گزینه‌ی ۱. بخش (۴-۶۸)، صفحه‌ی ۱۹۹

$$\lim_{x \to ۰} \frac{۱}{x^۲}(\ln(۱+x) + \ln(۱-x)) = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to ۰} \frac{\frac{۱}{۱+x} - \frac{۱}{۱-x}}{۲x} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\frac{-۱}{(۱+x)^۲} - \frac{۱}{(۱-x)^۲}}{۲} = \frac{-۱-۱}{۲} = -۱$$

۸. گزینه‌ی ۴. بخش‌های (۵-۵) و (۵-۲۸)، صفحه‌ی ۲۵۷ و ۲۷۲

$$\lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \frac{۴}{۳} \Longrightarrow f'(۱) = \frac{۴}{۳}$$

$$y = f(\frac{۲}{x}) \Longrightarrow y' = \frac{-۲}{x^۲} f'(\frac{۲}{x}) \Longrightarrow y'(۲) = \frac{-۲}{۴} f'(۱) = -\frac{۲}{۴} \times \frac{۴}{۳} = -\frac{۲}{۳}$$

۹. گزینه‌ی ۴. بخش‌های (۵-۵۴) و (۵-۳۴)، صفحه‌ی ۲۸۷ و ۲۷۶

$$t=۲\Longrightarrow\begin{cases}x=۴+۶-۸\\ y=۸-۴-۵\end{cases}\Longrightarrow A\left|\begin{array}{c}۲\\ -۱\end{array}\right.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{۴t-۲}{۲t+۳}=\frac{۸-۲}{۴+۳}=\frac{۶}{۷}$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Longrightarrow y+۱=\frac{۶}{۷}(x-۲)$$

تلاقی با نیمساز ناحیه‌ی سوم $(y=x)$ برابر است با:

$$x+۱=\frac{۶}{۷}(x-۲)\Longrightarrow ۷x+۷=۶x-۱۲\Longrightarrow x=-۱۹$$

۱۰. گزینه‌ی ۳. بخش (۴-۶۸)، صفحه‌ی ۱۹۹

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۱+\sqrt[۳]{۱+۲x}}{x+\sqrt{x+۲}}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{(۱+۲x)^۲}}}{۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۴}{۹}$$

۱۱. گزینه‌ی ۱. بخش (۱۲-۱۷)، صفحه‌ی ۷۳۰

$$FC=۱۶۲۰۰\ ,\ VC=٪۷۰\times ۱۲۰x=۸۴x\Longrightarrow TC=۸۴x+۱۶۲۰۰$$

$$TR=TC\Longrightarrow ۱۲۰x=۸۴x+۱۶۲۰۰\Longrightarrow ۳۶x=۱۶۲۰۰\Longrightarrow x=۴۵۰$$

۱۲. گزینه‌ی ۱. بخش (۵-۲۵)، صفحه‌ی ۲۷۱

$$p=۴\Longrightarrow t=\sqrt{۸+۱}=۳\Longrightarrow x=۹-۳=۶\Longrightarrow y=\frac{۱۲+۱}{۴}=\frac{۱۳}{۴}$$

$$t=\sqrt{۲p+۱}\Longrightarrow t^۲=۲p+۱\Longrightarrow p=\frac{۱}{۲}(t^۲-۱)$$

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{dp}=\frac{۲(x-۲)-(۲x+۱)}{(x-۲)^۲}\cdot(۲t-۱)\cdot\frac{۲}{۲\sqrt{۲p+۱}}$$

$$\frac{dp}{dy}=\frac{-۵}{۱۶}\times ۵\times\frac{۱}{۳}=\frac{-۲۵}{۴۸}=-۱/۹۲$$

۱۳. گزینه‌ی ۴. بخش (۱۲-۲۹)، صفحه‌ی ۷۴۱

$$A_۰=۵۰\ ,\ r=۰/۰۳۲-۰/۰۱۲=۰/۰۲\ ,\ t=۳۰$$

$$A_t=A_۰e^{rt}\Longrightarrow A_{۳۰}=۵۰\times e^{۰/۰۲\times ۳۰}=۵۰\times e^{۰/۰۶}=۵۰(e^{۰/۳})^۲=۵۰(۱/۳)^۲=۸۴/۵$$

۱۴. گزینه‌ی ۳. بخش (۵-۵۶)، صفحه‌ی ۲۸۸

$$x+y=a\Longrightarrow y=-x+a\Longrightarrow m_۱=-۱$$

$$\frac{dy}{dx}=x-۲+\frac{۱}{x-۱}\Longrightarrow f'(x_۰)=m_۲\Longrightarrow x_۰-۲+\frac{۱}{x_۰-۱}=m_۲$$

$$m_۱\cdot m_۲=-۱\Longrightarrow x_۰-۲+\frac{۱}{x_۰-۱}=۱\Longrightarrow x_۰(x_۰-۱)+۱=۳(x_۰-۱)\Longrightarrow$$

$$x_۰^۲-۴x_۰+۴=۰\Longrightarrow x_۰=۲\Longrightarrow y_۰=۲-۴+۰=-۲\ ,\ ۲-۲=a\Longrightarrow a=۰$$

۱۵. گزینه‌ی ۳. بخش (۹-۳۳)، صفحه‌ی ۶۱۹

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-e^{۲z-y} - ۳xy^۲}{۲e^{۲z-y} + x^۲} \Longrightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-۳,۲,۱)} = -\frac{-e^{۰} + ۳۶}{۲e^{۰} + ۹} = \frac{-۳۵}{۱۱}$$

۱۶. گزینه‌ی ۲. بخش (۹-۲۴)، صفحه‌ی ۶۱۳

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y$$

$$dz = \frac{x+y-x+۲y}{(x+y)^۲}\cdot\Delta x + \frac{-۲x-۲y-x+۲y}{(x+y)^۲}\cdot\Delta y$$

$$dz = \frac{۳y}{(x+y)^۲}\cdot\Delta x - \frac{۳x}{(x+y)^۲}\cdot\Delta y$$

در نقطه‌ی $(۲, ۱)$ به‌ازای $\Delta x = ۰/۰۵$ و $\Delta y = ۰/۰۱$ داریم:

$$dz = \frac{۶}{۹}(۰/۰۵) - \frac{۳}{۹}(۰/۰۱) = ۰/۰۳$$

۱۷. گزینه‌ی ۳. بخش (۹-۵۲)، صفحه‌ی ۶۳۰

$$\begin{cases} z_x = ۶x^۲ - ۶y = ۰ \Longrightarrow ۶x^۲ - ۶x = ۰ \\ z_y = -۶x + ۶y = ۰ \Longrightarrow x = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \\ x = ۱ \Longrightarrow y = ۱ \end{cases}$$

$$z_{xx} = ۱۲x \ , \ z_{xy} = z_{yx} = -۶ \ , \ z_{yy} = ۶$$

$$|H_۱| = ۱۲x \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۱۲x & -۶ \\ -۶ & ۶ \end{vmatrix}$$

در نقطه‌ی $(۰, ۰)$:

$$|H_۱| = ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۰ & -۶ \\ -۶ & ۶ \end{vmatrix} = ۰ - ۳۶ < ۰$$

در نقطه‌ی $(۱, ۱)$:

$$|H_۱| = ۱۲ > ۰ \ , \ |H_۲| = \begin{vmatrix} ۱۲ & -۶ \\ -۶ & ۶ \end{vmatrix} = (۱۲ \times ۶) - ۳۶ > ۰ \Longrightarrow \min(۱, ۱)$$

۱۸. گزینه‌ی ۲. بخش (۹-۵۷)، صفحه‌ی ۶۳۷

$$L = xyz + \lambda(۱۲ - x^۲ - y^۲ - z^۲)$$

$$\left.\begin{aligned} L_x = yz - ۲\lambda x = ۰ \Longrightarrow \lambda = \frac{yz}{۲x} \Longrightarrow x^۲ = y^۲ \\ L_y = xz - ۲\lambda y = ۰ \Longrightarrow \lambda = \frac{xz}{۲y} \Longrightarrow y^۲ = z^۲ \\ L_z = xy - ۲\lambda z = ۰ \Longrightarrow \lambda = \frac{xy}{۲z} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x^۲ = y^۲ = z^۲$$

$$L_\lambda = ۱۲ - x^۲ - y^۲ - z^۲ = ۰ \Longrightarrow ۱۲ - x^۲ - x^۲ - x^۲ = ۰ \Longrightarrow x^۲ = ۴ \Longrightarrow y^۲ = z^۲ = ۴$$

پس $x = y = z = ۲$ در نتیجه $f(۲, ۲, ۲) = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$.

۱۹. گزینه‌ی ۲. بخش (۹-۲۲)، صفحه‌ی ۶۱۲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(2r\cdot\ln r + r^2\cdot\frac{1}{r}\right)\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2r\cdot\ln r + r)\left(\frac{x}{r}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x\cdot\ln r + x) = 2\ln r + 1$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(2r\cdot\ln r + r^2\cdot\frac{1}{r}\right)\left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2r\cdot\ln r + r)\left(\frac{y}{r}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(2y\cdot\ln r + y) = 2\ln r + 1$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\ln r + 1 + 2\ln r + 1 = 4\ln r + 2$$

۲۰. گزینه‌ی ۳. بخش‌های (۶-۲۹) و (۶-۷۸)، صفحه‌ی ۴۰۲ و ۴۴۰

$$u = 16 + 9e^x \Longrightarrow du = 9e^x dx \Longrightarrow \frac{du}{9} = e^x dx$$
$$\int e^x\sqrt{16+9e^x}\,dx = \frac{1}{9}\int\sqrt{u}\,du = \frac{1}{9}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{9}\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{27}\sqrt{(16+9e^x)^3}$$
$$\int_{-\infty}^{0} e^x\sqrt{16+9e^x}\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 e^x\sqrt{16+9e^x}\,dx = \frac{2}{27}(16+9e^x)\sqrt{16+9e^x}\Big|_{-\infty}^{0}$$
$$= \frac{2}{27}(25)\sqrt{25} - \frac{2}{27}(16)\sqrt{16} = \frac{122}{27}$$

۲۱. گزینه‌ی ۲. بخش (۶-۷۰)، صفحه‌ی ۴۳۵

تلاقی با محور xها : $y = 0 \Longrightarrow (x+2)e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = -2 \Longrightarrow (-2, 0)$

تلاقی با محور yها : $x = 0 \Longrightarrow (0+2)e^0 = y \Longrightarrow y = 2 \Longrightarrow (0, 2)$

$$\int (x+2)e^{-x}dx = (x+2)e^{-x} - \int e^{-x}dx = (x+2)e^{-x} + e^{-x} = (x+3)e^{-x}$$
$$S = \int_{-2}^{0}(x+2)e^{-x}dx = (x+3)e^{-x}\Big|_{-2}^{0} = e^2 - 3$$

$f(x)$ و مشتق‌هایش		$f(x)$ و انتگرال‌هایش
$x+2$	$+$	e^{-x}
1	$-$	$-e^{-x}$
0		e^{-x}

۲۲. گزینه‌ی ۲. بخش (۱۱-۱۲)، صفحه‌ی ۷۰۹

(قاعدهٔ تلسکوپی) اگر f تابعی بر مجموعه‌ی اعداد صحیح باشد، آن‌گاه:

$$\sum_{i=۱}^{n}(f(k)-f(k+۱))=f(۱)-f(n+۱)$$

پس:

$$S_n=\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k(k+۱)}$$

اکنون عبارت $\frac{۱}{k(k+۱)}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\frac{۱}{k(k+۱)}=\frac{k+۱-k}{k(k+۱)}=\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}$$

$$S_n=\sum_{k=۱}^{n}(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱})=۱-\frac{۱}{n+۱}$$ بنابر قاعدهٔ تلسکوپی

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(۱-\frac{۱}{n+۱})=۱$$

۲۳. گزینه‌ی ۳. بخش (۸-۱۱۰)، صفحه‌ی ۵۵۲

$$\begin{vmatrix}۲ & ۱ & -۱\\ ۱ & a & ۳\\ ۸ & -۱ & ۳\end{vmatrix}=۰\Longrightarrow(۶a+۱+۲۴)-(-۸a+۳-۶)=۰\Longrightarrow a=-۲$$

۲۴. گزینه‌ی ۱. بخش (۸-۷۲)، صفحه‌ی ۵۳۸

$$|A|=(۰+۶+۳)-(۰)=۹\ ,\ a_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & -۳\end{vmatrix}=۱$$

$A^{-۱}$ عنصر $a_{۳۲}$ در ماتریس $=\frac{۱}{۹}\times۱=\frac{۱}{۹}$

۲۵. گزینه‌ی ۱. بخش (۸-۱۱۱)، صفحه‌ی ۵۵۲

$$k^۲-(trA)k+|A|=۰\Longrightarrow k^۲-۳k+۲=۰\Longrightarrow k=۱\ ,\ k=۲$$

$$AX=kX\Longrightarrow\begin{pmatrix}۳ & -۲\\ ۱ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_۱\\ x_۲\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x_۱\\ x_۲\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}۳x_۱-۲x_۲=kx_۱\\ x_۱=kx_۲\end{cases}\xrightarrow{k=۱}\begin{cases}۳x_۱-۲x_۲=x_۱\\ x_۱=x_۲\end{cases}$$

جواب‌های این دستگاه عبارتند از کلیه نقاط واقع بر خط $x_۱=x_۲$، پس بردار ویژه نظیر $k=۱$ عبارت است از $\{(x_۱,x_۲)|x_۱=x_۲\}$.

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۸)

«رشته‌های مدیریت و حسابداری»

۱. مجموعه A متشکل از تمام اعداد طبیعی دو رقمی است و $B = \{۷k | k \in A\}$، متمم مجموعه $A' \cup B'$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

۲. دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{۲ - \log(x^۲ + ۱۵x)}$، کدام است؟

۱) $(۰, +\infty)$ ۲) $(-\infty, -۱۵)$

۳) $(۰, ۵] \cup [-۲۰, -۱۵)$ ۴) $(۰, ۵) \cup (-۲۰, -۱۵)$

۳. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ۲^x + (\frac{۱}{۲})^x$ محور تقارن خود را در نقطهٔ A قطع می‌کند. فاصله A از نقطه $(\frac{۳}{۲}, ۰)$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴. نمودار معکوس تابع $y = x^۲ - ۲x + ۳; x \geqslant ۱$ خط به معادله $y = x - ۳$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵. حاصل $\lim\limits_{x \to ۲^-} \frac{x - \sqrt{x+۲}}{|x^۲ - ۴|}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۶. حدّ عبارت $\left(\frac{۲n-۱}{۲n+۳}\right)^{\frac{n}{۲}}$ وقتی $n \to +\infty$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{e}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{e}}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۷. خط به معادله $۲y + ۱ = ۰$ مجانب نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{ax^۲ + ۵x - ۳}$ است، با تعریف کدام مقدار برای $f(۱)$ این منحنی در نقطه $x = ۱$ پیوسته است؟

۱) -۳ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۲

۸. اگر $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۳}}$ باشد، مشتق تابع $f(\sqrt{۱+x})$ به‌ازای $x = ۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۹. خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^۲ - \ln(۳x - ۵)$ در نقطه $x = ۲$ واقع بر آن، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(۳, ۱)$ ۲) $(۴, ۱)$ ۳) $(۳, ۵)$ ۴) $(۴, ۵)$

۱۰. بیش‌ترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x+۲)e^{-x}$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $e^۲$ ۳) e ۴) بی‌نهایت بزرگ

۱۱. منحنی تابع با ضابطه $y = (x-2)e^x$ امتداد مجانب خود را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲. اگر $y = \ln\sqrt{x^2-2x}$ و $x = \frac{2t-1}{t+2}$ باشد، مقدار $\frac{dt}{dy}$ به‌ازای $t=-7$، کدام است؟

۱) ۳٫۵ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷٫۵

۱۳. اندازه مشتق مرتبه دوم تابع $y = \frac{\ln x}{x}$ به‌ازای $x=1$، کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴. اگر $f(x) = x^3 + 2x - 1$ باشد. اندازه مشتق $f^{-1}(x)$ در نقطه $(-1, 0)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۵

۱۵. در تابع دو متغیری $z = \frac{x^2+y^2}{x+y}$، حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$، کدام است؟

۱) $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$ ۲) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ ۳) $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ ۴) $\frac{x^3+y^3}{(x+y)^2}$

۱۶. دامنه تابع دو متغیری $z = \sqrt{\ln(x^2+y^2)}$ نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد چگونه است؟

۱) فقط خارج دایره ۲) فقط داخل دایره ۳) روی یا خارج دایره ۴) روی یا داخل دایره

۱۷. نقطه بحرانی تابع دو متغیری $z = 2x^2 + y^2 - 3xy - 2x + 2y$، چگونه است؟

۱) زینی ۲) عطف ۳) ماکسیمم ۴) می‌نیمم

۱۸. کم‌ترین مقدار تابع $z = x^2 + y^2$ با شرط $2x + 3y = 26$، کدام است؟

۱) ۳۸ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۵۲

۱۹. حاصل $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x}$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\ln\frac{3}{2}$ ۴) $\ln\frac{4}{3}$

۲۰. مساحت محدود به منحنی $y = x^2e^x$ و محور xها و خط به معادله $x=1$، کدام است؟

۱) $e-1$ ۲) $e-2$ ۳) $2e-1$ ۴) $\frac{1}{2}(e-1)$

۲۱. اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{bmatrix}$ و n عدد فرد طبیعی باشد به‌ازای کدام مقادیر a رابطه ماتریسی $A^n = A$ برقرار است؟

۱) فقط $a=0$ ۲) فقط $a=1$ ۳) هر چه باشد a ۴) هیچ مقدار a

۲۲. بیش‌ترین مقدار $2x + 3y$ با توجه به محدودیت‌های $x + 2y \leqslant 4$، $2x + y \leqslant 6$، $x \geqslant 0$ و $y \geqslant 0$، کدام است؟

۱) $\frac{19}{3}$ ۲) $\frac{22}{3}$ ۳) $\frac{25}{3}$ ۴) $\frac{26}{3}$

۲۳. به‌ازای کدام مقدار a بردارهای $(3, 1, 0)$، $(-1, 2, 1)$ و $(4, a, 1)$ بستگی خطی دارند؟

۱) $\frac{19}{3}$ ۲) $\frac{22}{3}$ ۳) $\frac{25}{3}$ ۴) $\frac{29}{3}$

۲۴. از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۴ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۰$ $[x \;\; ۲ \;\; y]$، کدام رابطه حاصل می‌شود؟

۱) $y = ۲۷x + ۴۸$ ۲) $y = ۱۲x + ۱۷$ ۳) $۱۹x + ۳y = ۴۱$ ۴) نشدنی

۲۵. اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس $A^{-۱}$ درایه سطر دوم و ستون سوم کدام است؟

۱) صفر ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۲. بخش‌های (۱-۳۳) و (۱-۲۶)، صفحه‌ی ۱۰ و ۷

$$A = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, \ldots, ۹۹\}, \quad B = \{۷۰, ۷۷, ۸۴, ۹۱, ۹۸, \ldots, ۶۹۳\}$$
$$(A' \cup B')' = (A')' \cap (B')' = A \cap B = \{۷۰, ۷۷, ۸۴, ۹۱, ۹۸\}$$

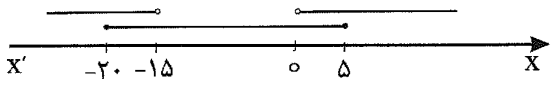
۲. گزینه‌ی ۲. بخش (۳-۶۵)، صفحه‌ی ۷۷

$$۲ - \log(x^۲ + ۱۵x) \geqslant ۰ \Longrightarrow \log(x^۲ + ۱۵x) \leqslant ۲ \Longrightarrow x^۲ + ۱۵x - ۱۰۰ \leqslant ۰$$

$$(x + ۲۰)(x - ۵) \leqslant ۰ \Longrightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -۲۰ & & ۵ & \\ \hline p & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array} \Longrightarrow [-۲۰, ۵] \quad (۱)$$

$$x^۲ + ۱۵x > ۰ \Longrightarrow x(x + ۱۵) > ۰ \Longrightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -۱۵ & & ۰ & \\ \hline p & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}$$
$$\Longrightarrow x \in (-\infty, -۱۵) \cup (۰, +\infty) \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم:



$$D_f = [-۲۰, -۱۵) \cup (۰, ۵]$$

۳. گزینه‌ی ۲. بخش (۳-۹۶)، صفحه‌ی ۱۰۲

$$f(-x) = ۲^{-x} + (\frac{۱}{۲})^{-x} = (\frac{۱}{۲})^{x} + ۲^{x} = f(x)$$

f تابعی زوج است. بنابراین محور yها یا خط $x = ۰$، محور تقارن نمودار تابع f است.

$$x = ۰ \Longrightarrow y = ۲^{۰} + (\frac{۱}{۲})^{۰} = ۲ \Longrightarrow A(۰, ۲) \;,\; B(\frac{۳}{۲}, ۰)$$
$$AB = \sqrt{(\frac{۳}{۲} - ۰)^۲ + (۰ - ۲)^۲} = \sqrt{\frac{۹}{۴} + ۴} = \frac{۵}{۲}$$

۴. گزینه‌ی ۴. بخش (۳-۱۱۱)، صفحه‌ی ۱۱۰

$$y = x^۲ - ۲x + ۳ \Longrightarrow x^۲ - ۲x + ۳ - y = ۰$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a} = ۱ \pm \sqrt{۱ - (۳ - y)} = ۱ \pm \sqrt{-۲ + y}$$

و چون $x \geqslant ۱$، پس $y = f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{-۲ + x}$.

$$\begin{cases} y = x - ۳ \\ y = ۱ + \sqrt{-۲ + x} \end{cases} \Longrightarrow x - ۳ = ۱ + \sqrt{-۲ + x} \Longrightarrow x = ۶$$

۵. گزینه‌ی ۲. بخش‌های (۴-۳۰) و (۴-۶۸)، صفحه‌ی ۱۷۷ و ۱۹۹

$$x \to ۲^- : \underbrace{|x^۲ - ۴|}_{-} = -(x^۲ - ۴)$$

$$\lim_{x \to ۲^-} \frac{x - \sqrt{x+۲}}{-(x^۲ - ۴)} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to ۲^-} \frac{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}{-۲x} = \frac{۱ - \frac{۱}{۴}}{-۴} = -\frac{۳}{۱۶}$$

۶. گزینه‌ی ۱. بخش (۴-۷۴)، صفحه‌ی ۲۰۵

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{۲n-۱}{۲n+۳}\right)^{\frac{n}{۲}} = ۱^{\infty}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \text{توان } (۱ - \text{پایه}) \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{۲}\left(\frac{۲n-۱}{۲n+۳} - ۱\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{۲}\left(\frac{-۴}{۲n+۳}\right) \Longrightarrow$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-۴n}{۴n+۶} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-۴n}{۴n} = -۱$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{۲n-۱}{۲n+۳}\right)^{\frac{n}{۲}} = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

۷. گزینه‌ی ۲. بخش‌های (۴-۱۱۱) و (۴-۸۰)، صفحه‌ی ۲۲۳ و ۲۰۷

خطِ $y = \frac{-۱}{۲}$ یا $۲y + ۱ = ۰$، مجانب افقی نمودار تابع f است.

$$\lim_{n \to \pm\infty} f(x) = \frac{x^۲}{ax^۲} \Longrightarrow \frac{۱}{a} = \frac{-۱}{۲} \Longrightarrow a = -۲ \Longrightarrow f(x) = \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{-۲x^۲ + ۵x - ۳}$$

تابع در نقطه $x = ۱$ وقتی پیوسته است که $\lim_{x \to ۱} f(x) = f(۱)$، پس:

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{-۲x^۲ + ۵x - ۳} = \frac{۰}{۰} \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to ۱} \frac{۲x - ۳}{-۴x + ۵} = -۱ = f(۱)$$

۸. گزینه‌ی ۴. بخش‌های (۵-۱۱) و (۵-۲۸)، صفحه‌ی ۲۶۰ و ۲۷۲

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۳}} = f'(x)$$

$$y = f(\sqrt{۱+x}) \Longrightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} f'(\sqrt{۱+x}) = \frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}} \cdot \frac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{۱ + (\sqrt{۱+x})^۳}}$$

$$x = ۳ \Longrightarrow y' = \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

۹. گزینه‌ی ۳. بخش (۵-۵۴)، صفحه‌ی ۲۸۷

$$x=۲\Longrightarrow y=۴-\ln ۱=۴\Longrightarrow A(۲,۴)$$
$$f'(x)=۲x-\frac{۳}{(۳x-۵)}\Longrightarrow m=f'(۲)=۴-۳=۱$$
$$y-۴=(x-۲)\Longrightarrow y=x+۲\xrightarrow{(۳,۵)}۵=۳+۲$$

۱۰. گزینه‌ی ۳. بخش (۵-۷۸)، صفحه‌ی ۳۰۱

$$f'(x)=۰\Longrightarrow e^{-x}-(x+۲)e^{-x}=۰\Longrightarrow(-x-۱)e^{-x}=۰\Longrightarrow x=-۱$$
$$y=f(-۱)=(-۱+۲)e=e\Longrightarrow$$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	
y'	$-\infty$	$\nearrow$	e (max)	$\searrow$	۰

۱۱. گزینه‌ی ۴. بخش (۴-۱۱۱)، صفحه‌ی ۲۲۳

$$\lim_{n\to-\infty}(x-۲)e^{x}=۰\Longrightarrow y=۰ \text{ مجانب افقی}$$
$$\begin{cases}y=(x-۲)e^{x}\\ y=۰\end{cases}\Longrightarrow(x-۲)e^{x}=۰\Longrightarrow x-۲=۰\Longrightarrow x=۲$$

۱۲. گزینه‌ی ۴. بخش (۵-۲۵)، صفحه‌ی ۲۷۱

$$x=\frac{۲t-۱}{t+۲},\quad y=\ln\sqrt{x^{۲}-۲x}=\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}-۲x)$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲x-۲}{x^{۲}-۲x}\cdot\frac{۲t+۴-۲t+۱}{(t+۲)^{۲}}=\frac{x-۱}{x^{۲}-۲x}\cdot\frac{۵}{(t+۲)^{۲}}$$
$$t=-۷\Longrightarrow x=\frac{-۱۴-۱}{-۷+۲}=۳$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{۳-۱}{۹-۶}\times\frac{۵}{۲۵}=\frac{۲}{۱۵}\Longrightarrow\frac{dt}{dy}=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

۱۳. گزینه‌ی ۱. بخش (۵-۲۲)، صفحه‌ی ۲۶۷

$$y'=\frac{\frac{۱}{x}\cdot x-\ln x}{x^{۲}}=\frac{۱-\ln x}{x^{۲}}=y''=\frac{-\frac{۱}{x}\cdot x^{۲}-۲x(۱-\ln x)}{x^{۴}}$$
$$y''(۱)=\frac{-۱-۲}{۱}=-۳$$

۱۴. گزینه‌ی ۲. بخش (۵-۳۷)، صفحه‌ی ۲۷۷

$x=-۱$ مربوط به تابع معکوس، عرض تابع اصلی است، یعنی:

$$x^{۳}+۲x-۱=-۱\Longrightarrow x(x^{۲}+۲)=۰\Longrightarrow x=۰$$
$$(f^{-۱})'(x)=\frac{۱}{۳x^{۲}+۲}\Longrightarrow(f^{-۱})'(۰)=\frac{۱}{۰+۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۵. گزینه‌ی ۳. بخش‌های (۹-۳۴) و (۹-۳۵)، صفحه‌ی ۶۲۰ و ۶۲۱

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^{۲}+(\lambda x)^{۲}}{\lambda x+\lambda y}=\frac{\lambda(x^{۲}+y^{۲})}{x+y}\Longrightarrow n=۱$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=n\cdot z=z=\frac{x^{۲}+y^{۲}}{x+y}$$

۱۶. گزینه‌ی ۳. بخش (۹-۵)، صفحه‌ی ۶۰۲

$$\begin{cases}\ln(x^{۲}+y^{۲})\geqslant ۰\Longrightarrow x^{۲}+y^{۲}\geqslant e^{۰}\Longrightarrow x^{۲}+y^{۲}\geqslant ۱ & (۱)\\ x^{۲}+y^{۲}>۰ & (۲)\end{cases}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $x^{۲}+y^{۲}\geqslant ۱$. بنابراین دامنه‌ی تابع z نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد، روی یا خارج دایره است.

۱۷. گزینه‌ی ۱. بخش (۹-۵۲)، صفحه‌ی ۶۳۰

$$\begin{cases}z_x=۰\Longrightarrow ۴x-۳y-۲=۰\\ z_y=۰\Longrightarrow ۲y-۳x+۲=۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}۴x-۳y=۲\\ ۲y-۳x=-۲\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}۱۲x-۹y=۶\\ ۸y-۱۲x=۸\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}y=۲\\ x=۲\end{cases}$$

$$z_{xx}=۴\ ,\ z_{xy}=-۳=z_{yx}\ ,\ z_{yy}=۲$$

$$|H_۱|=۴>۰\ ,\ |H_۲|=\begin{vmatrix}۴ & -۳\\ -۳ & ۲\end{vmatrix}=۸-۹=-۱<۰\Longrightarrow (۲,۲)\text{ نقطهٔ زینی}$$

۱۸. گزینه‌ی ۴. بخش (۹-۵۶)، صفحه‌ی ۶۳۶

$$۲x+۳y=۲۶\Longrightarrow ۲x=۲۶-۳y\Longrightarrow x=۱۳-\frac{۳}{۲}y$$

$$z=(۱۳-\frac{۳}{۲}y)^{۲}+y^{۲}=۱۶۹-۳۹y+\frac{۹}{۴}y^{۲}+y^{۲}\Longrightarrow z=\frac{۱۳}{۴}y^{۲}-۳۹y+۱۶۹$$

$$z'=۰\Longrightarrow\frac{۱۳}{۲}y-۳۹=۰\Longrightarrow y=۶\ ,\ x=۴\Longrightarrow z=۱۶+۳۶=۵۲$$

۱۹. گزینه‌ی ۳. بخش (۶-۴۱)، صفحه‌ی ۴۱۵

$$\frac{۱}{x^{۲}+x}=\frac{۱}{x(x+۱)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+۱}$$

$$۱=(x+۱)A+xB$$

$$x=-۱\Longrightarrow ۱=-B\Longrightarrow B=-۱$$

$$x=۰\Longrightarrow ۱=A$$

$$\int\frac{۱}{x^{۲}+x}dx=\int\frac{۱}{x}dx-\int\frac{۱}{x+۱}dx=\ln x-\ln(x+۱)$$

$$\int_{۱}^{۳}\frac{۱}{x^{۲}+x}dx=(\ln x-\ln(x+۱))\Big|_{۱}^{۳}=(\ln ۳-\ln ۴)-(\ln ۱-\ln ۲)$$

$$=\ln ۳-\ln ۲=\ln\frac{۳}{۲}$$

۲۰. گزینه‌ی ۲. بخش (۶-۳۷)، صفحه‌ی ۴۱۲

تلاقی با محور xها : $y = ۰ \Longrightarrow x^۲e^x = ۰ \Longrightarrow x = ۰$

$$S = \int_۰^۱ x^۲e^x dx = (x^۲e^x - ۲xe^x + ۲e^x)\Big|_۰^۱ = (e - ۲e + ۲e) - (۰ - ۰ + ۲) = e - ۲$$

$f(x)$ و مشتق‌هایش		$g(x)$ و انتگرال‌هایش
$x^۲$	+	e^x
$۲x$	−	e^x
۲	+	e^x
۰		e^x

۲۱. گزینه‌ی ۳. بخش (۸-۲۲)، صفحه‌ی ۵۱۷

$$A^۲ = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & ۱-a \\ ۱+a & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & ۱-a \\ ۱+a & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^۲+۱-a^۲ & a-a^۲-a+a^۲ \\ a+a^۲-a-a^۲ & ۱-a^۲+a^۲ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

اگر $n \in N$، رابطهٔ $I^n = I$ برقرار است. با فرض $n = ۲k + ۱$

$$A^n = A^{۲k+۱} = A^{۲k} \cdot A = (A^۲)^k A = I^k A = A$$

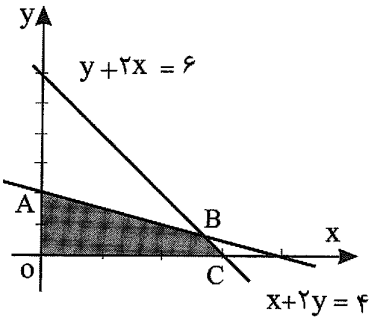
۲۲. گزینه‌ی ۲. مقدار تابع هدف $(z = ۲x + ۳y)$ را به‌ازای نقاط گوشه محاسبه کنیم.

$$O(۰,۰), A(۰,۲), C(۳,۰)$$

$$\begin{cases} x + ۲y = ۴ \Longrightarrow x = ۴ - ۲y \\ y + ۲x = ۶ \Longrightarrow y + ۲(۴ - ۲y) = ۶ \Longrightarrow y = \frac{۲}{۳},\ x = \frac{۸}{۳} \Longrightarrow B(\frac{۲}{۳}, \frac{۸}{۳}) \end{cases}$$

$$z_O = ۰,\ z_A = ۰ + ۳(۲) = ۶,\ z_B = ۲(\frac{۸}{۳}) + ۳(\frac{۲}{۳}) = \frac{۲۲}{۳},\ z_C = ۲(۳) + ۰ = ۶$$

$$\max : z = \frac{۲۲}{۳}$$



۲۳. گزینه‌ی ۴. بخش (۷-۷۳)، صفحه‌ی ۵۰۴

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & ۴ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow (۰ - ۴ + ۳a) - (۲۴ + ۱ + ۰) = ۰ \Longrightarrow a = \frac{۲۹}{۳}$$

۲۴. گزینه‌ی ۱. بخش (۸-۲۲)، صفحه‌ی ۵۱۷

$$[x \;\; ۲ \;\; y] \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۴ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow [x + ۴ - ۳y \;\; ۵x + ۸ + y] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow$$

$$۲x + ۸ - ۶y + ۲۵x + ۴۰ + ۵y = ۰ \Longrightarrow -y + ۲۷x + ۴۸ = ۰ \Longrightarrow y = ۲۷x + ۴۸$$

۲۵. گزینه‌ی ۴. بخش (۸-۷۲)، صفحه‌ی ۵۳۸

$$|A| = (۲ + ۰ + ۰) - (۱۲ + ۰ + ۰) = -۱۰$$

می‌دانیم $a_{۲۳}$ عنصر مربوط به سطر سوم و ستون دوم ماتریس الحاقی A می‌باشد، بنابراین $a_{۳۲}$ عنصر متناظر در ماتریس همسازه است:

$$a_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} = -(۴ + ۳) = -۷$$

$$A^{-۱}_{۲۳} = \frac{۱}{-۱۰}(-۷) = ۰٫۷$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۸۹)

«رشته‌های مدیریت و حسابداری»

۱. دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\log\frac{۱۱x-۲x^۲}{۱۲}}$، کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۳)$ ۲) $[\frac{۳}{۲},۶)$ ۳) $(۰,\frac{۱۱}{۲})$ ۴) $(\frac{۳}{۲},۴]$

۲. اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\ln\frac{۱-x}{۱+x}$ باشد، برد تابع gof، کدام است؟

۱) $[۰,۱)$ ۲) $(-۱,۰]$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۰]$

۳. تابع با ضابطه $f(x)=x+\sqrt{x^۲+۲}$ مفروض است. نمودار تابع $f^{-۱}$، نمودار تابع f را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) قطع نمی‌کند

۴. حاصل $\lim_{x\to۰}(۱+۳\ln ۲^x)^{\frac{۱}{x}}$، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) $۳e^۲$ ۴) $e^۳$

۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۳}}{|x+۱|} & x<-۱\\ ax+۱ & x\geqslant -۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=-۱$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۶. مشتق مرتبه دهم تابع با ضابطه $f(x)=\ln(۱+\frac{x}{۲})^۲$ به ازای $x=-۳$، کدام است؟

۱) $۲(۹!)$ ۲) $-(۱۰!)$ ۳) $\frac{۱}{۲}(۱۰!)$ ۴) $-۲(۹!)$

۷. نسبت تغییر $(x^۲-\sqrt{x})$ بر تغییر $(x-\frac{۱}{x})$ در لحظه $x=۱$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸. اگر $\lim_{x\to۲}\frac{ax+b}{x-\sqrt{۲x}}=۳$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) -۳

۹. خط مماس بر منحنی به معادله $y^۲+y\ln(۲x+۳)+x\ln(۳y-۵)=۴$ در نقطه $(-۱,۲)$ محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۰. مقدار تقریبی عدد $\sqrt[۳]{(۴/۰۱)^۲-۲(۴/۰۱)}$ با استفاده از دیفرانسیل، کدام است؟

۱) ۲/۰۰۲ ۲) ۲/۰۰۳ ۳) ۲/۰۰۵ ۴) ۲/۰۰۴

۱۱. می‌نیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x)=\frac{(x-۲)^۲}{\sqrt[۳]{x^۲}}$، $x<۰$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۱۲. حاصل $\int_{۰}^{\frac{۹}{۴}} \frac{dx}{\sqrt{x+۴}+\sqrt{x}}$، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۴}$

۱۳. سطح محدود به منحنی تابع $f(x)=(x+۱)e^{-x}$ و محور x ها و خط به معادله $x=۱$، کدام است؟

۱) $e-\frac{۱}{e}$ ۲) $e-\frac{۲}{e}$ ۳) $۲e-\frac{۳}{e}$ ۴) $e-\frac{۳}{e}$

۱۴. شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در هر نقطه $M(x,y)$ دو برابر حاصلضرب طول و عرض نقطه تماس است. اگر این منحنی از نقطه $(۱,۱)$ بگذرد محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) e ۲) $۲e$ ۳) $\frac{۲}{e}$ ۴) $\frac{۱}{e}$

۱۵. در تابع دو متغیری $z=\frac{xy}{x+y}$، مقدار $\frac{\partial^۲ y}{\partial x \partial y}$ در نقطه $(-۱,-۳)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۶. از رابطه $z^۲+۳xz+y^۲=\ln(x^۲+z)$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(-۳,۳,۲)$، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) -۱۳ ۴) -۲۲

۱۷. دیفرانسیل کامل تابع $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^۲+y^۲})$ در نقطه $(-۴,۳)$، کدام است؟

۱) $۰/۱(dx-dy)$ ۲) $۰/۱(۲dx-dy)$ ۳) $۰/۲(dx-dy)$ ۴) $۰/۲(۲dx-dy)$

۱۸. نقطه $A(۲,۳,-۱)$ مرکز یک مکعب است که یک وجه آن منطبق بر صفحه به معادله $۲x-۲y+z=۳$ می‌باشد. حجم این مکعب کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲۷ ۳) $\frac{۱۲۵}{۸}$ ۴) ۶۴

۱۹. اگر $z=x^۲-y^۲+\frac{y^۲}{x}$، $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ باشد، مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ به ازای $r=۲$ و $\theta=\frac{\pi}{۳}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۰. تابع $f(x,y)=۲x^۳-۶xy+۳y^۲$ در نقطه $(۱,۱)$ کدام وضع را دارد؟

۱) زینی ۲) نقطه عادی ۳) می‌نیمم نسبی ۴) ماکزیمم نسبی

۲۱. مجموع جملات سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۴n^۲-۱}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۲. از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix}۳\\-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & x\\-۱ & y & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\۵\\y\end{bmatrix}$، مقدار x کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۲۵ ۳) -۱۰ ۴) -۵۰

۲۳. به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات روبه‌رو سازگار است؟
$$\begin{cases} ۲x + ۳y = -m \\ ۳x + ۲y = ۶ \\ mx - ۴y = ۱۶ \end{cases}$$

۱) $-۸, ۲$ ۲) $۱۶, -۱$ ۳) $۲, -۸$ ۴) $-۱۶, ۱$

۲۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۹ & ۶ \end{bmatrix}$ و A^t ترانهاده ماتریس A باشد. ماتریس X از رابطهٔ $AX = A - A^t$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۶ & -۱۲ \\ ۱۰ & ۱۸ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱۲ & -۱۰ \\ ۶ & -۱۸ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۶ & ۱۰ \\ -۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۲ \\ -۱۸ & ۶ \end{bmatrix}$

۲۵. اگر $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و I ماتریس واحد مرتبه دوم باشد، دترمینان ماتریس $(B \cdot B' - ۴I)$، کدام است؟

۱) ۱۳۲ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۶۸

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۴. بخش (۳-۶۵)، صفحه‌ی ۷۷

$$\log \frac{۱۱x - ۲x^۲}{۱۲} \geqslant ۰ \Rightarrow \frac{۱۱x - ۲x^۲}{۱۲} \geqslant ۱ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۱x + ۱۲ \leqslant ۰$$

$$۲x^۲ - ۱۱x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱۱ \pm ۵}{۴} \Rightarrow x = ۴, x = \frac{۳}{۲}$$

x		$\frac{۳}{۲}$		۴	
p	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow x \in [\frac{۳}{۲}, ۴] \qquad (۱)$$

$$\frac{۱۱x - ۲x^۲}{۱۲} > ۰ \Rightarrow ۱۱x - ۲x^۲ > ۰$$

$$x(۱۱ - ۲x) = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = \frac{۱۱}{۲}$$

x		۰		$\frac{۱۱}{۲}$	
p	−	۰	+	۰	−

$$\Rightarrow x \in (۰, \frac{۱۱}{۲}) \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲)، اشتراک می‌گیریم $D_f = [\frac{۳}{۲}, ۴]$

۲. گزینه‌ی ۳. بخش‌های (۳-۳۹) و (۳-۸۸)، صفحه‌ی ۶۴ و ۹۵

$$f(x) = [x] - x \Rightarrow \text{gof}(x) = \ln \frac{۱ + (x - [x])}{۱ - (x - [x])}$$

$$۰ \leqslant x - [x] < ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - [x] = ۰ \Rightarrow \text{gof}(x) = \ln ۱ = ۰ \\ ۰ < x - [x] < ۱ \Rightarrow \text{gof}(x) > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{\text{gof}} = [۰, +\infty)$$

۳. گزینه‌ی ۴. بخش (۳-۱۱۱)، صفحه‌ی ۱۱۰

اگر نمودارهای f و f' متقاطع باشند، نقطه تقاطع آن‌ها روی نمیساز ربع اول و سوم $(y=x)$ است.

$$\begin{cases} y = x + \sqrt{x^2+1} \\ x = x \end{cases} \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 0 \Rightarrow \quad \text{جواب ندارد}$$

۴. گزینه‌ی ۲. بخش (۴-۷۴)، صفحه‌ی ۲۰۵

$$\lim_{x\to 0}(1+3\ln 2^x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x})(1+3\ln 2^x - 1) = \lim_{x\to 0}\frac{3\ln 2^x}{x} = \frac{0}{0} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{3\times\frac{2^x\ln 2}{2^x}}{1} = 3\ln 2 = \ln 8$$

$$\lim_{x\to 0}(1+3\ln 2^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln 8} = 8$$

۵. گزینه‌ی ۳. بخش (۴-۸۱)، صفحه‌ی ۲۰۸

$$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = -a+1 \ , \ x\to -1^- \Rightarrow |\underbrace{x+1}_{-}| = -(x+1)$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\frac{2x+\sqrt{x^2+3}}{-(x+1)}\times\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{2x-\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to -1^-}\frac{4x^2-(x^2+3)}{-(x+1)(2x-\sqrt{x^2+3})}$$

$$= \lim_{x\to -1^-}\frac{3(x-1)(x+1)}{-(x+1)(2x-\sqrt{x^2+3})} = \lim_{x\to -1^-}\frac{3(x-1)}{-(2x-\sqrt{x^2+3})} = -\frac{3}{2}$$

در نتیجه $-a+1 = -\frac{3}{2}$ یا $a = \frac{5}{2}$.

۶. گزینه‌ی ۴. بخش (۵-۲۴)، صفحه‌ی ۲۶۹

$$f(x) = \ln(1+\frac{x}{2})^2 = 2\ln(1+\frac{x}{2})$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}}\right) = \frac{2}{2+x}$$

مشتق مرتبه نهم f' ، معادل مشتق مرتبه‌ی دهم f است.

$$f^{(9)}_{(x)} = \frac{(-1)^8\cdot 9!(0-2)}{(2+x)^{10}} = \frac{-2(9!)}{(2+x)^{10}} \Rightarrow f^{(10)}_{(-3)} = -2(9!)$$

۷. گزینه‌ی ۴. بخش (۵-۳۵)، صفحه‌ی ۲۷۷

$$\frac{(x^2-\sqrt{x})'}{(x-\frac{1}{x})'} = \frac{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x=1} \frac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$$

۸. گزینه‌ی ۴. بخش (۴-۶۸)، صفحه‌ی ۱۹۹

وقتی $x\to 2$ ، داریم $(x-\sqrt{2x}) = 0$ ، پس $\lim_{x\to 2}\frac{ax+b}{x-\sqrt{2x}} = 3$ به شکل $\frac{0}{0}$ بوده. برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{a}{1-\frac{2}{2\sqrt{2x}}} = 3 \Rightarrow \frac{a}{1-\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

از طرفی

$$x \to ۲ : ax + b = ۰ \Rightarrow (\frac{۳}{۲} \times ۲) + b = ۰ \Rightarrow b = -۳$$

۹. گزینه‌ی ۱. بخش (۵-۵۴)، صفحه‌ی ۲۸۷

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{۲y}{۲x+۳} + \ln(۳y-۵)}{۲y + \ln(۲x+۳) + \frac{۳x}{۳y-۵}} \xrightarrow{(-۱,۲)} m_{\text{مماس}} = -\frac{۴+۰}{۴+۰-۳} = -۴$$

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۲ = -۴(x+۱) \xrightarrow[x=۰]{\text{تلاقی با محور yها}} \quad y - ۲ = -۴ \Rightarrow y = -۲$$

۱۰. گزینه‌ی ۳. بخش (۵-۱۴۰)، صفحه‌ی ۳۳۴

$$f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ - ۲x}, \quad a = ۴, \Delta x = ۴/۰۱ - ۴ = ۰/۰۱, f'(x) = \frac{۲x-۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۲x)^۲}}$$

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

$$f(۴ + ۰/۰۱) \approx f(۴) + f'(۴) \times ۰/۰۱ \approx \sqrt[۳]{۱۶ - ۸} + \frac{۸-۲}{۳\sqrt[۳]{(۱۶-۸)^۲}} \times \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\approx ۲ + \frac{۶}{۱۲} \times \frac{۱}{۱۰۰} \approx ۲/۰۰۵$$

۱۱. گزینه‌ی ۲. بخش (۵-۷۸)، صفحه‌ی ۳۰۱

$$y = \frac{(x-۲)^۲}{\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow y' = \frac{۲(x-۲)(\sqrt[۳]{x^۲}) - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(x-۲)^۲}{x\sqrt[۳]{x}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۲(x-۲)(۳x) - ۲(x-۲)^۲}{۳x\sqrt[۳]{x}}$$

$$\Rightarrow y' = ۰ \Rightarrow (x-۲)[۶x - ۲(x-۲)] = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$$

و به‌ازای $x = ۰$ ، y' وجود ندارد. اما باتوجه به شرط مسئله $(x < ۰)$: $x = ۰, x = ۲$ غیرقابل قبول است. پس

$$y_{\min} = \frac{(-۱-۲)^۲}{\sqrt[۳]{۱}} = ۹$$

۱۲. گزینه‌ی ۳. بخش (۶-۱۱)، صفحه‌ی ۳۹۰ و مثال همین صفحه

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+۴} + \sqrt{x}} = \int \frac{۱}{\sqrt{x+۴} + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+۴} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+۴} - \sqrt{x}} dx = \int \frac{(x+۴)^{\frac{۱}{۲}} - x^{\frac{۱}{۲}}}{۴} dx$$

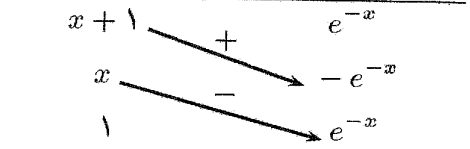
$$= \frac{۱}{۴}\left[\frac{۲}{۳}(x+۴)^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\right] + C = \frac{۱}{۶}\sqrt{(x+۴)^۳} - \frac{۹}{۶}\sqrt{x^۳} + C$$

$$\int_۰^{۹} \frac{dx}{\sqrt{x+۴} + \sqrt{x}} = \left(\frac{۱}{۶}\sqrt{(x+۴)^۳} - \frac{۱}{۶}\sqrt{x^۳}\right)\Big|_۰^{۹} = \left(\frac{۱}{۶}\sqrt{(\frac{۲۵}{۴})^۳} - \frac{۱}{۶}\sqrt{(\frac{۹}{۴})^۳}\right) - (\frac{۱}{۶}\sqrt{۴۳})$$

$$= \left(\frac{۱}{۶} \times \frac{۱۲۵}{۸} - \frac{۱}{۶} \times \frac{۲۷}{۸}\right) - \frac{۸}{۶} = \frac{۱۷}{۲۴}$$

۱۳. گزینه‌ی ۴. بخش (۶-۶۷)، صفحه‌ی ۴۳۳

$y(X)$ و انتگرال‌هایش $f(x)$ و مشتق‌هایش



تلاقی با محور xها : $y = ۰ \Rightarrow (x+۱)e^{-x} = ۰ \Rightarrow x = -۱$

$$S = \int_{-۱}^{۱} (x+۱)e^{-x}dx = (-x-۱)e^{-x} - xe^{-x}\Big|_{-۱}^{۱}$$

$$S = (-۲e^{-۱} - e^{-۱}) - (۰ + e^{۱}) = e - \frac{۳}{e}$$

۱۴. گزینه‌ی ۴. مانندِ تستِ صفحه‌ی ۳۹۱

$$m_{\text{مماس}} = ۲xy \Rightarrow y' = ۲xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = ۲x \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln y = x^{۲} + c$$

$$(۱,۱) \Rightarrow \ln ۱ = ۱ + c \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow \ln y = x^{۲} - ۱$$

محور y ها : $x = ۰ \Rightarrow \ln y = -۱ \Rightarrow y = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$

۱۵. گزینه‌ی ۱. بخش (۹-۲۲)، صفحه‌ی ۶۱۲

$$z = \frac{xy}{x+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^{۲}} = \frac{y^{۲}}{(x+y)۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^{۲} z}{\partial x \partial y} = \frac{۲y(x+y)^{۲} - ۲(x+y)y^{۲}}{(x+y)^{۴}} =$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^{۲} z}{\partial x \partial y}\Big|_{(۳,-۱)} = \frac{(-۲)(۴) - ۲(۲)(۱)}{۱۶} = -\frac{۳}{۴}$$

۱۶. گزینه‌ی ۳. بخش (۹-۳۳)، صفحه‌ی ۶۱۹

$$z^{۲} + ۳xz + y^{۲} - \ln(x^{۲} + z) = ۰$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{۳z - \frac{۲x}{x^{۲}+z}}{۲z + ۳x - \frac{۱}{x^{۲}+z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(۲,۳,-۳)} = -\frac{-۹ - ۴}{-۶ + ۶ - ۱} = -۱۳$$

۱۷. گزینه‌ی ۲. بخش (۹-۲۴)، صفحه‌ی ۶۱۳

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$df = \frac{۱ + \frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}}{x + \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}dx + \frac{\frac{۲y}{۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}}{x + \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}dy$$

$$df\Big|_{(۳,-۴)} = \frac{۱}{۵}dx - \frac{۱}{۱۰}dy = ۰/۱(۲dx - dy)$$

۱۸. گزینه‌ی ۴. بخش (۷-۶۳)، صفحه‌ی ۵۰۱

فاصلهٔ مرکز $A(۲,۳,-۱)$ از صفحهٔ $۲x-۲y+z-۳=۰$ را پیدا می‌کنیم.

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+cz_۰+d|}{\sqrt{z^۲+b^۲+c^۲}}=\frac{|۴-۶-۱-۳|}{\sqrt{۴+۴+۱}}=\frac{۶}{۳}=۲$$

$$\text{ارتفاع} = \text{عرض} = \text{طول} \Rightarrow \text{طول} = \text{عرض} = \text{ارتفاع} = ۲d = ۴$$

$$\text{حجم مکعب} = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$$

۱۹. گزینه‌ی ۲. بخش (۹-۳۲)، صفحه‌ی ۶۱۷

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=(۲x-\frac{y^۲}{x^۲})(\cos\theta)+(-۲y+\frac{۲y}{x})(\sin\theta)$$

$$r=۲,\theta=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲\times\frac{۱}{۲}=۱, y=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=(۲-۳)(\frac{۱}{۲})+(-۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

۲۰. گزینه‌ی ۳. بخش (۹-۵۲)، صفحه‌ی ۶۳۰

$$Z_x=۶x^۲-۶y\Rightarrow Z_{xx}=۱۲x, Z_{xy}=-۶$$

$$Z_y=-۶x+۶y\Rightarrow Z_{yy}=۶, Z_{yx}=-۶$$

$$|H_۱|=Z_{xx}=۱۲x, |H_۲|=\begin{vmatrix}Z_{xx} & Z_{xy}\\ Z_{yz} & Z_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱۲x & -۶\\ -۶ & ۶\end{vmatrix}=۷۲x-۳۶$$

در نقطهٔ $(۱,۱)$داریم

$$|H_۱|=۱۲>۰, |H_۲|=۷۲-۳۶=۳۶>۰\Rightarrow \quad \min(۱,۱) \text{ نسبی}$$

۲۱. گزینه‌ی ۳. بخش (۱۱-۱۰)، صفحه‌ی ۷۰۸

$$u_n=\frac{۱}{۴n^۲-۱}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲x-۱}-\frac{۱}{۲x+۱}\right)$$

$$S_۱=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۳}), S_۲=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۳})+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵})=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۵}),\cdots$$

$$S_n=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۳})+\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۵})+\cdots+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲n-۱}-\frac{۱}{۲n+۱}\right)\Rightarrow S_n=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۲n+۱})$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۲n+۱})=\frac{۱}{۲}(۱-۰)=\frac{۱}{۲}$$

۲۲. گزینه‌ی ۴. بخش (۸-۲۲)، صفحه‌ی ۵۱۷

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & x \\ -۱ & y & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۸ + ۱۵ + xy \\ -۴ + ۵y + ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۸ + ۱۵ + xy = ۳ \Rightarrow \frac{۲}{۵}x = -۲۰ \Rightarrow x = -۵۰ \\ -۴ + ۵y = -۲ \Rightarrow y = \frac{۲}{۵} \end{cases}$$

۲۳. گزینه‌ی ۴. بخش‌های (۸-۸۸) و (۸-۱۰۰)، صفحه‌ی ۵۴۵ و ۵۴۸

$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۶ \\ mx - ۴y = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳mx - ۲my = -۶m \\ ۳mx - ۱۲y = ۴۸ \end{cases} \Rightarrow y = \frac{۲۴ - ۳m}{-m - ۶}$$

$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۶ \\ mx - ۴y = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶x + ۴y = ۱۲ \\ mx - ۴y = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{۲۸}{m + ۶}$$

$$۲x + ۳y = -m \Rightarrow \frac{۵۶}{m+۶} - \frac{۷۲ - ۹m}{m+۶} = -m \Rightarrow m^۲ + ۱۵m - ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱۶ \\ m = ۱ \end{cases}$$

۲۴. گزینه‌ی ۱. تستِ بخش (۸-۲۹)، صفحه‌ی ۵۲۳

$$AX = A - A^t \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۹ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۹ & ۶ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۵ & ۹ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۵a + ۳c & ۵b + ۳d \\ ۹a + ۶c & ۹b + ۶d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۶ \\ ۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$-۲\times \begin{cases} ۵a + ۳c = ۰ \\ ۹a + ۶c = ۶ \end{cases} \Rightarrow -a = ۶ \Rightarrow a = -۶, c = ۱۰$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -۶ & -۱۲ \\ ۱۰ & ۱۸ \end{bmatrix}$$

$$-۲\times \begin{cases} ۵b + ۳d = -۶ \\ ۹b + ۶d = ۰ \end{cases} \Rightarrow -b = ۱۲ \Rightarrow b = -۱۲, d = ۱۸$$

۲۵. گزینه‌ی ۲. بخش (۸-۳۸)، صفحه‌ی ۵۲۷

$$B \cdot B^t - ۴I = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & -۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} - ۴ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & -۲ \\ -۲ & ۲۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\left| B \cdot B^t - ۴I \right| = \begin{vmatrix} ۱۰ & -۲ \\ -۲ & ۱۶ \end{vmatrix} = ۱۶۰ - ۴ = ۱۵۶$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد (۱۳۹۰)

«رشته‌های مدیریت و حسابداری»

۱. اگر $A_i = \{x : |x| \leqslant i, x \in Z\}$ باشد، آنگاه تعداد عضوهای مجموعه $A_3 \times (A_4 - A_2)$، کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۲. در بسط عبارت $(x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}})^{12}$ ضریب جمله شامل x^3، کدام است؟

۱) $\frac{55}{4}$ ۲) $\frac{55}{2}$ ۳) $-\frac{55}{2}$ ۴) $-\frac{55}{4}$

۳. اگر $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ باشد، آنگاه $f^{-1}(\ln 2)$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۴. اگر $f(x) = \sqrt{x + |x|}$، آنگاه ضابطه تابع حقیقی $f(\frac{1}{f(x)})$ کدام است؟

۱) $(\frac{x+1}{x})^{\frac{1}{4}}$ ۲) $(\frac{2}{x})^{\frac{1}{4}}$ ۳) $\frac{x}{\sqrt{x + |x|}}$ ۴) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + |x|}}$

۵. حاصل $\lim_{x \to 0} \frac{3 - \sqrt{7 + \sqrt{4 + 3x}}}{x - [x^2]}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۶. حاصل $\lim_{x \to \infty} (\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1})^x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{1}{e}}$ ۲) $\sqrt{e}$ ۳) e^2 ۴) e^{-2}

۷. به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^3 - 8|}{x - 2} & x < 2 \\ 2x + a & x \geqslant 2 \end{cases}$ ، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) -12 ۴) -16

۸. معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

۱) $y = 2x - 8$ ۲) $y = x - 8$ ۳) $y = 2x - 10$ ۴) $y = 4x - 14$

۹. اگر $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = xe^x$ باشد، مشتق تابع $f(\ln x)$ کدام است؟

۱) $x \ln x$ ۲) $\ln x$ ۳) $x^2 \ln x$ ۴) $\frac{\ln x}{x}$

۱۰. مقدار مشتق تابع $y = \frac{(2x-1)^3 \sqrt{5x-6}}{(x+4)^2 \sqrt[3]{x+6}}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{16}$ ۲) $\frac{23}{16}$ ۳) $\frac{26}{16}$ ۴) $\frac{27}{16}$

۱۱. مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{(۲/۰۱)^۲ + ۲(۲/۰۱)}$ به‌کمک دیفرانسیل کدام است؟

۱) ۲/۰۰۸ ۲) ۲/۰۰۵ ۳) ۲/۰۱۲ ۴) ۲/۰۱۴

۱۲. اگر نرخ افزایش جمعیت درکشوری به‌طور متوسط ۲ درصد باشد، این جمعیت پس از ۵۰ سال تقریباً چند برابر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۱/۷ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷

۱۳. حاصل $\int_۰^۴ |۱ - x|\sqrt{x}dx$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۴. مساحت محدود به منحنی $y = x\ln x$ و محور xها در بازه $[۱, e]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(e^۲ - ۱)$ ۲) $\frac{۱}{۴}e^۲$ ۳) $\frac{۱}{۴}(e^۲ + ۱)$ ۴) $\frac{۱}{۲}(e^۲ - ۲)$

۱۵. توابع عرضه و تقاضا در وضعیت رقابت کامل به صورت‌های $y = ۲x^۲ + ۱$ و $y = ۱۳ - x^۲$ است. مازاد مصرف‌کننده در حالت تعادل بازار کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۳۲}{۳}$

۱۶. به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ a & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ در $(۰,۰)$ پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) هیچ مقدار a

۱۷. برد تابع دو متغیره $z = \sqrt{۳ - ۴x^۲ - y^۲ + ۱۲x - ۴y}$ کدام است؟

۱) $[۱, ۳]$ ۲) $[۰, ۲]$ ۳) $[۰, ۴]$ ۴) $[۱, ۴]$

۱۸. در تابع دو متغیره $z = \frac{x^۲}{y} - \frac{x^۲ + y}{۲x}$ مقدار $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه $(۳, ۲)$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۹. اگر $z = \ln(x^۲ + ۲y^۲)$ و $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ به ازای $r = ۲$ و $\theta = \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۲۰. نقاط بحرانی تابع $z = ۲x^۳ - ۶xy + ۳y^۲$ چگونه‌اند؟

۱) زینی ـ مینیمم ۲) مینیمم ـ مینیمم ۳) زینی ـ ماکسیمم ۴) مینیمم ـ ماکسیمم

۲۱. کمترین مقدار تابع $U = x^۲ + y^۲ + z^۲$ با شرط $۲x - y + ۲z = ۶$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۲. حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۶ & ۴ \\ ۵ & -۴ & ۳ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۳۸ ۲) ۲۷ ۳) ۷۵ ۴) ۸۵

۲۳. اگر $A=\begin{bmatrix}-۳ & -۲\\ ۷ & ۵\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس X از رابطه $AX=A^t-۲I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۲۹ & -۴۱\\ -۴۱ & ۵۸\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۴۱ & ۵۸\\ ۲۹ & -۴۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۲۹ & ۵۸\\ -۴۱ & ۴۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۲۹ & ۴۱\\ ۴۱ & -۵۸\end{bmatrix}$

۲۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & -۲\\ ۱ & ۰ & ۳\\ ۰ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$، درایه مربوط به سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۰٫۴ ۲) ۰٫۳ ۳) ۰٫۵ ۴) ۰٫۶

۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۳\\ a & b & c\end{bmatrix}$ و A^t ترانهاده ماتریس A باشد، دترمینان ماتریس $A^t\cdot A$ کدام است؟

۱) $۶abc$ ۲) صفر ۳) $a^۲b^۲c^۲$ ۴) $۱۴a^۲b^۲c^۲$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

۱. گزینه‌ی ۴. بخش (۱-۴۷)، صفحه‌ی ۱۶.

$$A_۲=\{x:|x|\leqslant ۲, x\in Z\}=\{x:-۲\leqslant x\leqslant ۲, x\in Z\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$
$$A_۳=\{x:|x|\leqslant ۳, x\in Z\}=\{x:-۳\leqslant x\leqslant ۳, x\in Z\}=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$$
$$A_۴=\{x:|x|\leqslant ۴, x\in Z\}=\{x:-۴\leqslant x\leqslant ۴, x\in Z\}=\{-۴,-۳,\ldots,۳,۴\}$$
$$(A_۴-A_۲)\times A_۳=\{-۴,-۳,۳,۴\}\times\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$$
$$n[(A_۴-A_۲)\times A_۳]=n(A_۴-A_۲)\times n(A_۳)=۴\times ۷=۲۸$$

۲. گزینه‌ی ۳. بخش (۲-۱۴)، صفحه‌ی ۳۷.

$$(x^۲-\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x}})^{۱۲}=[x^۲-(۲x)^{-\frac{۱}{۳}}]^{۱۲}$$
$$۲(۱۲-r)+(-\frac{۱}{۳})r=۳\Longrightarrow ۲۴-۲r-\frac{۱}{۳}r=۳\Longrightarrow r=۹$$
$$\text{جملهٔ شامل } x^۳=\binom{۱۲}{۹}(x^۲)^۳(-\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x}})^۹=\frac{۱۲!}{۹!۳!}(x^۶)(-\frac{۱}{۸x^۳})=-\frac{۵۵}{۲}x^۳$$

راه‌حل دوم: بخش (۲-۱۸)، صفحه‌ی ۳۹.

جملهٔ شامل $x^۳$ از حاصل ضرب عبارت‌های $(x^۲)^۳(-\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x}})^۹$ حاصل می‌شود. بنابراین ضریب جملهٔ $x^۳$ برابر است با:

$$\frac{۱۲!}{۳!۹!}(x^۲)^۳(-\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x}})^۹=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰}{۳\times ۲}(x^۶)(-\frac{۱}{۸x^۳})=-\frac{۵۵}{۲}x^۳$$

۳. گزینه‌ی ۳. بخش (۲-۱۳۴)، صفحه‌ی ۱۲۲.

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^۲+۱})\Longrightarrow f^{-۱}(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$$
$$f^{-۱}(\ln ۲)=\frac{e^{\ln ۲}-e^{-\ln ۲}}{۲}=\frac{۲-\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

راه حل دوم: بخش (۳-۱۱۲)، صفحه‌ی ۱۱۰.

$$\ln(x+\sqrt{x^۲+۱})=\ln ۲ \Longrightarrow x+\sqrt{x^۲+۱}=۲ \Longrightarrow \sqrt{x^۲+۱}=۲-x$$
$$x^۲+۱=۴-۴x+x^۲ \Longrightarrow ۴x=۳ \Longrightarrow x=\frac{۳}{۴} \Longrightarrow f^{-۱}(\ln ۲)=\frac{۳}{۴}$$

۴. گزینه‌ی ۲. بخش (۳-۸۰)، صفحه‌ی ۹۰.

$$x\in\mathbb{R}:(x\geqslant ۰ \Longrightarrow \sqrt{x+x}=\sqrt{۲x}\ ,\ x<۰ \Longrightarrow \sqrt{x-x}=۰)$$
$$\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{\sqrt{۲x}} \Longrightarrow f(\frac{۱}{f(x)})=\sqrt{\frac{۲}{\sqrt{۲x}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{۴}{۲x}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{۲}{x}}}=(\frac{۲}{x})^{\frac{۱}{۴}}$$

۵. گزینه‌ی ۱. بخش (۴-۶۸)، صفحه‌ی ۱۹۹.

$$x\to ۰ \Longrightarrow [x^۲]=۰$$
$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳-\sqrt{۷+\sqrt{۴+۳x}}}{x}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to ۰}(-\frac{\frac{۳}{\sqrt{۲\sqrt{۴+۳x}}}}{۲\sqrt{۷+\sqrt{۴+۳x}}})=-\frac{\frac{۳}{۴}}{۲\times ۳}=-\frac{۱}{۸}$$

۶. گزینه‌ی ۴. بخش (۴-۷۴)، صفحه‌ی ۲۰۵.

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^۲-۲x}{x^۲+۱})^x=۱^\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x)(\frac{x^۲-۲x}{x^۲+۱}-۱)=\lim_{x\to+\infty}(x)(\frac{-۲x-۱}{x^۲+۱})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۲x^۲}{x^۲}=-۲$$
$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^۲-۲x}{x^۲+۱})^x=e^{-۲}$$

۷. گزینه‌ی ۴. بخش (۴-۸۱)، صفحه‌ی ۲۰۸.

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲+}=\lim_{x\to ۲+}(۲x+a)=۴+a$$
$$x\to ۲^- \Longrightarrow |x^۳-۸|=-(x^۳-۸)$$
$$\lim_{x\to ۲-}\frac{-(x^۳-۸)}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to ۲-}\frac{-۳x^۲}{۱}=-۱۲$$
$$f(۲)=\lim_{x\to ۲+}f(x)=\lim_{x\to ۲-}f(x) \Longrightarrow ۴+a=-۱۲ \Longrightarrow a=-۱۶$$

۸. گزینه‌ی ۴. بخش (۵-۵۴)، صفحه‌ی ۲۸۷.

$$f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۱-\sqrt{x}}+\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\frac{(۱+\sqrt{x})^۲+(۱-\sqrt{x})^۲}{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x}))}=\frac{۱+۲\sqrt{x}+x+۱-۲\sqrt{x}+x}{۱-x} \Longrightarrow$$
$$f(x)=\frac{۲+۲x}{۱-x} \Longrightarrow f'(x)=\frac{۲(۱-x)+(۲+۲x)}{(۱-x)^۲}=\frac{۴}{(۱-x)^۲}$$
$$x=۲ \Longrightarrow y=\frac{۲+۴}{۱-۲}=-۶ \Longrightarrow \text{نقطه تماس}(۲,-۶)\ ,\ m_{\text{تماس}}=f'(۲)=۴$$
$$y-y_۰=m_{\text{تماس}}(x-x_۰) \Longrightarrow y+۶=۴(x-۲) \Longrightarrow y=۴x-۱۴$$

۹. گزینه‌ی ۲. بخش‌های (۵-۱۱) و (۵-۲۸)، صفحه‌ی ۲۶۰ و ۲۷۲.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=xe^x \Longrightarrow f'(x)=xe^x$$

$$y=f(\ln x)\Longrightarrow y'=\frac{۱}{x}f'(\ln x)=\frac{۱}{x}\cdot \ln x\cdot e^{\ln x}=\frac{۱}{x}\cdot \ln x\cdot x=\ln x$$

۱۰. گزینه‌ی ۴. بخش (۵-۱۹)، صفحه‌ی ۲۶۵.

$$x=۲\Longrightarrow y=\frac{۲۷\times ۲}{۳۶\times ۲}=\frac{۳}{۴}$$

$$\ln y=\ln\frac{(۲x-۱)^۳\sqrt{۵x-۶}}{(x+۴)^۲\sqrt[۳]{x+۶}}=۳\ln(۲x-۱)+\frac{۱}{۲}\ln(۵x-۶)-۲\ln(x+۴)-\frac{۱}{۳}\ln(x+۶)$$

$$\frac{y'}{y}=(۳\times\frac{۲}{۲x-۱})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۵x-۶})-(۲\times\frac{۱}{x+۴})-(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{x+۶})$$

$$y'_{(۲)}=\frac{۳}{۴}[(\frac{۶}{۳})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۴})-(۲\times\frac{۱}{۶})-(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۸})]=\frac{۲۷}{۱۶}$$

۱۱. گزینه‌ی ۴. بخش (۵-۱۴۰)، صفحه‌ی ۳۳۵.

$$f(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۲x}, a=۲, \Delta x=۲/۰۱-۲=۰/۰۱$$

$$f'(x)=\frac{۲x+۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۲x)^۲}}$$

$$f(a+\Delta x)\approx f(a)+f'(a)\Delta x$$

$$f(۲+۰/۰۱)\approx f(۲)+f'(۲)\times ۰/۰۱\approx\sqrt[۳]{۴+۴}+\frac{۴+۲}{۳\sqrt[۳]{(۴+۴)^۲}}\times\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\approx ۲+\frac{۶}{۳\times ۴}\times\frac{۱}{۱۰۰}\approx ۲/۰۰۵$$

۱۲. گزینه‌ی ۴. بخش (۱۲-۲۹)، صفحه‌ی ۷۴۱.

$$A_t=A_۰(۱+r)^t\Longrightarrow A_{۵۰}=A_۰(۱+۰/۰۲)^{۵۰}\Longrightarrow A_{۵۰}=A_۰\times ۲/۷$$

۱۳. گزینه‌ی ۴. بخش (۶-۵۸)، صفحه‌ی ۴۲۷.

$$۱-x=۰\Longrightarrow x=۱\Longrightarrow$$

x		۱	
$۱-x$	$+$	۰	$-$

$$\int_۰^۴|۱-x|\sqrt{x}dx=\int_۰^۱(۱-x)\sqrt{x}dx+\int_۱^۴(x-۱)\sqrt{x}dx$$

$$=\int_۰^۱(x^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۳}{۲}})dx+\int_۱^۴(x^{\frac{۳}{۲}}-x^{\frac{۱}{۲}})dx$$

$$=(\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}})\Big|_۰^۱+(\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}})\Big|_۱^۴$$

$$=(\frac{۲}{۳}-\frac{۲}{۵})-۰+(\frac{۶۴}{۵}-\frac{۱۶}{۳})-(\frac{۲}{۵}-\frac{۲}{۳})=۸$$

۱۴. گزینه‌ی ۳. بخش (۶-۶۷)، صفحه‌ی ۴۳۳.

$$y=۰ \Longrightarrow x\ln x=۰ \Longrightarrow x=۰, \ln x=۰ \Longrightarrow x=e^{۰} \Longrightarrow x=۱$$

$$S=\int x\ln x dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x-\int \frac{۱}{۲}x dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x-\frac{۱}{۴}x^{۲}$$

$$\begin{cases} u=\ln x \\ dv=x dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=\frac{۱}{x}dx \\ v=\frac{۱}{۲}x^{۲} \end{cases}$$

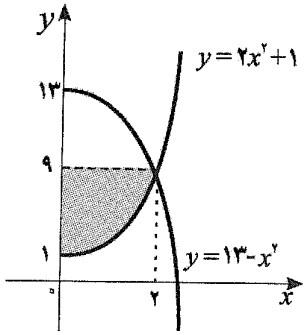
$$S=\int_{۱}^{e} x\ln x dx=(\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x-\frac{۱}{۴}x^{۲})\Big|_{۱}^{e}=(\frac{۱}{۲}e^{۲}-\frac{۱}{۴}e^{۲})-(۰-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۴}(e^{۲}+۱)$$

۱۵. گزینه‌ی ۳. بخش (۱۲-۲۲)، صفحه‌ی ۷۳۵.

$$\begin{cases} y=۲x^{۲}+۱ \\ y=۱۳-x^{۲} \end{cases} \Longrightarrow ۲x^{۲}+۱=۱۳-x^{۲} \Longrightarrow x^{۲}=۴ \Longrightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{ق.ق} \\ x=-۲ & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\text{مازاد مصرف‌کننده} = \int_{۰}^{۲}(۱۳-x^{۲}-۹)dx=\int_{۰}^{۲}(۴-x^{۲})dx$$

$$=(۴x-\frac{۱}{۳}x^{۳})\Big|_{۰}^{۲}=۸-\frac{۸}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$$



۱۶. گزینه‌ی ۴. بخش (۹-۱۵)، صفحه‌ی ۶۰۷.

$$f(۰,۰)=a$$

$$\lim_{x\to ۰}(\lim_{y\to ۰}\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}})=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{x^{۲}}=۱$$

$$\lim_{y\to ۰}(\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}})=\lim_{y\to ۰}\frac{-y^{۲}}{y^{۲}}=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰}(\lim_{y\to ۰}\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}})\neq\lim_{y\to ۰}(\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}) \Longrightarrow \text{تابع } f \text{ در } (۰,۰) \text{ حد ندارد.}$$

۱۷. گزینه‌ی ۳. بخش (۹-۵)، صفحه‌ی ۶۰۲.

با توجه به ضابطهٔ تابع، همواره $z\geqslant ۰$ است. از طرفی

$$z=\sqrt{۳-(۴x^{۲}-۱۲x+۹)-(y^{۲}+۴y+۴)+۱۳}=\sqrt{۱۶-(۲x-۳)^{۲}-(y+۲)^{۲}}$$

بیشترین مقدار z به ازای $۲x-۳=۰$ و $y+۲=۰$ حاصل می‌شود. در این صورت $z=\sqrt{۱۶}$ یا $z=۴$ پس

$$R_z=[۰,۴]$$

۱۸. گزینه‌ی ۲. بخش (۹-۱۸)، صفحه‌ی ۶۱۰.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x}{y}-\frac{۲x(۲x)-۲(x^۲+y)}{۴x^۲}=\frac{۲x}{y}-\frac{۲x^۲-۲y}{۴x^۲}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x^۲}{y^۲}-\frac{۱}{۲x}$$
$$(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y})\Big|_{(۳,۲)}=۳(\frac{۶}{۲}-\frac{۱۸-۴}{۳۶})+۲(-\frac{۹}{۴}-\frac{۱}{۶})=۳$$

۱۹. گزینه‌ی ۲. بخش (۹-۳۲)، صفحه‌ی ۶۱۷.

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{۲x}{x^۲+۲y^۲}\cdot(-r\sin\theta)+\frac{۴y}{x^۲+۲y^۲}\cdot(r\cos\theta)$$
$$r=۲,\theta=\frac{\pi}{۴}\Longrightarrow x=۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲},y=۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$
$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲+۴}(-۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})+\frac{۴\sqrt{۲}}{۲+۴}(۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۲}{۳}$$

۲۰. گزینه‌ی ۱. بخش (۹-۵۲)، صفحه‌ی ۶۳۰.

$$\begin{cases}z_x=۶x^۲-۶y=۰\\ z_y=-۶x+۶y=۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x^۲-y=۰\Longrightarrow y=x^۲\\ -x+y=۰\Longrightarrow -x+x^۲=۰\Longrightarrow x(-۱+x)=۰\end{cases}$$
$$\begin{cases}x=۰\Longrightarrow y=۰\Longrightarrow(۰,۰)\\ x=۱\Longrightarrow y=۱\Longrightarrow(۱,۱)\end{cases}$$
$$z_{xx}=۱۲x,z_{xy}=z_{yx}=-۶,z_{yy}=۶$$
$$|H_۱|=z_{xx}=۱۲x\ ,\ |H_۲|=\begin{vmatrix}z_{xx}&z_{xy}\\ z_{yx}&z_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱۲x&-۶\\ -۶&۶\end{vmatrix}=۷۲x-۳۶$$

به‌ازای $(x=۰,y=۰)$: $|H_۱|=۰$، $|H_۲|=-۳۶<۰$، پس $(۰,۰)$ نقطه‌ی زینی.

به‌ازای $(x=۱,y=۱)$: $|H_۱|=۱۲>۰$، $|H_۲|=۳۶>۰$، پس $(۱,۱)$ نقطه‌ی مینیمم.

۲۱. گزینه‌ی ۳. بخش (۹-۵۷)، صفحه‌ی ۶۳۷.

$$L=x^۲+y^۲+z^۲+\lambda(۶-۲x+y-۲z)$$
$$L_x=۲x-۲\lambda=۰\Longrightarrow x=\lambda$$
$$L_y=۲y+\lambda=۰\Longrightarrow y=-\frac{\lambda}{۲}$$
$$L_z=۲z-۲\lambda=۰\Longrightarrow z=\lambda$$
$$L_\lambda=۶-۲x+y-۲z=۰\Longrightarrow ۶-۲\lambda-\frac{\lambda}{۲}-۲\lambda=۰\Longrightarrow\lambda=\frac{۴}{۳}$$
$$\Longrightarrow x=\frac{۴}{۳},y=-\frac{۲}{۳},z=\frac{۴}{۳}$$
$$z_{\min}=\frac{۱۶}{۹}+\frac{۴}{۹}+\frac{۱۶}{۹}=۴$$

۲۲. گزینه‌ی ۴. بخش (۸-۳۹)، صفحه‌ی ۵۲۸.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۶ & ۳ \\ ۳ & -۴ & ۵ \end{vmatrix} = (۶۰ + ۱۶ + ۲۷) - (-۱۸ - ۲۴ + ۶۰) = ۸۵$$

۲۳. گزینه‌ی ۱. بخش‌های (۸-۲) و (۸-۲۹)، صفحه‌ی ۵۱۳ و ۵۲۳.

$$AX = A^t - ۲I \Longrightarrow \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۷ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} -۳a - ۲c & -۳b - ۲d \\ ۷a + ۵c & ۷b + ۵d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & ۷ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -۳a - ۲c = -۵ \\ ۷a + ۵c = -۲ \end{cases} \Longrightarrow a = ۲۹, c = -۴۱$$

$$\begin{cases} -۳b - ۲d = ۷ \\ ۷b + ۵d = ۳ \end{cases} \Longrightarrow b = -۴۱, d = ۵۸$$

۲۴. گزینه‌ی ۱. بخش (۸-۷۲)، صفحه‌ی ۵۳۸.

$$|A| = (۰ - ۴ + ۰) - (۰ + ۰ + ۱) = -۵$$

می‌دانیم $a_{۲۳}$ عنصر ماتریس الحاقی A می‌باشد، بنابراین $a_{۳۲}$، عنصر متناظر در ماتریس همسازه است.

$$a_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -(۰ + ۲) = -۲$$

$$A^{-۱}_{۲۳} = \frac{۱}{-۵} \times (-۲) = ۰/۴$$

۲۵. گزینه‌ی ۲. بخش (۸-۳۹)، صفحه‌ی ۵۲۸.

راه‌حل کوتاه: به ازای $a = b = c = ۱$ مسئله را حل می‌کنیم. دقت کنید به ازای این مقادیر گزینه‌ها برابر نمی‌شوند!

$$A^t \cdot A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۷ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۷ & ۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$|A^t \cdot A| = (۱۰۰ + ۸۴ + ۸۴) - (۹۸ + ۸۰ + ۹۰) = ۰$$

منابع و ماخذ

۱. لیتهلد. لوئیس، حساب دیفرانسیل و انتگرال، جلد ۱ و ۲، ترجمهٔ مهدی بهزاد، محسن رزاقی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

۲. سیلورمن، ریچارد، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، جلد ۱ و ۲، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، تهران.

۳. جین.ا. وبر، تحلیل‌های ریاضی وکاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی، جلد ۱ و ۲، ترجمهٔ محمد حسین‌پورکاظمی، انتشارات دانشگاه بهشتی، تهران.

۴. پورکاظمی، محمدحسین، ریاضیات عمومی وکاربردهای آن، جلد ۱ و ۲، نشر نی، تهران.

۵. رنجبران، هادی، راهنمای تحلیل‌های ریاضی وکاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی، نشر نور علم، تهران.

۶. رنجبران، هادی، هندسه تحلیلی و جبر خطی. انتشارات مبتکران، تهران.

۷. رنجبران، هادی، ریاضی پایه، انتشارات مدرسه، تهران.

انتشارات اثبات به زودی از این مؤلف منتشر می‌کند:

	روش تحقیق و آمار آمادگی آزمون ورودی دورهٔ دکتری (Ph. D.) گروه آزمایشی علوم انسانی (کلیهٔ رشته‌ها)	آمار و احتمالات آمادگی آزمون ورودی دورهٔ دکتری (Ph. D.) گروه آزمایشی کشاورزی و منابع طبیعی (کلیهٔ رشته‌ها)
شامل	• آموزش تعاریف و مفاهیم و قضایای درس • تحلیل و تشریح تست‌های آزمون ورودی سال ۱۳۹۰، کلیهٔ رشته‌ها	• حل و تشریح تست‌های استاندارد

	ریاضیات عمومی آمادگی آزمون کارشناسی ارشد	آمار و احتمالات آمادگی آزمون کارشناسی ارشد
رشته‌های	• طراحی و برنامه‌ریزی شهری • مدیریت محیط زیست • مدیریت جهانگردی	• سنجش از دور سیستم اطلاعات جغرافیایی • علوم جغرافیایی
شامل	• آموزش تعاریف و مفاهیم درسی • آموزش راه حل‌های کوتاه • تحلیل و تشریح تست‌های سراسری (۱۳۹۰-۱۳۸۰)	• حل و تشریح مثال‌های متنوع • حل و تشریح تست‌های استاندارد • تحلیل و تشریح تست‌های دانشگاه آزاد (۱۳۹۰-۱۳۸۰)

	ریاضیات عمومی آمادگی آزمون کاردانی به کارشناسی رشتهٔ حسابداری	آمار و احتمال آمادگی آزمون کاردانی به کارشناسی رشتهٔ حسابداری
شامل	• آموزش تعاریف و مفاهیم درسی • آموزش راه حل‌های کوتاه • تحلیل و تشریح تست‌های سراسری (۱۳۹۰-۱۳۸۰)	• حل و تشریح مثال‌های متنوع • حل و تشریح تست‌های استاندارد • تحلیل و تشریح تست‌های دانشگاه آزاد (۱۳۹۰-۱۳۸۰)

نشر اثبات منتشر کرد

ریاضیات

ویژهٔ آزمون کارشناسی ارشدِ دانشگاه آزاد اسلامی

مؤلف: هادی رنجبران

رشته‌های مدیریت بازرگانی، مدیریت صنعتی، مدیریت تکنولوژی،
مدیریت دولتی، مدیریت مالی و حسابداری

شامل

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی،
سال‌های (۹۰-۷۸) به صورتِ موضوعی،
همراه با پاسخِ تشریحی

آمار و احتمال

ویژهٔ آزمون کارشناسی ارشدِ دانشگاه آزاد اسلامی

مؤلف: هادی رنجبران

رشته‌های مدیریت بازرگانی، مدیریت صنعتی، مدیریت تکنولوژی،
مدیریت دولتی، مدیریت مالی و حسابداری

شامل

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی،
سال‌های (۹۰-۷۸) به صورتِ موضوعی،
همراه با پاسخِ تشریحی